HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela Paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

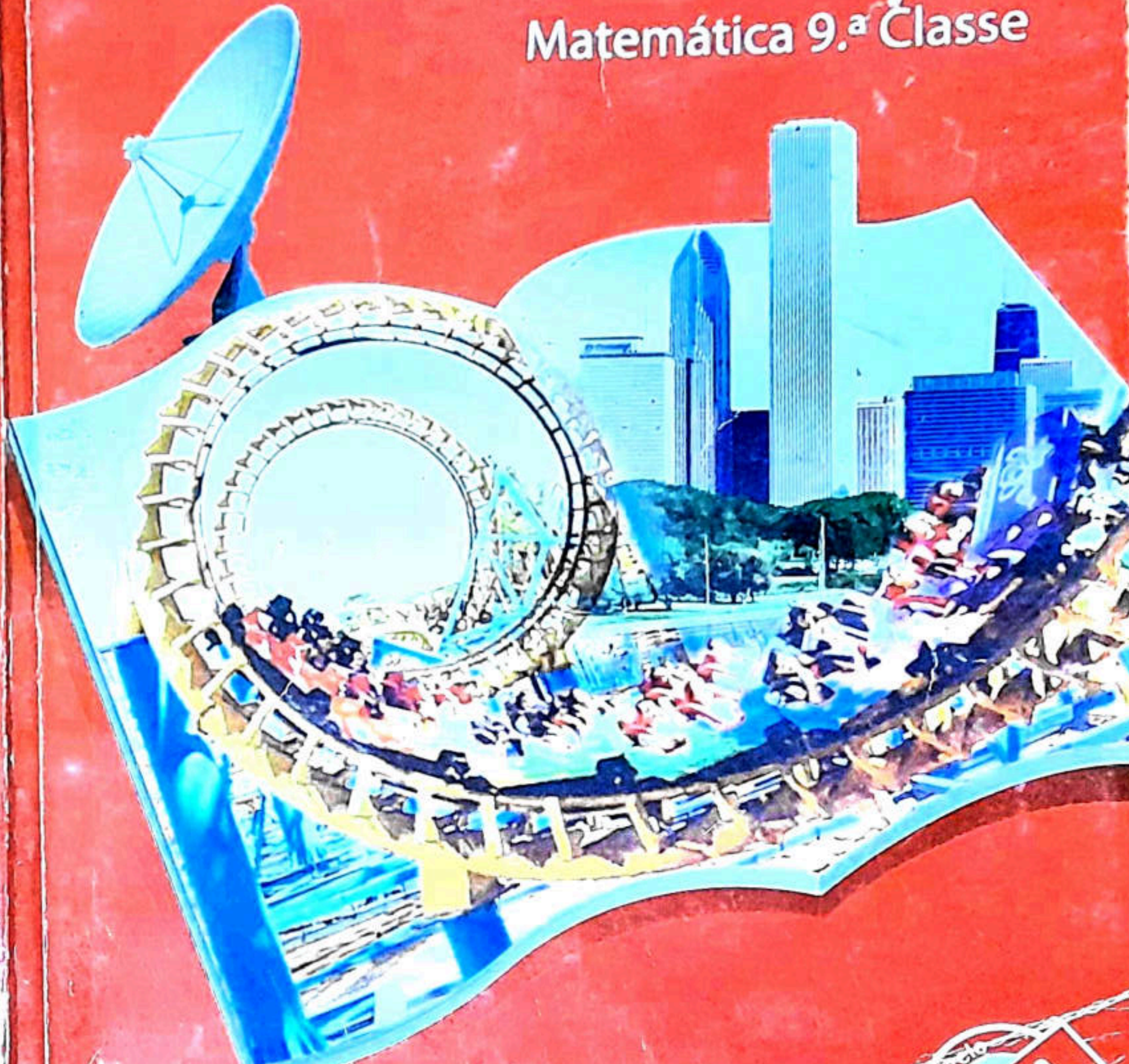
Flores brotando do chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios, pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique
Nenhum tirano nos irá escravizar.

LeYa Texto Editores

Zeferino Martins

M9

Matemática 9.ª Classe



Texto Editores

Adoptado pelo MINEDH

Melissa de Sousa

ficha técnica

título	**M9 · Matemática 9.ª Classe**
autor	**Zeferino Martins**
coordenação	**Stella Morgadinho**
editor	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
capa	**Dércio Simango**
ilustrações	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
arranjo gráfico	**Darlene Mavale e Dércio Simango**
paginação	**Arlindo Pais Wamusse**
pré-impressão	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
impressão e acabamentos	**Texto Editores**

Texto Editores

Av. Para o Palmar Q. 35, n.º 141A · Sommerchield II · Maputo · Moçambique
Tel: (+258) 21 49 73 04
Fax: (+258) 21 49 73 05
Cels: (+258) 82 326 1460 · (+258) 84 326 1460
E-mail: info@me.co.mz

MAPUTO, JANEIRO de 2017 · 2.ª EDIÇÃO · 2.ª TIRAGEM · REGISTADO NO INLD SOB O NÚMERO: 6938/RLINLD/2011

Zeferino Alexandre Martins

210

M9

Matemática 9.ª Classe

Texto Editores

Prefácio

Caro estudante,

Matemática 9.ª Classe é a continuação de um trabalho iniciado com a Matemática 8.ª classe e que se destina a acompanhar-te ao longo do 1.º ciclo do Ensino Secundário.

Ao longo do texto encontrarás as rubricas «Exemplos», «Exercícios resolvidos», «Exercícios de consolidação» e um «Teste final» no fim de cada unidade para aferires os teus conhecimentos.

No fim do manual poderás aprender um pouco mais da História da Matemática na rubrica «Notas históricas», consultar as soluções de todos os exercícios, assim como, tabelas de quadrados e cubos e respectivas raízes e a planificação dos sólidos estudados para iniciares ou contribuíres para a Caixa da Matemática da tua Escola.

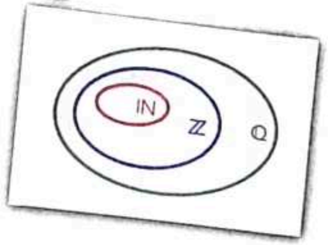
Matemática 9.ª Classe não resolverá, só por si, o insucesso na disciplina de Matemática, se o guardares numa estante ou debaixo da cama, longe do teu olhar. Porém, se o utilizares regularmente, fazendo os exercícios e problemas propostos, conferindo com as soluções, verificando no final de cada Unidade os teus conhecimentos, apostamos que darás alegrias à tua Família, aos teus amigos e, principalmente, a ti próprio, grande beneficiário do teu sucesso educativo.

Uma vez mais, a nossa confiança no teu futuro e no futuro de Moçambique.

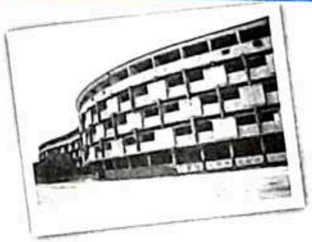
O Autor

Índice

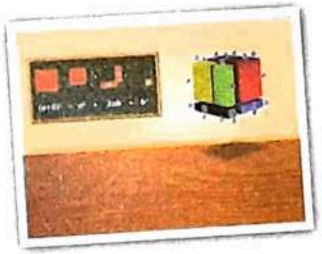
Unidade 1: Números reais. Radiciação



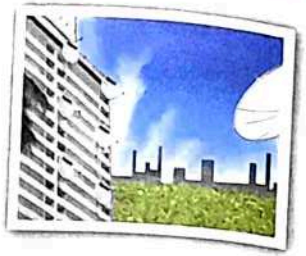
Unidade 2: Inequações e sistemas de inequações lineares com uma variável



Unidade 3: Noção de monómios e polinómios



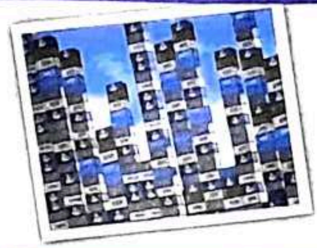
Unidade 4: Equação quadrática



Unidade 5: Função quadrática

Unidade 6: Quadriláteros

Unidade 7: Noções básicas de estatística



Unidade 8: Semelhança de triângulos

Unidade 9: Cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Representar os números racionais na recta graduada.
- Operar com números racionais aplicando as propriedades.
- Calcular quadrados e raízes quadradas em $\mathbb{Q}$.
- Identificar os números irracionais.
- Relacionar os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.
- Representar os números reais na recta graduada.
- Calcular cubos e raízes cúbicas de números perfeitos.
- Calcular potências de expoente fraccionário numa raiz e vice-versa.
- Passar um factor para dentro e para fora do radical.
- Aplicar as propriedades de radicais.
- Calcular o valor de potência de uma raiz quadrada.
- Comparar radicais.
- Resolver expressões numéricas envolvendo radicais.
- Procurar estratégias adequadas à resolução de problemas com números reais, discutindo e confrontando [illegible]

CONTEÚDOS

- Conjunto dos números reais
  - a) Noção dos números racionais
  - Representação de números racionais na recta graduada
  - b) Adição, subtracção, multiplicação e divisão de números racionais
  - c) Cálculo de quadrados e raízes quadradas em $\mathbb{Q}$
- Cálculo de raízes quadradas e de quadrados não perfeitos usando algoritmo
- Noção de números irracionais
- Conjunto de números reais
- Relação entre conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$
- Representação de números reais na recta graduada

Radiciação

- Cálculo de cubos e raízes cúbicas de números perfeitos
- Potência de expoente fraccionário
- Passagem de um factor para dentro e para fora do radical
- Propriedades de radicais
- Potência de uma raiz quadrada
- Comparação de radicais
- Operações com radicais: adição e subtracção de radicais
- Multiplicação e divisão de radicais
- Expressões numéricas

Números reais. Radiciação

UNIDADE 1

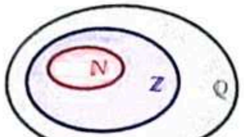
Págs. 6 a 31

Revisão dos números racionais

Um número que se pode representar por uma fracção é um número racional.

Assim, por exemplo, -10; -5; $+3{,}5$; 0; $-\frac{5}{6}$; $+\frac{7}{5}$ são números racionais.

O conjunto dos números racionais designa-se por $\mathbb{Q}$.



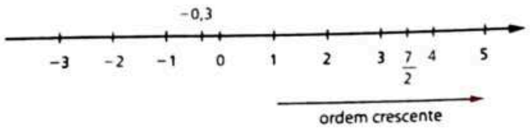
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

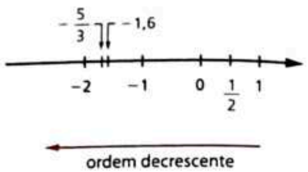
Entre dois números inteiros relativos que diferem de uma unidade, não existe nenhum elemento de $\mathbb{Z}$.

Entre dois elementos de $\mathbb{Q}$, por mais próximos que estejam, existe sempre outro elemento de $\mathbb{Q}$.

Representação na recta graduada

Os números racionais relativos podem ser representados numa recta.





- A origem tem abcissa zero que se representa: $O \smile 0$.
- O ponto A tem abcissa 1 que se representa: $A \smile 1$.
- O ponto B tem abcissa $-0{,}3$ que se representa: $B \smile -0{,}3$.
- O ponto C tem abcissa 3,5 que representa: $C \smile 7/2$.
- O ponto D tem abcissa -4 que representa: $D \smile -3$.

- Qualquer número positivo é maior que zero.
- Qualquer número negativo é menor que zero.
- De dois números positivos é maior o que estiver mais distante do zero, ou seja, o que tiver maior valor absoluto.
- De dois números negativos é maior o que estiver mais próximo do zero, ou seja, o que tiver menor valor absoluto.
- De dois números de sinais contrários, o número negativo é sempre o menor.

- $-2 < -0{,}3 < 0 < \frac{7}{2} < 4$, por ordem crescente.
- $\frac{1}{2} > -1{,}6 > -\frac{5}{3}$, por ordem decrescente.

Operações em $\mathbb{Q}$

Adição de números racionais

Para somar dois números racionais relativos com o mesmo sinal:

- Somam-se os valores absolutos das parcelas.
- Mantém-se o sinal.

$(+2) + (+5) = +7$
$(-3) + (-7) = -10$
$(-0{,}5) + (-4) = -4{,}5$

Para somar dois números racionais relativos de sinais contrários:

- Considerando os valores absolutos das parcelas, ao maior subtrai-se o menor.
- Dá-se o sinal do que tiver maior valor absoluto.
- A soma de dois números simétricos é zero.

$(+8) + (-6) = +2$
$(-9) + (+7) = -2$
$(-13{,}5) + (+3{,}5) = -10$
$(+8) + (-8) = 0$
$(-1{,}5) + (+1{,}5) = 0$

A adição de números racionais relativos goza das propriedades:

- Comutativa: $a + b = b + a$
- Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Existência de elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$
- Cada número tem simétrico: $a + (-a) = 0$

Adição sucessiva

- O recurso às propriedades da adição de números racionais no cálculo é muito importante, pois facilita o cálculo mental e escrito.
  Por exemplo, calcular, recorrendo às propriedades da adição:

$$\left(-\frac{7}{2}\right) + (+19) + \left(-\frac{3}{2}\right) + (-19) = \left(-\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + (+19) + (-19) = -5 + 0 = -5$$

- Na adição sucessiva, para simplificar a escrita, suprimem-se os sinais de adição e todos os parêntesis.
  Por exemplo,

$$\left(+\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ é o mesmo que } +\frac{3}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$$

Subtracção de números racionais

- Para subtrair dois números racionais relativos, adiciona-se ao aditivo o simétrico do subtractivo.

Exemplos:

$$\begin{aligned} -8 - (+3) &= -8 + (-3) = \\ &= -8 - 3 = \\ &= -11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7 - (-0{,}5) &= -7 + (+0{,}5) = \\ &= -7 + 0{,}5 = \\ &= -6{,}5 \end{aligned}$$

Adição algébrica

- Dois sinais diferentes seguidos dão origem a um sinal – .

Exemplos:

$+(-2) = -2 \qquad -(+0{,}5) = -0{,}5$

Dois sinais +, ou dois sinais –, dão origem a um sinal +.

Exemplos:

$+\left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{3} \qquad -\left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{3}{2}$

Regras dos sinais

$+(-\_\_) = -\_\_$
$-(+\_\_) = -\_\_$
$+(+\_\_) = +\_\_$
$-(-\_\_) = +\_\_$

Expressões numéricas

Numa expressão que envolva somas algébricas podes:

- Suprimir os parêntesis precedidos do sinal + e o sinal + que os precede sem alterar os termos da soma algébrica que se encontram dentro dos parêntesis.
- Suprimir os parêntesis precedidos do sinal – e o sinal – que os precede, substituindo cada termo da soma algébrica que se encontra dentro dos parêntesis pelo seu simétrico.

. Exemplos:

$+(-3+2) = -3+2 \qquad -(+9-7) = -9+7$

Multiplicação de números racionais

- O produto de dois números racionais com sinais contrários é um número negativo.
- O produto de dois números racionais com sinais iguais é um número positivo.
- O valor absoluto do produto de dois números racionais é igual ao produto dos seus valores absolutos.

Regras dos sinais

$(+\_\_) \times (-\_\_) = -\_\_$
$(-\_\_) \times (+\_\_) = -\_\_$
$(-\_\_) \times (-\_\_) = +\_\_$
$(+\_\_) \times (+\_\_) = +\_\_$

Propriedades da multiplicação

A multiplicação de números racionais goza das propriedades:

- Comutativa
- Associativa
- Existência de elemento neutro (1).
- Existência de elemento absorvente, (0).
- Distributiva relativamente à adição.
- Existência de número inverso (todos os números, excepto o zero).

Multiplicação sucessiva

- O valor de uma expressão com várias multiplicações pode obter-se multiplicando sucessivamente os factores pela ordem em que se encontram ou recorrendo às propriedades da multiplicação, facilitando os cálculos.

Exemplo:

$$(-0{,}25) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (+4) \times (-3) = (-0{,}25) \times (+4) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3) = -1 \times 1 = -1$$

Divisão de números racionais

- O quociente de dois números com sinais contrários é um número negativo.
- O quociente de dois números com sinais iguais é um número positivo.
- O valor absoluto do quociente é o quociente dos valores absolutos do dividendo e do divisor.
- O quociente de zero por um número diferente de zero é zero.
- Numa divisão, o divisor é sempre diferente de zero.

Regras dos sinais

$(+\_\_) : (-\_\_) = -\_\_$
$(-\_\_) : (+\_\_) = -\_\_$
$(-\_\_) : (-\_\_) = +\_\_$
$(+\_\_) : (+\_\_) = +\_\_$

Cálculo de expressões

No cálculo de uma expressão, deves:

- Observar a expressão atentamente.
- Respeitar as prioridades das operações.

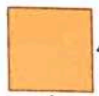
Exemplo:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

Quadrados e raiz quadrada de números racionais

Já deves conhecer o símbolo $\sqrt{\ }$, que se chama radical e serve para calcular a raiz quadrada.

Para calcularmos a área de um quadrado cujos lados medem 4 unidades, fazemos:



4

4

$A = 4^2 = 4 \times 4 = 16$

Para determinar o lado irás usar a raiz quadrada de 16. Obterás:

$\sqrt{16} = 4$ porque $4 \times 4 = 16$

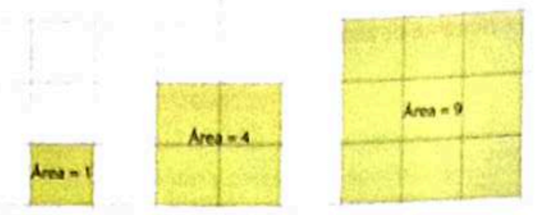
Em $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{\ }$ é o radical, 16 é o radicando e o resultado 4, é a raiz quadrada.

Da mesma forma obterás, por exemplo, $\sqrt{25} = 5$, pelo que os lados de um quadrado com 25 cm^2 de área medem 5 cm. De facto, $5^2 = 25$.

A raiz quadrada de um número *k* (não negativo) é o número *w* (também não negativo) que elevado a dois é igual a *k*. Se $\sqrt{k} = w$, então $k = w^2$.

De facto, dado um número k, existem dois números que satisfazem a condição $w^2 = k$. Por exemplo, para $k = 4$, $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$. Na definição de raiz quadrada consideramos só o valor positivo.

Exemplos



lado = $\sqrt{1} = 1$ lado = $\sqrt{4} = 2$ lado = $\sqrt{9} = 3$

Quadrados perfeitos

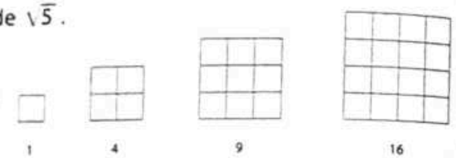
Quanto medem os lados de um quadrado cuja área é de 5 m^2?

Deverás ter concluído que não existe um número inteiro que seja solução para a questão que te colocámos.

A resolução do problema consiste no cálculo de $\sqrt{5}$.

Repara:

- $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$ (logo, $\sqrt{5}$ estará entre 2 e 3)
- $2{,}5^2 = 6{,}25$ (é maior do que 5)
- $2{,}2^2 = 4{,}84$ (é menor do que 5); $2{,}3^2 = 5{,}29$!



Quadrados perfeitos

De facto, não é possível representar o valor exacto de $\sqrt{5}$.

A raiz quadrada de um número natural nem sempre é um número natural.

Os números naturais cuja raiz quadrada é ainda um número natural designam-se por **quadrados perfeitos**.

Quando temos de calcular a raiz quadrada de um número natural que não seja um quadrado perfeito, fazemo-lo usando o algoritmo da raiz quadrada ou na máquina de calcular e apresentamos um valor aproximado.

Algoritmo da raiz quadrada

Um algoritmo é uma sequência de passos que nos permite obter uma solução para um problema.

Existe um processo, não tão simples, mas que permite calcular a raiz quadrada de um número qualquer, com a aproximação desejada.

Vamos apresentar este método através de alguns exemplos.

- Calculemos $\sqrt{1024}$.

1. Começas por dividir o número, da direita para a esquerda, em grupos de dois algarismos.	$\sqrt{10 \cdot 24}$
2. Determinas a raiz quadrada do maior quadrado perfeito não superior ao número formado pelo grupo da esquerda. No caso do nosso exemplo, esse número é 3. De seguida, determinas a diferença entre o número formado pelo grupo da esquerda e o quadrado perfeito. No nosso exemplo, $10 - 9 = 1$.	$\sqrt{10 \cdot 24}$ | 3 -9 1
3. À direita escreves o grupo seguinte de algarismos: 24. Debaixo do 3 escreves o seu dobro: 6.	$\sqrt{10 \cdot 24}$ | 3 -9 | 6 1 24
4. De 124, separas o algarismo da direita, 4, e divides o número à direita, 12, por 6, obtendo 2. Colocas este quociente à direita do 6 e multiplicas o número assim obtido, 62, pelo quociente, 2.	$\sqrt{10 \cdot 24}$ | 3 -9 | 62 12 4 | $\times 2$ | 124
5. Como o produto obtido é menor ou igual que o número que encontras à esquerda, efectuas a subtracção do segundo pelo primeiro. E aceitas 2 como sendo o segundo número da raiz quadrada.	$\sqrt{10 \cdot 24}$ | 32 -9 | 62 12 4 | $\times 2$ $-12\ 4$ | 124 0

Logo, $\sqrt{1024} = 32$.

· Calculemos $\sqrt{728}$.

1. Começas por dividir o número, da direita para a esquerda, em grupos de dois algarismos.	$\sqrt{7 \cdot 28}$
2. Determinas a raiz quadrada do maior quadrado perfeito não superior ao número formado pelo grupo da esquerda. De seguida, determinas a diferença entre o número formado pelo grupo da esquerda e o quadrado perfeito. No nosso exemplo, $7 - 4 = 3$.	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{7 \cdot 28} & 2 \\ -4 & \\ \hline 3 & \end{array}$
3. À direita escreves o grupo seguinte de algarismos: 28. Debaixo de 2 escreves o seu dobro: 4.	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{7 \cdot 28} & 2 \\ -4 & 4 \\ \hline 3\,28 & \end{array}$
4. De 328, separas o algarismo da direita, 8, e divides o número à direita, 32, por 4, obtendo 8. Colocas este quociente à direita do 4 e multiplicas o número assim obtido, 48, pelo quociente, 8.	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{7 \cdot 28} & 2 \\ -4 & 48 \\ \hline 32\ 8 & \times 8 \\ & \overline{384} \end{array}$
5. Como o produto obtido não é menor ou igual que o número que se encontra à esquerda, não efectuas a subtracção do segundo pelo primeiro. Tentas o 7. O produto continua a ser superior ao número da esquerda. Tentas o 6.	$\begin{array}{r\|l\|l} \sqrt{7 \cdot 28} & 2 & \\ -4 & \cancel{48} & \cancel{47} \\ \hline 32\ 8 & \cancel{\times 8} & \cancel{\times 7} \\ & \cancel{384} & \cancel{329} \end{array}$
6. Como o produto obtido é menor ou igual que o número que se encontra à esquerda, efectuas a subtracção do segundo pelo primeiro. E aceitas 6 como sendo o segundo número da raiz quadrada.	$\begin{array}{r\|l\|l\|l} \sqrt{7 \cdot 28} & 26 & & \\ -4 & \cancel{48} & \cancel{47} & 46 \\ \hline 32\ 8 & \cancel{\times 8} & \cancel{\times 7} & \times 6 \\ -276 & \cancel{384} & \cancel{329} & 276 \\ \hline 52 & & & \end{array}$
Logo, $\sqrt{728}$ aproximada por defeito às unidades, é 26.	

Vamos agora utilizar este método para calcular a raiz quadrada de 5, com valores aproximados por defeito a menos de 0,01.

Comecemos por verificar que:

- O quadrado de um número decimal tem sempre um número par de casas decimais.
- O número de casas decimais da raiz quadrada é metade do número de casas decimais do radicando.

Assim sendo, para que a aproximação seja a menos de uma centésima (0,01) o radicando terá de ter quatro casas decimais. Podemos, então, utilizar o método apresentado para calcular $\sqrt{5}$.

Exemplo

Calculemos $\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{r|l|l} \sqrt{5{,}00.00} & 2{,}23 & \\ -4 & 42 & 443 \\ \hline 100 & \times 2 & \times 3 \\ -84 & \overline{84} & \overline{1329} \\ \hline 1600 & & \\ -1329 & & \\ \hline 0{,}0271 & & \end{array}$$

Portanto, $\sqrt{5} \approx 2{,}23$

Observações

1.º – A raiz quadrada de um número inteiro terá tantos algarismos quantos forem os grupos no radicando.

2.º – Se depois de baixar um grupo e separar o último algarismo à direita, o número resultante à esquerda for menor do que o dobro da raiz, o algarismo que na raiz corresponde a esse grupo será zero; baixa-se o grupo seguinte e continua a operação. Exemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1.16.64} & 10 \\ -1 & 20 \\ \hline 01.6 & \end{array} \qquad 1 < 2 \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{1.16.64} & 108 \\ -1 & 208 \\ \hline 01.66.4 & \times 8 \\ -1\,66\,4 & \overline{1664} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Números reais

Recorda alguns conjuntos numéricos:

$\mathbb{N}$ = {números naturais} = {1, 2, 3, 4, ...}

$\mathbb{Z}$ = {números inteiros relativos} = {..., −2, −1, 0, 1, 2, ...}

$\mathbb{Q}$ = {números racionais} = $\mathbb{Z}$ ∪ {números fraccionários}

«∪» lê-se «reunião»

Sabes ainda que todo o número racional pode ser representado por uma fracção.

$$\frac{a}{b};\ a, b \text{ números inteiros com } b \neq 0$$

$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dividem-se, ainda, em subconjuntos:

$\mathbb{Z}^+$ = {1, 2, 3, 4, ...} $\qquad$ $\mathbb{Q}^+$ = {números racionais positivos}

$\mathbb{Z}_0^+$ = {0, 1, 2, 3, 4, ...} $\qquad$ $\mathbb{Q}_0^+$ = {números racionais não negativos}

$\mathbb{Z}^-$ = {..., −3, −2, −1} $\qquad$ $\mathbb{Q}^-$ = {números racionais negativos}

$\mathbb{Z}_0^-$ = {..., −3, −2, −1, 0} $\qquad$ $\mathbb{Q}_0^-$ = {números racionais não positivos}

Assim, é fácil estabelecer relações entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

«⊂» lê-se «está contido»

Dízimas

Observa como se representam alguns números na forma de dízima:

$\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6$	$\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}833\ldots$	$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ $\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots$ $\pi = 3{,}141592654\ldots$
O quociente de 3 por 5 é exacto; resto zero.	O quociente de 5 por 6 não é exacto (prolonga-se indefinidamente) e o algarismo 3 repete-se.	
0,6 é uma dízima finita.	0,833... = 0,8(3) é uma dízima infinita periódica, de período 3.	$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, = π são dízimas infinitas não periódicas.

O período de uma dízima infinita periódica pode ser formado por um ou mais algarismos que se repetem.

Como acabas de ver, existem dízimas finitas e infinitas.

As dízimas infinitas, tanto podem ter um período (um ou mais algarismos que se repetem), como as casas decimais podem aparecer sem qualquer regularidade.

• $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\qquad$ • $\frac{3248}{999} = 3{,}251251\ldots$; $\qquad$ • $\frac{4}{2} = 2$

são números que se representam por dízimas finitas ou infinitas periódicas, ou seja, números racionais.

• $\sqrt{2}$, = 1,4142135... ; $\qquad$ • $\sqrt{5} = 2{,}23607977\ldots$; $\qquad$ • $\pi = 3{,}141592654\ldots$

são números que geram dízimas infinitas não periódicas, ou seja números irracionais.

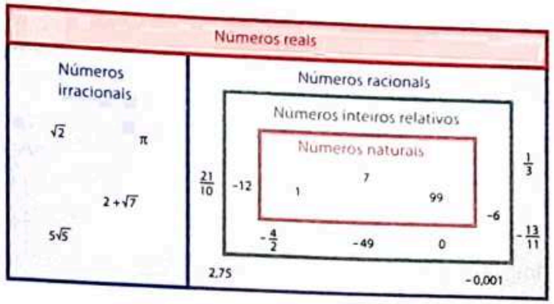
Uma dízima finita pode ser considerada como infinita de período zero.

• Números racionais: $-\frac{1}{5}$; $\frac{7}{3}$; − 2,8; 4; 0,1(6); ...

• Números irracionais: $-\sqrt{3}$; $5 + \sqrt{2}$; π; − 1,0030003...

Os números irracionais, como, por exemplo, $\sqrt{2}$ e π não pertencem a nenhum destes conjuntos. O conjunto dos números irracionais juntamente com o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, forma o conjunto dos números reais, que se designa por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{\text{números reais}\} = \mathbb{Q} \cup \{\text{números irracionais}\}$$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

São subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}^+$ = {números reais positivos} $\qquad$ $\mathbb{R}_0^+$ = {números reais não negativos}

$\mathbb{R}^-$ = {números reais negativos} $\qquad$ $\mathbb{R}_0^-$ = {números reais não positivos}

Exercícios resolvidos

Representar na forma de fracção 0,(6) e 1,(18).

Resolução:

$0{,}(6) = \frac{?}{?}$

$0{,}(6) = x$ → equação 1

×10 $\qquad$ ×10

$6{,}(6) = 10x$ → equação 2

Efectuando a diferença entre 2 e 1, vem:

$$\begin{array}{r} 10x = 6{,}(6) \\ -\ x = 0{,}(6) \\ \hline 9x = 6 \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$1{,}(18) = \frac{?}{?}$

$1{,}(18) = x$ → equação 1

× 100 $\qquad$ ×100

$118{,}(18) = 100x$ → equação 2

Efectuando a diferença entre 2 e 1, vem:

$$\begin{array}{r} 100x = 118{,}(18) \\ -\ x = 1{,}(18) \\ \hline 99x = 117 \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{117}{99} = \frac{13}{11}$$

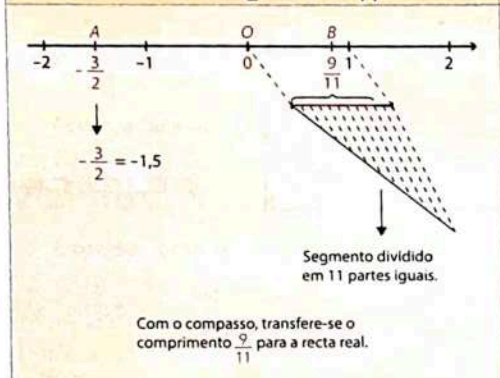
Recta real

Aprendeste a representar os números racionais numa recta orientada. Certamente concluíste que os números racionais não «esgotavam» os pontos da recta, ao serem nela representados. Ou seja, podes representar os números irracionais que acabaste de aprender nos pontos que «sobram».

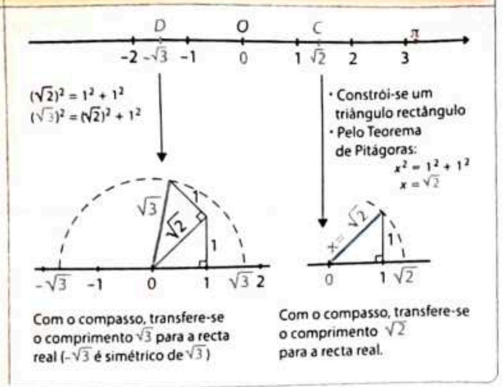
Chama-se recta real à recta onde representamos tanto os números racionais como os irracionais, isto é, onde representamos os números reais. Assim, na recta real, a cada ponto P corresponde um e um só número real x, que é a abcissa de P; reciprocamente, a cada número real x corresponde um e um só ponto P da recta, que é o ponto de abcissa x.

Vamos marcar alguns pontos na recta real:

A $\smile -\frac{3}{2}$ B $\smile -\frac{9}{11}$



C $\smile \sqrt{2}$ D $\smile -\sqrt{3}$



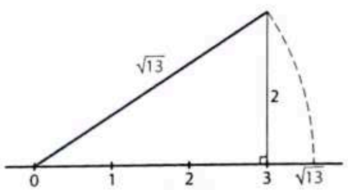
Atenção! Muitas vezes, para marcarmos números reais num eixo usamos valores aproximados. Para marcar, por exemplo, π, podemos tomar o valor aproximado 3,1.

Exercício resolvido

Marca na recta o ponto cuja abcissa é $\sqrt{13}$.

Resolução:

$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + 2^2$, pelo Teorema de Pitágoras



Exercícios de consolidação

1.a) Representa por uma dízima cada um dos números e classifica-a.

a.1) $\frac{7}{5}$ a.2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.3) $-\frac{17}{9}$ a.4) $\sqrt{0,64}$

a.5) $\frac{7}{12}$ a.6) $\frac{59}{6}$ a.7) $\frac{312}{310}$ a.8) $\frac{13}{7}$

b) Dos números anteriores indica quais são racionais e irracionais.

2. Representa na forma de fracção: 1,(2) e 3,(45).

3. Copia o quadro seguinte e, de acordo com o conjunto a que pertencem, coloca adequadamente os números:

- -103
- $\frac{42}{6}$
- $\sqrt{11}$
- 0
- $\sqrt{144}$
- $-\frac{28}{5}$
- 3π
- 0,125
- $-3,(2)$
- $-5,02002000200002...$

Números				
Naturais	Inteiros	Racionais	Irracionais	Reais

4. Copia e completa com os símbolos «∈» e «∉», de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $7,3 \ldots \mathbb{Q}$ b) $\frac{7}{3} \ldots \mathbb{R}$ c) $0,73 \ldots \mathbb{Z}$ d) $-\frac{8}{4} \ldots \mathbb{Z}^-$

e) $0 \ldots \mathbb{Q}_0^-$ f) $0 \ldots \mathbb{R}_0^+$ g) $-\frac{121}{11} \ldots \mathbb{Z}^-$ h) $\sqrt{49} \ldots \mathbb{N}$

i) $\sqrt{11} \ldots \mathbb{Q}$ j) $\pi \ldots$ {números irracionais} k) $\frac{\pi}{2} \ldots$ {números fraccionários}

l) $1 - \sqrt{5} \ldots \mathbb{R}^-$ m) $\frac{16}{4} \ldots \mathbb{Q}^+$ n) $0 \ldots \mathbb{R}^+$ o) $\sqrt{0,36} \ldots \mathbb{Q}$

p) $\sqrt{94} \ldots$ {números irracionais}

5. Verdadeiro ou falso?

A. $-\frac{4}{2} \in \mathbb{Z}$ B. $-\sqrt{3} \notin$ {números irracionais}

C. $\mathbb{Q} \cup$ {números irracionais} $= \mathbb{R}$ D. $0 \notin \mathbb{R}$

E. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}$ F. $-\frac{9}{3} \notin \mathbb{Z}$

G. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ H. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

6. A qual dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ pertence cada um dos números?

a) $1 - \sqrt{2}$ b) $\frac{20}{4}$ c) $-\frac{72}{9}$

d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) 1,70997594…

7. Copia e completa de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} =$ b) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} =$ c) $\mathbb{Q}_0 \cap \mathbb{R} =$

d) $\mathbb{Q} \cap$ {números irracionais} $=$ e) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{R} =$ f) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^- =$

g) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}_0^- =$ h) $\mathbb{Q} \cup$ {números irracionais} $=$

8. Indica a abcissa dos pontos A, B, C, D e E, assinalados na recta real e diz se o valor obtido é racional ou irracional.

9. a) Marca na recta real:

- A → $\sqrt{2}$
- B → $\frac{7}{5}$
- C → $-\frac{7}{2}$
- D → -3
- E → $-\frac{1}{3}$
- F → 1,25
- G → $5 - \sqrt{2}$
- H → $\sqrt{3}$

b) Coloca os valores por ordem crescente.

10. Calcula a raiz quadrada de:

a) 112 b) 2015 c) 14371 d) 872 e) 12769

11. Calcula:

a) 5^2 b) 12^2 c) 111^2 d) 25^2

12. Determina o perímetro de um quadrado, cuja área é 169 cm^2:

13. Calcula o valor aproximado às centésimas da diagonal de:

a) Um quadrado de 3 cm de lado.

b) Um rectângulo de 3 cm por 1 cm.

Radiciação

Raiz cúbica

Se calculares o volume de um cubo cujas arestas meçam, por exemplo, 3 dm, obterás:

$$V = 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

ou seja, o volume é igual a 27 dm^3.

Se consultares a tabela da página 224, verificas que a raiz cúbica de 27, é:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

A raiz cúbica de 27 é o número que elevado a três é igual a 27, ou seja, 3.

> A raiz cúbica de um número k é o número w que elevado a três é igual a k, ou seja:
> $\sqrt[3]{k} = w$ se e só se $k = w^3$

Em $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt{\ }$ é o radical; o 3 sobre o radical é o índice da raiz; 27 é o radicando e o resultado 3 é a raiz cúbica. Utiliza-se o índice 3 para distinguir a raiz cúbica da raiz quadrada, para a qual se omite o índice (escreve-se, simplesmente, $\sqrt{\ }$ em vez de $\sqrt[2]{\ }$).

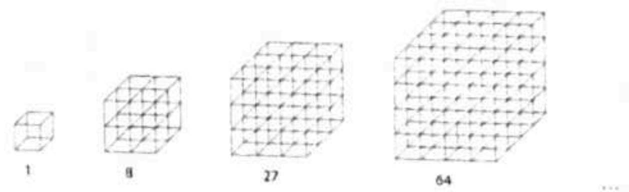
Repara que, ao contrário da raiz quadrada, é possível calcular a raiz cúbica de um número negativo. Por exemplo:

$\sqrt[3]{-8} = -2$ é equivalente a $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[3]{-3{,}375} = -1{,}5$ é equivalente a $(-1{,}5)^3 = -3{,}375$

Cubos perfeitos

Os números cuja raiz cúbica é um número natural designam-se por cubos perfeitos.

Exemplos



$$\sqrt[3]{1} = 1;\ \sqrt[3]{8} = 2;\ \sqrt[3]{27} = 3;\ \sqrt[3]{64} = 4$$

Por exemplo, se um cubo tem de volume 1 m^3, a sua aresta mede 1 m; se o cubo tem de volume 8 m^3, a sua aresta mede 2 m.

Para teres uma ideia da grandeza do número $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ tens de recorrer a valores aproximados. Podes recorrer a tabelas ou à calculadora.

Exercícios resolvidos

1. Calcula $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

Resolução:

$$\begin{array}{l} 1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3 \\ 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8 \\ \hline 2{,}9 < \sqrt[3]{2} + \sqrt{3} < 3{,}1 \end{array}$$

c.a.
$3{,}1 - 2{,}9 = 0{,}2$

2,9 é um valor aproximado, por defeito de $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, a menos de 0,2.

3,1 é um valor aproximado, por excesso de $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$, a menos de 0,2.

2. Calcule $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$

Resolução:

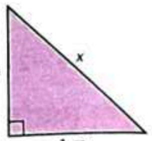
$$\begin{array}{l} 2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \\ 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\ \hline 3{,}1443 < \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} < 3{,}1808 \end{array}$$

c.a.
$3{,}1808 - 3{,}1443 = 0{,}0365$

3,1443 é um valor aproximado, por defeito de $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$, com um erro inferior a 0,0365.

3,1808 é um valor aproximado, por excesso de $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$ com um erro inferior a 0,0365.

3. Indicar um valor aproximado da quantidade de rede necessária para vedar um canteiro como o da figura.



Resolução:

- Pelo Teorema de Pitágoras, calculamos x:

$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x = \sqrt{2}$

- O valor exacto do perímetro é, em metros:

$P_{\triangle} = 1 + 1 + \sqrt{2} \quad = 2 + \sqrt{2}$

- Sabendo que $\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356...$, o valor aproximado do perímetro do triângulo será, em metros:

Se $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ então, $2 + 1{,}41 < 2 + \sqrt{2} < 2 + 1{,}42$

$3{,}41 < 2 + \sqrt{2} < 3{,}42$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{valor aproximado} \\ \text{por defeito}}}{3{,}41} < P_{\triangle} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valor aproximado} \\ \text{por excesso}}}{3{,}42}$$

Neste caso, o valor aproximado conveniente é 3,42 metros.

Potência de expoente fraccionário

O radical $\sqrt[n]{a^k}$ escreve-se como potência de expoente fraccionário

$$\boxed{\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}}$$

onde: a é um número real positivo e k e n são números naturais.

Exemplos

1. $7^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{7^5}$
2. $2^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{2^7}$
3. $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^3}$
4. $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$
5. $\sqrt[7]{4^5} = 4^{\frac{5}{7}}$
6. $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

As propriedades da potenciação até aqui conhecidas, mantêm-se válidas nas potências de expoente fraccionário.

Exemplos

1. $3^{\frac{3}{8}} \cdot 3^{\frac{2}{8}} = 3^{\frac{3}{8} + \frac{2}{8}} = 3^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{3^5}$
2. $3^{\frac{3}{8}} \div 3^{\frac{2}{8}} = 3^{\frac{3}{8} - \frac{2}{8}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$
3. $6^{\frac{3}{8}} \cdot 3^{\frac{3}{8}} = (6 \cdot 3)^{\frac{3}{8}} = 18^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{18^3}$
4. $6^{\frac{3}{8}} \div 3^{\frac{3}{8}} = (6 \div 3)^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{2^3}$
5. $6^{-\frac{3}{8}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{6}\right)^3}$
6. $\left(6^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}} = 6^{\frac{3}{16}} = \sqrt[16]{6^3}$

Exercícios resolvidos

1. Calcule: $\dfrac{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{-3}}{2^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

Resolução:

$$\frac{5^{\frac{1}{3}} \times 2^{-3}}{2^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 2^3} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{10}{3}}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{10}{3}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Passagem de factores para fora ou para dentro de um radical

Quando o expoente do radicando é maior ou igual ao índice, podemos passar para fora do radical, decompondo o radicando em factores e escrevê-lo como produto de potências com expoente igual ao índice tantas vezes quantas necessárias e em seguida, aplicar as propriedades da multiplicação de radicais e definição de raiz, então

$\sqrt[n]{a^k} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$; a é número real, n, q, k e r números naturais e $k = q \times n + r$

Exemplos

1. $\sqrt[7]{3^{12}} = \sqrt[7]{3^7 \cdot 3^5} = 3\sqrt[7]{3^5}$ visto que $12 > 7$ e $1 \cdot 7 + 5 = 12$
2. $\sqrt[3]{5^{14}} = 5^4\sqrt[3]{5^2}$ visto que $14 > 3$ e $4 \cdot 3 + 2 = 14$

Consequentemente, podemos passar um factor de fora para dentro do radical, elevando-o a um expoente igual ao índice da raiz, isto é:

$a \cdot \sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^r}$; a número real, n e r números naturais

Exemplos

1. $7\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 2}$
2. $2^3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{(2^3)^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{2^{15} \cdot 2} = \sqrt[5]{2^{16}}$
3. $a\sqrt{108} \cdot \sqrt[3]{72}$

   Para facilitar os cálculos podemos simplificar cada radical:

   $\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{3^2}$

   Então: $\sqrt{108} \cdot \sqrt[3]{72} = 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt[3]{3^2} = 12\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 12\sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = 12\sqrt[6]{3^7} = 12 \cdot 3\sqrt[6]{3} = 36\sqrt[6]{3}$

Propriedades dos radicais

Observa:

$(\sqrt{3})^2 = 3$ porque $(\sqrt{3})^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1 = 3$

$(\sqrt{2})^2 = 2$ porque $(\sqrt{2})^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$

$(\sqrt{a})^2 = a$ porque $(\sqrt{a})^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$

O quadrado de uma raiz quadrada é igual ao seu radicando

$(\sqrt{a})^2 = a$

onde a é um número real positivo ou nulo.

Potência de uma raiz

Partindo da definição da potência, teremos que:

$$(\sqrt[n]{a})^p = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{p \text{ factores}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{p \text{ factores}}} = \sqrt[n]{a^p}$$

portanto:

$(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ com $a > 0, n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Q}$

Exemplos

1. $(\sqrt[7]{3})^5 = \sqrt[7]{3^5}$
2. $(\sqrt[5]{5^4})^7 = \sqrt[5]{5^{28}} = \sqrt[5]{5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 5^5 \times 5^3} = 5^5\sqrt[5]{5^3}$
3. $(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5\sqrt[3]{5}$
4. $\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^5 = \sqrt{\frac{8^5}{3^5}} = \sqrt{\frac{(2^3)^5}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3}} = \frac{2^7}{3^2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

Raiz de uma raiz

Aplicando as potências de expoente fraccionário podemos ter:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{b}} = (\sqrt[p]{b})^{\frac{1}{n}} = \left(b^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{pn}} = \sqrt[pn]{b}$$

portanto:

$\sqrt[n]{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[pn]{b}$ com $b > 0, n, p \in \mathbb{N}$

Exemplos

1. $\sqrt[3]{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[3 \cdot 7]{5} = \sqrt[21]{5}$
2. $\sqrt[5]{3\sqrt[7]{3}} = \sqrt[5]{\sqrt[7]{3^7 \cdot 3}} = \sqrt[5 \cdot 7]{3^8} = \sqrt[35]{3^8}$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{5\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{2})^3}{\sqrt{125} - 2\sqrt{45}} = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 5}} \cdot \sqrt{2^3}}{\sqrt{5^3} - 2\sqrt{3^2 \cdot 5}} = \dfrac{\sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt{2^3}}{5\sqrt{5} - 6\sqrt{5}} =$

   $= \dfrac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2^3}}{-\sqrt{5}} = -\sqrt{2^3} = -2\sqrt{2}$

Comparação de radicais

Para comparar radicais com o mesmo índice basta comparar os seus radicandos.

Exemplos

1. $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ porque $5 > 3$
2. $\sqrt[5]{17} > \sqrt[5]{13}$ porque $17 > 13$

Se os radicais têm índices diferentes, primeiro reduzem-se os radicais ao mesmo índice e depois comparam-se os radicandos.

Exercícios resolvidos

1. Compara os radicais $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{6}$

Resolução:

$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$ m.m.c.(2,3) = 6

$\sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{36}$ Logo $\sqrt{3} < \sqrt[3]{6}$

2. Compara os radicais $\sqrt[3]{4}$ e $\sqrt[4]{5}$

Resolução:

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$ m.m.c.(3,4) = 12

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ Logo $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5}$

Adição e subtracção de radicais

Radicais semelhantes são aqueles que apenas diferem nos coeficientes.

Exemplos

1. $5\sqrt{3}$ e $-8\sqrt{3}$
2. $\sqrt[3]{16}$ e $6\sqrt[3]{2}$ visto que $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

A adição e subtracção de radicais consiste em reduzir os radicais semelhantes.

Exemplos

1. $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = (5 + 8)\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$
2. $\sqrt{8} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2^3} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (1 - 6)\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$
3. $\sqrt[5]{a^{12}b^{15}} + \sqrt[5]{a} = a^2b^3\sqrt[5]{a^2} + \sqrt[5]{a} = a^2b^3\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{a} = (a^2b^3 + 1)\sqrt[5]{a}$
4. $\sqrt{1000} - (3\sqrt{10} - 1)^2 - \sqrt[4]{100} = 10\sqrt{10} - (9\cdot 10 - 6\sqrt{10} + 1) - \sqrt[4]{10^2} =$
$= 10\sqrt{10} - (91 - 6\sqrt{10}) - \sqrt{10} =$
$= 10\sqrt{10} - 91 + 6\sqrt{10} - \sqrt{10} = 15\sqrt{10} - 91$

Multiplicação e divisão de radicais

O produto de radicais com o mesmo índice é um radical do mesmo índice, cujo radicando é o produto dos radicais, isto é:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \text{ com } a > 0, b > 0, n \in N$$

O quociente de radicais com o mesmo índice é igual a um radical do mesmo índice, cujo radicando é o quociente dos radicais, isto é:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ com } a > 0, b > 0, n \in N$$

Exemplos

1. $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3\cdot 5} = \sqrt[4]{15}$
2. $\sqrt[4]{18} \div \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18 \div 2} = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

A multiplicação e a divisão de radicais com índices diferentes efectua-se do seguinte modo: primeiro reduzem-se os radicais ao mesmo índice e, de seguida efectuam-se as operações de multiplicação ou divisão, dos radicais de índice comum.

Exemplos

1. $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{3^3}\cdot\sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{3^3\cdot 2^4} = \sqrt[12]{27\cdot 16} = \sqrt[12]{432}$
2. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} \div \sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{2^6}\cdot\sqrt[12]{3^4} \div \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{\frac{2^6\cdot 3^4}{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^6\cdot 3^4}{2^6}} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

Simplificação de radicais

Se multiplicarmos ou dividirmos o índice de um radical e o expoente do radicando pelo mesmo número natural, diferente de zero, o valor do radical não se altera. Isto é:

$$\sqrt[n]{b^q} = \sqrt[n \cdot r]{b^{r \cdot q}};\ r, n \in \mathbb{N}, b > 0, q \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

1. $\sqrt{3^5} = \sqrt[2\cdot 2]{3^{5\cdot 2}} = \sqrt[4]{3^{10}}$
2. $\sqrt[8]{6^4} = \sqrt[8 \div 4]{6^{4 \div 4}} = \sqrt{6}$

Racionalização de denominadores

Racionalizar o denominador de uma fracção, significa transformar a fracção noutra equivalente, com o denominador sem radicais.

- Se o denominador é da forma $\sqrt{a}$ então, multiplica-se o numerador e o denominador pelo factor $\sqrt{a}$.
- Se o denominador é da forma $\sqrt[n]{a^p}$ então, multiplica-se o numerador e o denominador pelo factor $\sqrt[n]{a^{p-m}}$.
- Se o denominador é da forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ então, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$, para se obter um produto equivalente a uma diferença de quadrados no denominador.

Exemplos

1. $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$; o factor é $\sqrt{3}$.

2. $\frac{14}{\sqrt[3]{7}} = \frac{14 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{14\sqrt[3]{49}}{7} = 2\sqrt[3]{49}$; o factor é $\sqrt[3]{7^2}$

3. $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{4 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{7 - 3} =$

   $= \sqrt{7} + \sqrt{3}$; o conjugado é $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.

4. $\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(3 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{3^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{9 - 6\sqrt{2} + 2}{9 - 2} = \frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}$;

O conjugado é $3 - \sqrt{2}$.

14. Determina:

a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{-36}$ c) $\sqrt[3]{125}$

15. Calcula:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{32}$ b) $\sqrt{200} \div \sqrt{10}$ c) $\frac{4 \div \sqrt{3}}{\sqrt{12}}$

16. Determina:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[4]{256}$

17. Escreve na forma de radical as seguintes potências:

a) $125^{\frac{1}{2}}$ b) $0,7^{\frac{1}{5}}$ c) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{5}}$ d) $12^{\frac{13}{4}}$ e) $625^{0.25}$

18. Efectua e simplifica:

a) $\left(\frac{27}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \div 5^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{2^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}} \div 4^{\frac{1}{3}}}$

19. Efectua e simplifica o resultado:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ b) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} \div \sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt{39} \cdot \sqrt[7]{343} \div \sqrt[7]{7^{-2}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{6}}$

20. Simplifica os seguintes radicais:

a) $\sqrt[12]{3^8}$ b) $\sqrt[8]{2401}$ c) $\sqrt[24]{6561}$

21. Compara os seguintes radicais:

a) $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ b) $\sqrt[5]{0,2}$ e $\sqrt[5]{0,25}$

22. Simplifica os radicais:

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt[3]{81}$ c) $\sqrt[5]{\frac{64x^{11}}{y^7}}$

23. Efectua e simplifica:

a) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ c) $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$

24. Efectua e simplifica:

a) $(\sqrt{2})^6$ b) $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt[4]{27}}}$ c) $(\sqrt[5]{32a^3b^2})^2$

25. Efectua e simplifica:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ b) $(\sqrt[3]{2a^2})^3$ c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

26. Racionaliza o denominador de cada uma das seguintes fracções:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{16}{\sqrt{32}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ e) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

1. O décimo segundo algarismo, a seguir à vírgula, da dízima que representa $\frac{10}{7}$ é:

A. 1 B. 4 C. 5 D. 8

2. $1 + \pi$ é elemento de:

A. $\mathbb{Q}$ B. $\mathbb{N}$ C. $\mathbb{Z}$ D. $\mathbb{R}$

3. Qual das afirmações é falsa?

A. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ B. $\mathbb{Z}^{+} = \mathbb{N}$ C. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ D. $\{\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{R}$

4. O ponto A tem de abcissa:

A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 2 D. -1

5. O valor exacto de $-2\sqrt{2} + \sqrt{2}$ é:

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{4}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2}$

6. $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 6^{\frac{1}{2}}}{\left(5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}}$ é igual a:

A. $-\frac{1}{6}$ B. 30 C. $\left(\frac{5}{6}\right)$ D. $\left(\frac{6}{5}\right)$ E. $\left(\frac{32}{25}\right)$

7. $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ é igual a:

A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt[4]{5}$ C. $\sqrt{25}$ D. $2\sqrt{5}$

8. $\sqrt{20} - \sqrt{5}$ é igual a:

A. $\sqrt{15}$ B. $\sqrt[4]{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $-\sqrt{5}$

2.ª Parte

1. Verdadeiro ou falso?

A. $1{,}5 \in \mathbb{Q}$

B. $\sqrt{2} \notin$ (números irracionais)

C. $0 \notin \mathbb{R}^{+}$

D. 1, (88) é uma dízima infinita periódica

2. Calcula $\sqrt{1020}$.

3. Determina $(-0{,}125)^{\frac{1}{3}}$:

4. Sejam $a = 225$ e $b = 400$. Determina $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5. Sejam $a = 225$ e $b = 400$. Determina $\sqrt{a + b}$.

6. Calcula $\sqrt[3]{27b^4} + b\sqrt[3]{8b} - 0{,}6b^{-1}\sqrt[3]{125b^7}$.

7. Determina o valor exacto da área de um triângulo rectângulo, cujos catetos são: $3\sqrt{5}$ cm e $4\sqrt{5}$ cm.

8. Determina o valor exacto da área de um quadrado que tenha de lado $(3 + \sqrt{3})$ cm.

Inequações e sistemas de inequações lineares com uma variável

UNIDADE 2

Págs. 32 a 47

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Representar intervalos numéricos na recta graduada.
- Determinar a reunião e a intersecção dos intervalos numéricos.
- Reconhecer uma inequação linear.
- Resolver inequações lineares de forma analítica.
- Representar a solução na recta graduada.
- Resolver inequações lineares na forma geométrica.
- Reconhecer um sistema de inequações lineares.
- Resolver analiticamente os sistemas de inequações lineares.
- Resolver problemas conducentes a uma inequação linear.
- Resolver sistema de inequações lineares com uma variável.

CONTEÚDOS

Inequações

- Intervalos numéricos limitados e ilimitados
- Reunião e intersecção de intervalos numéricos
- Noção de inequação linear
- Resolução analítica e geométrica de inequações lineares

Sistema de inequações

- Noção de sistema de inequações lineares com uma variável
- Resolução de sistema de inequações lineares com uma variável

Intervalos de números reais

Como representar, em extensão e em compreensão, o conjunto dos números naturais maiores que 1 e menores que 5?

Se $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, então:

- $\{2, 3, 4\}$ → Representação em extensão
- $\{x \in \mathbb{N}: 1 < x < 5\}$ → Representação em compreensão

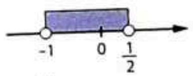
Como representar em extensão e em compreensão o conjunto dos números naturais maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 5?

- $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ → Representação em extensão
- $\{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 5\}$ → Representação em compreensão

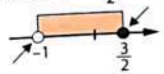
Quantos números reais há maiores que −1 e menores que $\frac{1}{2}$?

É evidente que há uma infinidade de números reais nestas condições. Logo, **não é possível** representar este conjunto em extensão.

Vejamos três outras **formas diferentes** de representar este conjunto:

- $\left\{x \in \mathbb{R}: -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$ → Representação em intervalo

Indica que x pode ser $\frac{3}{2}$.

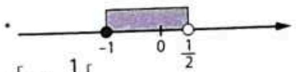


Indica que x não pode ser −1 ou seja, $\left]-1; \frac{3}{2}\right]$

Os parêntesis rectos voltados para fora indicam **intervalo aberto** nos dois extremos, o que significa que −1 e $\frac{1}{2}$ não pertencem a este conjunto.

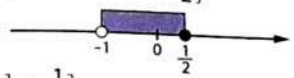
Exemplos

1. Representações do conjunto de números reais maiores ou iguais a −1 e menores que $\frac{1}{2}$:

- $\left\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x < \frac{1}{2}\right\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $\left[-1, \frac{1}{2}\right[$ → Representação em intervalo

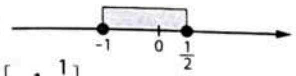
Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, para indicar, respectivamente, que −1 é elemento deste conjunto e $\frac{1}{2}$ não é.

2. Representações do conjunto de números reais maiores que −1 e menores ou iguais a $\frac{1}{2}$:

- $\left\{x \in \mathbb{R}: -1 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $\left]-1, \frac{1}{2}\right]$ → Representação em intervalo

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, para indicar, respectivamente, que −1 não pertence a este conjunto e $\frac{1}{2}$ pertence.

3. Representações do conjunto de números reais maiores ou iguais a −1 e menores ou iguais a $\frac{1}{2}$:

- $\left\{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ → Representação em intervalo

Intervalo fechado à esquerda e à direita para indicar que −1 e $\frac{1}{2}$ pertencem ao conjunto.

4. Representações do conjunto de todos os números reais maiores que −1,5:

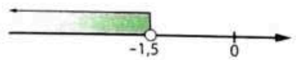
- $\{x \in \mathbb{R}: x > -1{,}5\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica

«+∞» lê-se «mais infinito»; este símbolo indica que o intervalo é ilimitado à direita.

Neste caso, a representação geométrica é uma semi-recta, ou seja, se pensares num número real, por maior que ele seja, há sempre outro à sua direita, que pertence a este conjunto.

- $]-1{,}5; +\infty[$ → Representação em intervalo

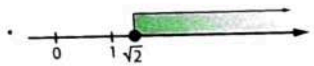
5. Representações do conjunto de todos os números reais menores que −1,5:

- $\{x \in \mathbb{R}: x < -1{,}5\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $]-\infty; -1{,}5[$ → Representação em intervalo

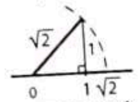
«−∞» lê-se «menos infinito»; este símbolo indica que o intervalo é ilimitado à esquerda.

Neste caso, a representação geométrica é uma semi-recta, ou seja, se pensares num número real, por menor que ele seja, há sempre outro à sua esquerda, que pertence a este conjunto.

6. Representações do conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a $\sqrt{2}$:

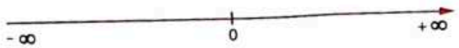
- $\{x \in \mathbb{R}: x \geq \sqrt{2}\}$ → Representação em compreensão
-  → Representação geométrica
- $[\sqrt{2}; +\infty[$ → Representação em intervalo

Marcação de $\sqrt{2}$:



Com o compasso transfere-se $\sqrt{2}$ para a recta real.

Note-se que o conjunto de todos os números reais, $\mathbb{R}$, pode representar-se pelo intervalo $]-\infty, +\infty[$ ou pela recta:



$-\infty$ e $+\infty$ não são números reais.

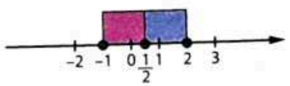
Intersecção e reunião de intervalos

Vais aprender a fazer as operações de intersecção e reunião de conjuntos, representados em forma de intervalo.

Dados dois conjuntos, A e B, o conjunto intersecção de A com B, $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos comuns a A e B.

Exemplos

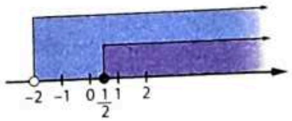
1. Determinar $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right]$



logo,

$\left[-1, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. Determinar $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-2, +\infty\right[$



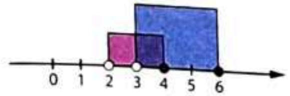
logo,

$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \left]-2, +\infty\right[= \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Dados dois conjuntos, A e B, o conjunto reunião de A com B, $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem pelo menos a um destes conjuntos.

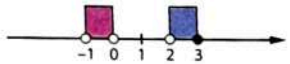
Exemplos

1. Determinar $]2, 4] \cup]3, 6]$:



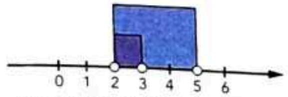
logo, $]2, 4] \cup]3, 6] =]2, 6]$

2. Determinar $]-1, 0[\cup]2, 3]$:



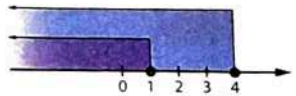
logo, $]-1, 0[\cup]2, 3] =]-1, 0[\cup]2, 3]$

3. Determinar $]2, 3[\cup]2, 5[$



logo, $]2, 3[\cup]2, 5[=]2, 5[$

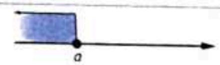
4. Determinar $]-\infty, 1] \cup]-\infty, 4]$



logo, $]-\infty, 1] \cup]-\infty, 4] =]-\infty, 4]$

Representação de subconjuntos de números reais

Sejam a e b números reais, sendo $a < b$.

Em compreensão	Geométrica	Em intervalo
$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq a\}$		$[a, b]$ – limitado, fechado em a e b.
$\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$		$]a, b[$ – limitado, aberto em a e b.
$\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$		$[a, b[$ – limitado, fechado em a, aberto em b.
$\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$		$]a, b]$ – limitado, aberto em a, fechado em b.
$\{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$		$[a, +\infty[$ – ilimitado, fechado em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x > a\}$		$]a, +\infty[$ – ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x < a\}$		$]-\infty, a[$ – ilimitado, aberto em a.
$\{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}$		$]-\infty, a]$ – ilimitado, fechado em a.

- $A \cap B$ – conjunto formado pelos elementos comuns ao conjunto A e ao conjunto B.
- $A \cup B$ – conjunto formado pelos elementos que pertencem pelo menos a um destes conjuntos.

Exercícios resolvidos

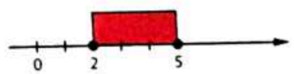
Representar, de três modos diferentes:

a) O conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 5.

Resolução:

- $[2, 5]$ → Em intervalo fechado.
- $\{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 5\}$ → Em compreensão, usando condições.

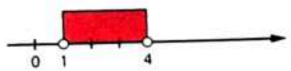
O que é o mesmo que $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 2 \wedge x \leq 5\}$.

- 

→ Geometricamente (a vermelho na figura)

b) O conjunto de todos os números reais superiores a 1 e inferiores a 4.

Resolução:

- $]1, 4[$ → Em intervalo aberto.
- $\{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 4\}$ → Em compreensão, usando uma condição.
- 

→ Geometricamente (a vermelho na figura).

c) O conjunto de todos os números reais inferiores a 5.

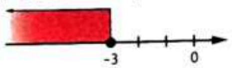
Resolução:

- $]-\infty, 5[$ → Em intervalo aberto.
- $\{x \in \mathbb{R}: x < 5\}$ → Em compreensão, usando a condição $x < 5$.
- 

→ Geometricamente (a vermelho na figura)

d) O conjunto dos números reais não superiores a -3.

Resolução:

- $]-\infty, -3]$ → Em intervalo fechado à direita.
- $\{x \in \mathbb{R}: x \leq -3\}$ → Em compreensão, usando a condição $x \leq -3$.
- 

→ Geometricamente (a vermelho na figura)

Resolução de inequações do 1.º grau

Inequação é toda a desigualdade literal que é apenas satisfeita por certos valores, as letras ou incógnitas que nela figuram. Por outras palavras, apresentam os sinais de maior (>), maior ou igual (≥), menor (<), ou menor ou igual (≤).

Soluções ou raízes de uma inequação são os valores das incógnitas ou letras que satisfazem a inequação, ou seja que a transformam numa desigualdade numérica, verdadeira.

Problema:

Quais são os números cujo triplo não é superior à soma de 1 com o próprio número?

«Não superior a...» é ser «menor ou igual a...».

Este problema traduz-se pela condição:

$3x \leq 1 + x$ → inequação do 1.º grau com uma incógnita

Resolver uma inequação do 1.º grau com uma incógnita é determinar o conjunto de todos os valores da incógnita que transformam a inequação numa desigualdade verdadeira.

O conjunto dos valores encontrados é o **conjunto solução** da inequação.

A linguagem utilizada nas inequações é muito semelhante àquela que utilizaste quando estudaste as equações.

Incógnita
↓
$3x \leq 1 + x$
1.º membro   2.º membro

$3x$ → termo do 1.º membro
$1, x$ → termos do 2.º membro

Para resolver uma inequação, tens de isolar a incógnita num dos membros da inequação, como fazias nas equações, tendo sempre presente as propriedades já estudadas:

- **Propriedade 1:** quando se adiciona (ou subtrai) o mesmo número aos dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade mantém-se.
- **Propriedade 2:** quando se multiplica (ou divide) por um mesmo número positivo os dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade mantém-se.
- **Propriedade 3:** quando se multiplica (ou divide) por um mesmo número negativo os dois membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade passa ao sentido inverso.

Vamos, então, resolver a inequação: $3x \leq 1 + x$

$3x - x \leq 1 \Leftrightarrow$

Isolam-se os termos com incógnita num dos membros, passando-se os termos sem incógnita para o outro membro, com troca de sinal.

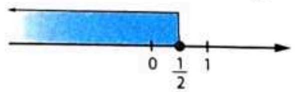
$\Leftrightarrow 2x \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Reduzem-se os termos semelhantes.
Dividem-se ambos os membros por 2.
O sentido da inequação mantém-se.

Os números menores ou iguais que $\frac{1}{2}$ são soluções da inequação dada, isto é:



ou $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Outro exemplo:

- **Resolver a inequação:** $-\frac{3}{2}(x+1) \leq 5x+5$

$-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \leq 5x + 5 \Leftrightarrow$ Usa-se a propriedade distributiva da multiplicação para fazer desaparecer os parêntesis.

$\Leftrightarrow -3x - 3 \leq 10x + 10$ Multiplicam-se ambos os membros da inequação por 2, para fazer desaparecer os denominadores.

$\Leftrightarrow -3x - 10x \leq 3 + 10$
$\Leftrightarrow -13x \leq 13$ Isolam-se os termos com incógnita num dos membros e reduzem-se os termos semelhantes.

$\Leftrightarrow x \geq -1$ Dividem-se ambos os membros pelo número negativo -13 e inverte-se o sentido da inequação.

Conjunto solução da inequação: $[-1, +\infty[$

Duas inequações com o mesmo conjunto de soluções são equivalentes.

Exercícios resolvidos

1. Sem resolver a inequação, $-2x + 4 > 0$ averiguar se -8 é solução da inequação:

Resolução:

Se $x = -8$ vem $-2 \times (-8) + 4 > 0$
$\Leftrightarrow 16 + 4 > 0$
$\Leftrightarrow 20 > 0$ Verdadeira, -8 é solução da inequação.

2. Resolver a inequação $-5x \leq 6$. Apresentar, geometricamente e em forma de intervalo de números reais, o conjunto solução.

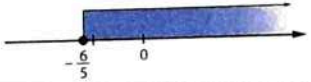
Resolução:

$5x \geq -6 \Leftrightarrow$ Multiplicam-se ambos os membros por -1 e inverte-se o sentido da inequação.

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{5}$ Dividem-se ambos os membros por 5 e mantém-se o sentido da inequação, pois 5 é positivo.

Conjunto solução:

Geometricamente:



Em forma de intervalo:

$\left[-\frac{6}{5}, +\infty\right[$

3. Resolver a inequação $5x - 4 < 2(x + 1{,}5)$. Apresentar, geometricamente e em forma de intervalo de números reais, o conjunto solução.

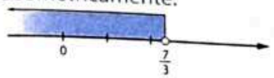
Resolução:

$5x - 4 < 2x + 3 \Leftrightarrow$ Usa-se a propriedade distributiva para desembaraçar de parêntesis.
$\Leftrightarrow 5x - 2x < 4 + 3$
$\Leftrightarrow 3x < 7$ Isolam-se os termos com incógnita num dos membros e reduzem-se os termos semelhantes.

$\Leftrightarrow x < \frac{7}{3}$ Dividem-se ambos os membros por 3 e mantém-se o sentido da inequação.

Conjunto solução:

Geometricamente:



Em forma de intervalo:

$\left]-\infty, \frac{7}{3}\right[$

4. Resolver a inequação $\frac{x-4}{3} > \frac{1-3x}{2}$. Apresentar, geometricamente e em forma de intervalo de números reais, o conjunto solução.

Resolução:

$\Leftrightarrow \frac{2(x-4)}{6} > \frac{3(1-3x)}{6}$ Reduzem-se ambos os membros da inequação ao mesmo denominador (6).

$\Leftrightarrow 2(x-4) > 3(1-3x)$ Aplica-se a propriedade distributiva.

$\Leftrightarrow 2x - 8 > 3 - 9x$
$\Leftrightarrow 11x > 11$ Isolam-se os termos com incógnita num dos membros e reduzem-se os termos semelhantes.

$\Leftrightarrow x > 1$ Dividem-se ambos os membros por 11 e mantém-se o sentido da inequação.

Conjunto solução:

Geometricamente:

Em forma de intervalo:

$]1, +\infty[$

5. Uma piscina tem duas tarifas de entrada:

- **Tarifa 1: 20 MT por entrada.**
- **Tarifa 2: assinatura de 100 MT, mais 5 MT por cada entrada.**

A partir de quantas entradas é vantajoso usar a tarifa 2?

Resolução:

- Escolher a incógnita: x é o número de entradas.
- Traduzir o problema por uma inequação: Com a tarifa 1, paga-se por x entradas: $20x$
  Com a tarifa 2, paga-se por x entradas: $100 + 5x$
- Resolver a inequação: A tarifa 2 é mais vantajosa quando:
  $100 + 5x < 20x \Leftrightarrow 100 < 20x - 5x \Leftrightarrow 100 < 15x \Leftrightarrow x > 6{,}(6)$.
- Interpretar o resultado: O número de entradas é o número inteiro, logo, o número inteiro superior a 6,(6) é 7.

A tarifa 2 é mais vantajosa se se for à piscina pelo menos 7 vezes.

1. Representa, geometricamente, e em forma de intervalo:

a) $\{x \in \mathbb{R}^-: x > -2\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R}_0^+: x \leq \frac{1}{2}\right\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}^+: x \leq 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}_0^-: x > -1\}$ e) $\{x \in \mathbb{R}^+: x < \sqrt{3}\}$ f) $\{x \in \mathbb{R}^-: x \geq -3\}$

2. Representa na forma de intervalo as representações seguintes:

a) $\{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x < 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}: x < 3\}$

3. Averigua se -4, 0 e 2 são soluções de cada uma das inequações:

a) $9x - 7 \leq 13$ b) $3x + 11 > 5x$ c) $3x + 2 > x$

4. **Verdadeiro ou falso?**

As soluções da inequação $x - 6 > -5$ são:

A. $x = 1$ B. $x > 1$ C. $x < 0$ D. $-1 < x$

5. Resolve as inequações, apresenta geometricamente, e em forma de intervalo de números reais, o conjunto solução:

a) $4x > 2$ b) $-x \geq x$ c) $-8x < -24$

6. Resolve as inequações e indica a solução, quando existir, na forma geométrica e em intervalo:

a) $x + 3 > -2$ b) $-x + 1 > 5$ c) $x - 5 < 1$ d) $4x + 0{,}25 \leq 0$

7. Resolve as inequações:

a) $-\frac{2x}{5} \leq 1$ b) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x < 5$ c) $3x - \frac{3}{4}x \geq 9$

8. Resolve as inequações, apresenta geometricamente, e em forma de intervalo, o conjunto solução:

a) $3^0 + \frac{x+1}{2} \leq -\frac{3x+1}{4}$ b) $-x + \frac{1}{2} \leq x - 4$

c) $\frac{x+1}{-2} \leq 3x$ d) $1{,}5(x + 1) \leq -\frac{1}{3}(x + 2)$

9. Escreve uma inequação equivalente a cada uma das inequações dadas:

a) $6x - 3 > 8$ b) $\frac{4}{7}x \leq 1$ c) $3x + 9 < 4x - 3$

10. Determina o maior número inteiro que verifica cada inequação.

a) $2(2n + 1) \leq -5$ b) $4(1 - n) \geq 15$ c) $n - 7n > 4$

Conjunção de condições

$\cdot\, x < 5$ $\quad\cdot\, x + 3 = 2$

São exemplos de condições, uma vez que, para determinados valores da variável transformam-se em afirmações verdadeiras ou falsas.

Problema:

Determinar x, de modo que a área do rectângulo seja inferior a 60 cm^2.

(16 – 2x) cm

10 cm

Resolução:

A área do rectângulo é inferior a 60 cm^2. $\rightarrow 10(16 - 2x) < 60$

As medidas dos lados de um rectângulo têm de ser positivas. $\rightarrow 16 - 2x > 0$

Para resolver o problema proposto, temos de procurar as soluções comuns às duas inequações, isto é, temos de resolver o sistema formado pelas duas inequações. Também podemos dizer que temos de resolver a conjunção de condições:

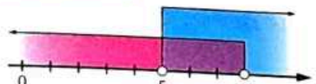
$$
\begin{array}{ccc}
10(16 - 2x) < 60 & \wedge & 16 - 2x > 0 \\
160 - 20x < 60 & \wedge & -2x > -16 \\
-20x < -100 & \wedge & 2x < 16 \\
x > 5 & \wedge & x < 8 \\
]5; +\infty[& \cap &]-\infty; 8[
\end{array}
$$

«∧» lê-se «e».

Vamos representar os conjuntos solução das duas inequações na mesma recta e procurar as soluções comuns às duas inequações, isto é, determinar o conjunto intersecção dos conjuntos soluções das duas inequações.

À conjunção, ∧, de condições corresponde a intersecção, ∩, de conjuntos.

Graficamente:



Em intervalo:

$]5; +\infty[\cap]-\infty; 8[=]5, 8[$, ou seja, o valor de x deve ser superior a 5 e inferior a 8 cm.

Exemplos

1 • Resolver a conjunção de condições: $x + 1 \leq 2 \;\wedge\; -3x \geq -1$

$$
\begin{array}{ccc}
x + 1 \leq 2 & \wedge & -3x \geq -1 \\
x \leq 1 & \wedge & +3x \leq 1 \\
x \leq 1 & \wedge & x \leq \frac{1}{3}
\end{array}
$$

$]-\infty, 1] \cap \left]-\infty, \frac{1}{3}\right] = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$

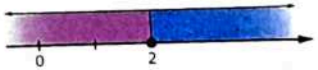
2 • Resolver a conjunção de condições: $2x \leq 1 \ \wedge \ x \geq 3$

$2x \leq 1 \quad \wedge \quad x \geq 3$

$x \leq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \geq 3$

$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cap [3, +\infty[= \{ \}$ → Não há nenhum elemento comum aos dois conjuntos.

3 • Resolver a conjunção de condições: $x \geq 2 \ \wedge \ x \leq 2$



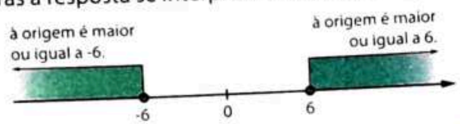
$x \geq 2 \ \wedge \ x \leq 2$

$[2, +\infty[\ \cap \ ]-\infty, 2] = \{2\}$

Disjunção de condições

Problema:

Quais as abcissas dos pontos, da recta real, cuja distância à origem é maior ou igual a 6?
Facilmente encontrarás a resposta se interpretares o problema geometricamente:



O que corresponde, algebricamente, à resolução de uma **disjunção de condições**:

$$x \leq -6 \ \vee \ x \geq 6$$

«∨» lê-se «ou».

O conjunto solução desta disjunção de condições é, na recta real acima desenhada, a **reunião de dois conjuntos**:

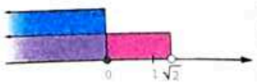
$$]-\infty, -6] \cup [6, +\infty[$$

À disjunção, ∨, de condições corresponde a reunião, ∪, de conjuntos.

Ao **conjunto reunião** pertencem todos os elementos que satisfazem, pelo menos uma das condições dadas.

Exemplos

1 • Resolver a disjunção de condições: $x < \sqrt{2} \ \vee \ x + 1{,}5 \leq \frac{3}{2}$

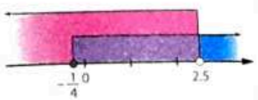


$x < \sqrt{2} \ \vee \ x \leq 0$

$]-\infty, \sqrt{2}[\ \cup \ ]-\infty, 0]$

O conjunto solução é $]-\infty, \sqrt{2}[$.

2 • Resolver a disjunção de condições: $x \geq -\frac{1}{4} \ \vee \ x < 2{,}5$



$x \geq -\frac{1}{4} \ \vee \ x < 2{,}5$

$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[\ \cup \ ]-\infty; 2{,}5[$

O conjunto solução é $\mathbb{R}$.

11. Resolve, em $\mathbb{R}$, os sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} x - 9 < \frac{x}{2} \\ x - 9 < -x + 5 \end{cases}$

b) $-2 \leq \frac{-2x+1}{-3} \leq 1$

c) $1 < \frac{x-3}{2} \leq 5$

12. Quais os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam:

a) $2(x-1) - 3 \geq 0 \ \wedge \ 2x \leq 5$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 8 \ \wedge \ \frac{x}{2} - 3 < \frac{4x}{9}$

13. Quais os números inteiros que verificam simultaneamente: $-1 \leq n < 5$ e $-2 < n \leq 3$

14. Resolve, em $\mathbb{R}$, a disjunção de condições.

a) $\frac{3+2x}{6} < \frac{3+x}{8} \ \vee \ -5x - 2 \geq 0$

b) $-2x + 7 < 2(x+1) \ \vee \ \frac{x-1}{5} - \frac{x+1}{2} \geq 0$

15. Resolve as inequações e apresenta, geometricamente e em forma de intervalo, o conjunto solução:

a) $2 - \frac{x+3}{2} > -\frac{1}{5}$

b) $\frac{2(2x-1)}{3} + \frac{2(3x+4)}{5} - (3x-4) < \frac{x+2}{2} + 2$

c) $\frac{x+4}{2} + \frac{4\left(x - \frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{2}{3}} \leq \frac{4x - \frac{1}{3}}{2}$

16 Para cada caso, justifica se as duas inequações são equivalentes:

a) $3x + 2 > x - 4$ e $3x + 2 + 4 > x - 4 + 4$

b) $8x + 4 \geq 5x - 7 + 4$ e $8x \geq 5x - 7$

c) $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5} > x$ e $2x + 1 > 5x$

17. Numa grande empresa, trabalham actualmente 24 economistas e 8 gestores. Pretende-se recrutar igual número de economistas e gestores.
Qual o menor número de funcionários a contratar para cada grupo se a direcção da empresa pretende ter nos seus quadros um número de gestores que seja, pelo menos, três quintos do número de economistas.

18. Como pode variar a altura de um triângulo de base 24 cm, de modo que a sua área seja maior que 96 cm² e menor que 240 cm²?

19. Num picadeiro, um cavalo dá voltas circulares com 20 m de raio.
Quantas voltas inteiras terá de dar para percorrer uma distância entre 1 km e 1,5 km?

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

1. A representação do conjunto dos valores de x dos números reais maiores que -2 e menores ou igual a $\frac{3}{2}$ é:

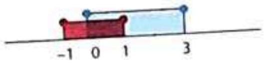
A. $\{x \in \mathbb{R}: -2 < x < \frac{3}{2}\}$

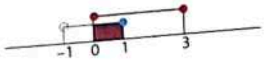
B. $\{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq \frac{3}{2}\}$

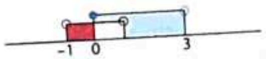
C. $\{x \in \mathbb{R}: -x \geq \frac{3}{2}\}$

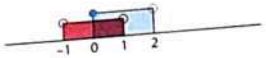
D. $\{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x < \frac{3}{2}\}$

2. A representação geométrica da intersecção $[-1, 1] \cap [0,3]$ é:

A.


B.


C.


D.


3. A solução da inequação $x-1 > -3$ é:

A. $x = 2$ B. $x > -4$ C. $x > -2$ D. $x > 4$

4. A inequação equivalente a $\frac{2}{3}x - 1 \leq 1$ é:

A. $-2x \geq -3$ B. $2x \geq -1$ C. $x \leq 3$ D. $2x \geq -3$

5. O conjunto solução da inequação $-\frac{3}{5}x \leq 2$ é:

A. $\left[-\frac{10}{3}, -\infty\right[$ B. $\left]-\infty, -\frac{10}{3}\right[$ C. $\left[-\infty, \frac{10}{3}\right[$ D. $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$

6. $\{x \in \mathbb{R}^-: -2x \geq -4\}$ é o mesmo que:

A. $[0, 2]$ B. $[0, 2[$ C. $]-\infty, 0[$ D. $]-\infty, 2]$

7. O menor número inteiro que verifica a inequação $3(n-1) > 8$ é:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 11

2.ª Parte

1. Verdadeiro ou falso:

A. $\{x \in \mathbb{R}_0^+: x < 4\} =]0, 4]$

B. $-\frac{1}{2}$ é solução da condição $-\frac{3}{5}x < -5$

C. A representação geométrica de $\{x \in \mathbb{R}_0^-: x > -0{,}5\}$ é:

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, as condições:

a) $-3x \leq -\frac{3}{4}$

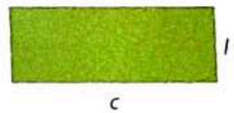
b) $(2x-1)^2 + 3x < 4x^2 + \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x^2 = 2$

c) $2 - \frac{x+1}{3} \leq -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x^2 - 7x = 0$

3. O João quer comprar uma lapiseira e uma régua. A lapiseira custa o triplo da régua e o João só tem 5 MT.
Qual é o preço máximo da régua que ele pode comprar?

4. Quais as abcissas dos pontos da recta real cuja distância à origem é não superior a $1 + \sqrt{2}$?

5. O comprimento de um rectângulo é sete quartos da largura; o perímetro do rectângulo não pode ser superior a 88 metros.
Quais são os valores possíveis para a largura deste rectângulo?

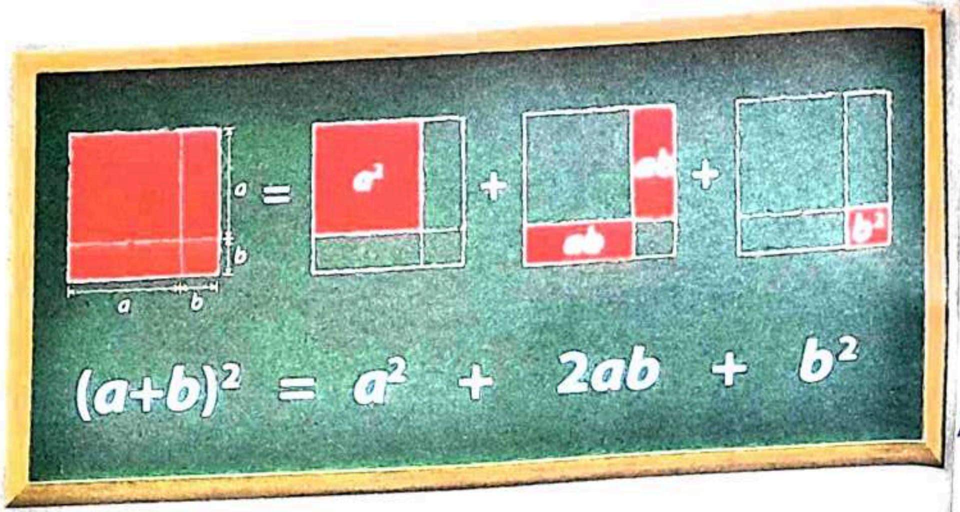


6. a) Indica um número real que satisfaça as duas condições:

$$4x - 2 > 0 \text{ e } 4x - 3 < 0$$

b) Para esse valor, escolhe a afirmação verdadeira:

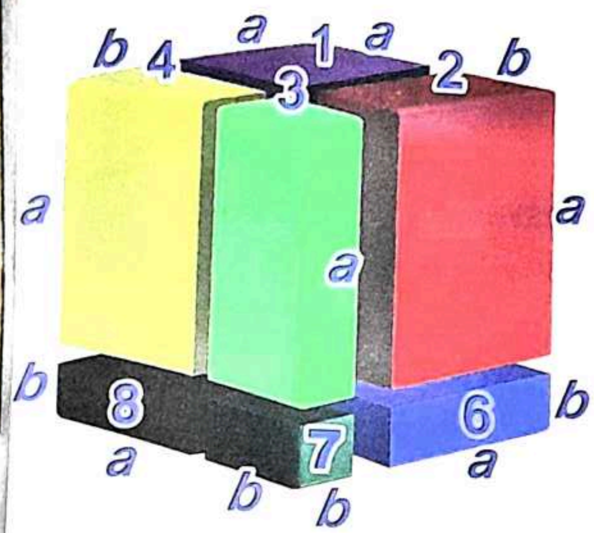
A. $(4x-2)(4x-3) \in \mathbb{R}^+$ B. $(4x-2)(4x-3) = 0$ C. $(4x-2)(4x-3) \in \mathbb{R}^-$



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar monómios.
- Indicar o grau de um monómio.
- Adicionar e subtrair monómios.
- Multiplicar monómios.
- Adicionar e subtrair polinómios.
- Multiplicar:
  a) Um polinómio por um monómio.
  b) Um polinómio por um binómio.
  c) Dois binómios.
- Aplicar as propriedades da multiplicação.
- Dividir um polinómio por um monómio.
- Decompor um polinómio em factores, tendo em conta o factor comum e os casos notáveis.



UNIDADE 3

Noção de monómios e polinómios

Págs. 48 a 77

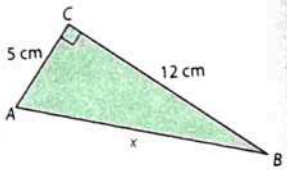
CONTEÚDOS

Noção de monómios e polinómios

- Noção de monómio
- Grau de um monómio
- Adição algébrica de monómios
- Multiplicação de monómios
- Divisão de monómios
- Potenciação de monómios
- Noção de polinómio
- Grau de um polinómio
- Soma algébrica de polinómios
- Multiplicação de um polinómio por um monómio
- Multiplicação de um polinómio por um binómio
- Multiplicação de dois binómios
- Propriedades da multiplicação
- Decomposição de um polinómio em factores recorrendo:
  - Propriedade distributiva (factor comum)
  - Produtos notáveis $(a \pm b)^2$ e $(a + b)(a - b)$
- Divisão através da simplificação de um polinómio por um monómio

Monómios e polinómios

Problema 1:
Sabendo que o triângulo da figura é rectângulo, determina x.



Resolução:
$x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow$ equação de grau superior a um, que admite as soluções 13 e −13.
A solução do problema é 13 cm.

Problema 2:
Calcular x, sabendo que a área do rectângulo é 10 cm².

Resolução:
$(x - 5)(x - 2) = 10 \rightarrow$ equação de grau superior a um.
Não podes resolver esta equação sem estudar monómios e polinómios.

Monómios

Quais são as expressões com variáveis que nos dão a medida das áreas da figura A e da figura B?

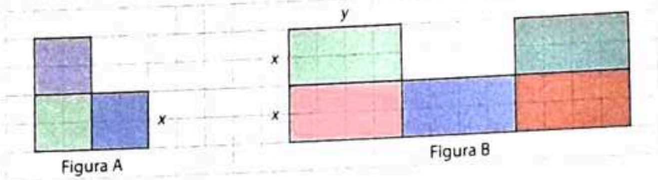


Figura A   Figura B

$3x^2$ − área da figura A. $5xy$ − área da figura B.

$3x^2$ e $5xy$ são expressões onde não figuram nem adições nem subtracções; chamam-se **monómios.**

Outros exemplos de monómios: $3;\ -\frac{1}{2};\ x;\ \frac{3}{4}a^2b$

Não são monómios, por exemplo: $x + 3y^2;\ 3z - 4;\ 3x^3y + \frac{1}{4}$

Num monómio podes distinguir:
- O coeficiente − parte numérica
- A parte literal − letras com respectivos expoentes
- O grau − soma dos expoentes da parte literal

Monómio é um número ou um produto de números em que alguns deles se podem representar por letras.

Vejamos:

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
−7	−7	não tem	0
x	1	x	1
$-\frac{x}{2}$	$-\frac{1}{2}$	x	1
$-\frac{y^2z^3}{3}$	$-\frac{1}{3}$	y^2z^3	$2+3=5$

- **Monómios semelhantes: têm a mesma parte literal.**

Exemplos:

$\frac{x^2}{3}\quad -6x^2\quad -8x^2 \rightarrow$ todos têm a mesma parte literal, x^2.

$xy^2\quad -\frac{xy^2}{2}\quad 1{,}4xy^2 \rightarrow$ todos têm a mesma parte literal, xy^2.

Não são monómios semelhantes, por exemplo:

$\frac{x^2y}{3}\quad xy^2\quad 5xy \rightarrow$ porque as partes literais são diferentes.

- **Monómios simétricos:** são monómios que têm a mesma parte literal e coeficientes simétricos:

Exemplos: $+4x^2$ e $-4x^2$

$-\frac{3}{2}a^3b$ e $+\frac{3}{2}a^3b$

Exercício resolvido

Dado o monómio $-\frac{x^2y}{3}$, indica:

a) O coeficiente   b) A parte literal   c) O grau

Resolução:

$$-\frac{x^2y}{3} = -\frac{1}{3}x^2y^1$$

a) Coeficiente $\rightarrow -\frac{1}{3}$
b) Parte literal $\rightarrow x^2y$
c) $x^2y^1 \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow$ o grau do monómio é 3.

Adição algébrica de monómios

Considera as situações:

Situação 1:

Qual é a medida do comprimento [*AB*]?

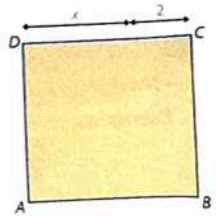
x, $2x$ e x são monómios semelhantes.

É $x + 2x + x$

$x + 2x + x = (1 + 2 + 1)x = 4x$

Situação 2:

Qual é a medida do perímetro do quadrado [*ABCD*]?



É $x + 2 + x + 2 + x + 2 + x + 2$

x e 2 não são monómios semelhantes.

$x + 2 + x + 2 + x + 2 + x + 2 =$

$= x + x + x + x + 2 + 2 + 2 + 2$

$= 4x + 8$

Não se pode continuar.

$4x$ e 8 não são monómios semelhantes.

Situação 3:

Reduzir os termos semelhantes em: $0{,}5x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{2}x^2 - x$

$$0{,}5x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{3}{2}x^2 - x = 0{,}5x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - x = \left(0{,}5 + \frac{3}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{8} - 1\right)x = 2x^2 - \frac{7}{8}x$$

Para somar monómios semelhantes:

- Dá-se a mesma parte literal.
- Somam-se os coeficientes.

A adição de monómios é:

- Comutativa
- Associativa
- O zero é o elemento neutro.

A soma de dois monómios semelhantes é um monómio semelhante aos monómios dados, tendo por coeficiente a soma algébrica dos coeficientes.

Exercício resolvido

Calcula a soma dos seguintes monómios: $0{,}5x$ $\quad \frac{3}{4}x$ $\quad -3$

Resolução:

$0{,}5x$ e $\frac{3}{4}x$ são monómios semelhantes porque têm a mesma parte literal.

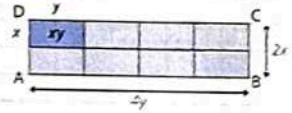
Então, $0{,}5x + \frac{3}{4}x - 3 = \left(0{,}5 + \frac{3}{4}\right)x - 3 = (0{,}5 + 0{,}75)x - 3 = 1{,}25x - 3$

Multiplicação de monómios

Considera as situações:

Situação 1:

Qual é a medida da área do rectângulo [*ABCD*]?

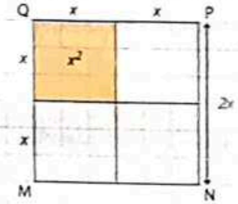


Observando a figura:

$$2x \times 4y = 8xy$$

Situação 2:

Qual é a medida da área do quadrado [*MNPQ*]?



Observando a figura:

$$(2x)^2 = 4x^2$$

Exemplos

Calcular:

- $-3x^3y^2 \times 2xy^5z = -6x^{3+1}y^{2+5}z = -6x^4y^7z$
- $\left(-\frac{3}{2}a^2b\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3(a^2)^3b^3 = -\frac{27}{8}a^6b^3$

Acabamos de verificar que:

O produto de dois ou mais monómios é um monómio:

- Cujo coeficiente é o produto dos coeficientes dos monómios factores.
- Cuja parte literal é o produto das partes literais dos monómios factores (usar as regras das potências).

Exercício resolvido

Escreve o monómio $5abc\,(-3a^2b)$ na sua forma mais simples.

Resolução:

$5abc\,(-3a^2b) = \underbrace{-15a^3b^2c}_{\text{monómio reduzido}}$

Divisão de monómios

Na **divisão** de dois monómios, dividimos o coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal. E quando dividimos as partes literais devemos usar a propriedade da potência que diz para conservar a base e subtrair os expoentes.

$a^m \div a^n = a^{m-n}; a \neq b$

Vamos calcular:

$(15x^6) \div (5x^2) = (15 \div 5) \cdot (x^6 \div x^2) = 3x^{6-2} = 3x^4$

ou

$(15x^6) \div (5x^2) = 15 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \div 5 \cdot x \cdot x =$

$= 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x =$

$= 3x^4$

Conclusão: dividem-se os coeficientes e as partes literais.

Exemplos

a) $(21x^6) \div (-7x^3) = -3x^3$

b) $(-10x^3) \div (-2x^2) = +5x$

c) $(-27x^3y) \div (-9xy) = +3x^2$

Potenciação de monómios

Para **elevarmos um monómio** a **uma potência**, devemos elevar cada factor desse monómio a essa potência. Na prática elevamos o coeficiente numérico à potência e multiplicamos cada um dos expoentes das variáveis pelo expoente da potência.

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^n;\ a \text{ e } b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}\ a \neq 0$

Vamos calcular:

$(5a^3 m)^2 = 5^2(a^3)^2(m)^2 = 25a^6 m^2$

Conclusão: para elevarmos um monómio a uma potência, elevamos cada um de seus factores a essa potência.

Exemplos

a) $(-7x)^2 = 49x^2$

b) $(-3x^2y)^3 = -27x^6y^3$

c) $\left(-\frac{1}{4}x^4\right)^2 = \frac{1}{16}x^8$

1. O João tem um certo número de CD's. A Joana tem o triplo do número de CD's do João e o Pedro tem só mais três CD's que o João.

a) Escreve expressões que representem o número de CD's do João, da Joana e do Pedro.
Quais destas expressões são monómios? Porquê?

b) Se o João tem 22 CD's, quantos CD's têm juntos os três amigos?

2.a) Faz corresponder cada expressão à sua escrita simplificada:

$0,3 \times a$	$7a$
$4 \times a^2$	$0,5 + 2a$
$a \times 7$	$0,3a$
$2 \times a + 1$	$4a^2$
$0,5 + 2 \times a$	$1 + 2a$

b) De entre as expressões simplificadas, escolhe os monómios.

3. Copia e completa o quadro:

Monómio	Coeficiente	Parte literal	Grau
$7ab$			
$-3\frac{xy^2z}{4}$			
$-\frac{t}{2}$			
	$\frac{27}{25}$	x^2yz	
	-1	a^2b	

4. De entre os seguintes pares de monómios, escolhe os que são monómios semelhantes.

a) $4ab^2$ e $5a^2b$

b) $-\frac{3}{4}xy^2$ e xy^2

c) $\frac{1}{2}x^2yz^3$ e $2x^2yz^2$

d) ab^2c^3 e $\frac{ab^2c^3}{3}$

5. Escreve um monómio semelhante a cada um dos monómios seguintes.

a) $3x^3y$ b) $\frac{ab^2c^3}{4}$ c) ab d) a^3

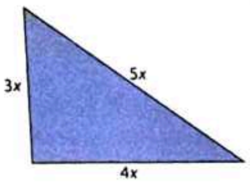
6. Explica por que são ou não simétricos os seguintes monómios:

a) $3a$ e $-3a$ b) $9x^3z$ e $\frac{1}{9}x^3z$ c) $-x$ e x

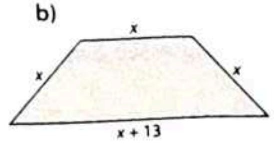
d) 2 e -2 e) $\frac{x}{4}$ e $4x$

7. Escreve uma expressão simplificada que represente o perímetro de cada figura (unidade: cm).

a)



b)



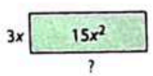
8. Reduz os termos semelhantes.

a) $3x + 5x + 0{,}2x + x$ b) $-33y - y$ c) $2y - 7y + y + 0{,}5y$

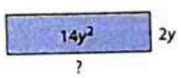
d) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - 4x$ e) $\frac{5}{8}a - \frac{7}{12}a$

9. Descobre mentalmente o monómio que representa o comprimento de cada rectângulo.

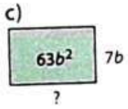
a)



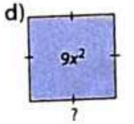
b)



c)



d)



10. Calcula os produtos:

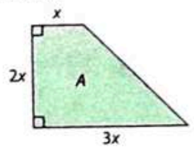
a) $\frac{2}{3}a \times 3a$ b) $-6a \times 8a$ c) $5b^4 \times b^3$ d) $a^3 \times 10^2 \times a \times 10^5$

11. Escreve na sua forma mais simples:

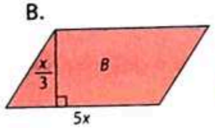
a) $-3ab\,(-2abc)$ b) $-\frac{2}{5}xy\,(-5x)$

12.a) Escreve uma expressão simplificada que represente a medida da área de cada figura (unidade: m).

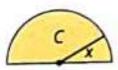
A.



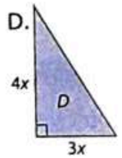
B.



C.



D.



b) Se $x = 3$, qual é a área de cada figura?

13. Calcula os quocientes seguintes:

a) $(15x^6) \div (3x^2)$ b) $(16x^4) \div (8x)$ c) $(-30x^5) \div (+3x^3)$

d) $(+8x^6) \div (-2x^4)$ e) $(-10y^5) \div (-2y)$ f) $(-35x^7) \div (+5x^3)$

g) $(+15x^8) \div (-3x^2)$ h) $(-8x) \div (-8x)$ i) $(-14x^3) \div (+2x^2)$

j) $(-10x^3y) \div (+5x^2)$ k) $(+6x^2y) \div (-2xy)$ l) $(-7abc) \div (-ab)$

m) $(15x^7) \div (6x^5)$ n) $(20a^3b^2) \div (15ab^2)$ o) $\left(+\frac{1}{3}x^3\right) \div \left(-\frac{1}{5}x^2\right)$

p) $\left(-\frac{4}{5}x^2y\right) \div \left(-\frac{4}{3}3x^3y\right)$ q) $(-2xy^2) \div \left(\frac{1}{4}xy\right)$

14. Calcula:

a) $(10xy) \div (5x)$ b) $(x^3y^2) \div (2xy)$ c) $(-3xz^2) \div (-3xz)$

d) $(-14m^6n^3) \div (7m^4n^2)$ e) $\left(\frac{1}{2}a^3b^2\right) \div (-a^3b^2)$ f) $(a^4b^3) \div (5a^3b)$

g) $(-3x^5y^3) \div (-4x^2y)$ h) $\left(-\frac{2}{3}x^4z^4\right) \div \left(\frac{5}{3}z^4\right)$

15. Calcula as potências seguintes:

a) $(+3x^2)^2 =$ b) $(-8x^4)^2 =$ c) $(2x^5)^3 =$

d) $(3y^2)^3 =$ e) $(-y^2)^4 =$ f) $(-mn)^4 =$

g) $(2xy^2)^4 =$ h) $(-4x^2b)^2 =$ i) $(-3y^2)^3 =$

j) $(-6m^3)^2 =$ k) $(-3x^3y^4)^4 =$ l) $(-2x^2m^3)^3 =$

16. Calcula:

a) $\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 =$ b) $\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2 =$ c) $\left(-\frac{1}{2}y\right)^2 =$

d) $\left(+\frac{2}{3}x\right)^3 =$ e) $\left(-\frac{3}{4}m\right)^2 =$ f) $\left(-\frac{5}{6}m^3\right)^2 =$

Polinómios

Problema:

A Mariana tinha x bolas de ténis e o seu pai deu-lhe mais o quadrado das que ela tinha. Num jogo, a Mariana perdeu uma bola.
Qual é a expressão que representa o número de bolas de ténis que a Mariana tem agora?

Resolução:

A Mariana tinha x bolas, deram-lhe x^2 e perdeu 1, logo, a expressão é:

$x + x^2 - 1$ → polinómio com 3 termos e de grau 2

- **Polinómio: é uma soma algébrica de monómios.**
- **Termos do polinómio: são monómios que formam um polinómio.**
- **Grau de um polinómio: é o maior grau dos seus monómios.**
- Um polinómio com dois termos é um **binómio**. Por exemplo: $3x^2 + xy$; $2 + 5x$
- Um polinómio com três termos é um **trinómio**. Por exemplo: $x^2 + 5x - 1$; $y^3 - 3y^2 + 1$

Vejamos:

Polinómios	Termos ou monómios do polinómio	Grau do polinómio
$-4x^3 + 2x^2 + x + 5$	$-4x^3$; $2x^2$; x ; 5	3
$3a^2 + 5ab - b^2$	$3a^2$; $5ab$; $-b^2$	2
$-\frac{5}{4}y^2 + \frac{7}{2}xy + y^5$	$-\frac{5}{4}y^2$; $\frac{7}{2}xy$; y^5	5

- Reduzir os termos semelhantes de um polinómo é simplificá-lo.

Exemplo

Calcula:

$$2x^2 + 5x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 + 5 - 9x = 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - 9x - \frac{3}{2} + 5 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + (5 - 9)x + \left(-\frac{3}{2} + 5\right) =$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \longrightarrow \text{polinómio na sua forma reduzida ou simplificada.}$$

Adição e subtracção de polinómios

Considera as situações:

Situação 1:

Calcular a soma dos polinómios seguintes:

$$2x^3 - 3x^2 + 5 \quad \text{e} \quad -x^4 + 2x^3 - 3$$

$$2x^3 - 3x^2 + 5 \overset{\downarrow}{+} (-x^4 + 2x^3 - 3) = 2x^3 - 3x^2 + 5 - x^4 + 2x^3 - 3$$

Retiram-se os parêntesis.
Reduzem-se os termos semelhantes.

$$= -x^4 \underbrace{+ 2x^3 + 2x^3}_{+ 4x^3} \underbrace{- 3x^2}_{- 3x^2} \underbrace{+ 5 - 3}_{+ 2}$$

$$= -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2$$

Não se pode continuar. Os termos não são semelhantes.

Situação 2:

Calcular a diferença dos polinómios seguintes:

$$5y^2 - 3y + 1 \quad \text{e} \quad y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 3y + 2$$

$$5y^2 - 3y + 1 \overset{\downarrow}{-} \left(y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 3y + 2\right) = 5y^2 - 3y + 1 \overset{\downarrow}{-} y^3 \overset{\downarrow}{+} \frac{1}{2}y^2 \overset{\downarrow}{-} 3y \overset{\downarrow}{-} 2$$

Trocam-se os sinais.

$$= -y^3 \underbrace{+ 5y^2 + \frac{1}{2}y^2}_{+\frac{11}{2}y^2} \underbrace{- 3y - 3y}_{-6y} \underbrace{+ 1 - 2}_{-1}$$

$$= -y^3 + \frac{11}{2}y^2 - 6y - 1$$

Situação 3:

Sendo $A = a^3 - a^2 + a - 1$ e $B = 2a^2 - 1$ calcular $A + B$ e $A - B$.

- $A + B = a^3 - a^2 + a - 1 \overset{\downarrow}{+} (2a^2 - 1) = a^3 - a^2 + a - 1 + 2a^2 - 1 = a^3 + a^2 + a - 2$
- $A - B = a^3 - a^2 + a - 1 \overset{\downarrow}{-} (2a^2 - 1) = a^3 - a^2 + a - 1 \overset{\downarrow}{-} 2a^2 \overset{\downarrow}{+} 1 = a^3 - 3a^2 + a$

Recorda:

$\ldots \overset{\downarrow}{+} (\ldots + \ldots - \ldots) = \ldots + \ldots -$

Os parêntesis precedidos do sinal «mais»: suprimem-se os parêntesis sem alterar a expressão dentro dos parêntesis.

$\ldots \overset{\downarrow}{-} (\ldots + \ldots - \ldots) = \ldots - \ldots +$

Os parêntesis precedidos do sinal «menos»: suprimem-se os parêntesis desde que se troquem os sinais no interior dos parêntesis.

17. Escreve dois monómios, dois binómios e dois trinómios.

18. Indica o grau dos seguintes polinómios:

a) $5x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ b) $8 - 8y - 3y^6 + y^4$ c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}y^2 + y$

19. Reduz os termos semelhantes e indica o grau do polinómio.

a) $8y^5 - 7y^4 + 5y - 5y^3 - 8y^5 - 2y^3 - 3y + 2$

b) $3x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2x^5 + \frac{1}{4}x - x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 + 9$

c) $3a^4 - \frac{1}{2}a^3 + 2a^2 + a - a^4 + \frac{3}{2}a^3 - a^2 - a$

d) $5y^3 - 2y^4 + y - 1 - y - 1 - 2y^4 + 5y^3$

20 Calcula o valor numérico de cada um dos polinómios.

a) $x^4 + x^3 - x^2 - x$ para $x = 1$ b) $5x^3 - 2x^2 + 3x^4 - x$ para $x = -1$

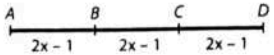
21. Sendo:

$$A = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} \qquad B = -\frac{1}{2}x^2 - 1 \qquad C = x^4 + \frac{1}{3}x - 1$$

a) Calcula: $A + B + C$ $A - B + C$ $A - B - C$

b) Qual é o valor numérico do polinómio A para $x = -\frac{1}{2}$?

22. Representa, por um binómio, a medida do comprimento de [AD].



23. Simplifica as expressões:

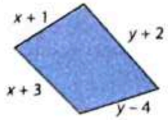
a) $7x - (3 - x)$ b) $5x + (5 - 8x) - (x - 6)$

c) $\frac{8}{5}x - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}x\right) - \frac{2}{3}$ d) $3y^2 - (2y - 7) - (-y^2 + 5y)$

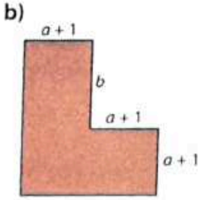
e) $(3a - 7) + (-3a + 5) - (1 - 2a)$ f) $(5x - 2) + \left(-6x - \frac{1}{2}\right)$

24. Escreve e simplifica as expressões que representam as medidas dos perímetros das figuras.

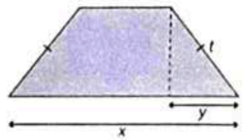
a)



b)



c)

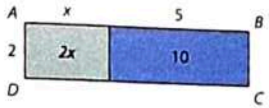


Multiplicação de um monómio por um polinómio

Considera as situações:

Situação 1:

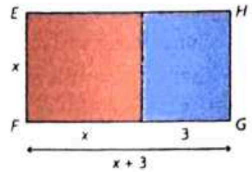
Qual é a medida da área do rectângulo [ABCD]?



$$\underbrace{2(x+5)}_{\text{Área do rectângulo [ABCD]}} = \overbrace{2x}^{\text{Área do rectângulo verde}} + \underbrace{10}_{\text{Área do rectângulo azul}}$$

Situação 2:

Qual é a medida da área do rectângulo [EFGH]?



A medida da área do rectângulo [EFGH] é:

- O produto da largura x, pelo comprimento $x + 3$, isto é:

$$x(x + 3)$$

ou

- A soma das medidas das áreas dos rectângulos vermelho e azul, isto é:

$$x^2 + 3x$$

Logo, $x(x + 3) = x^2 + 3x$

Situação 3:

Efectuar: $-5x(2x^2 + 3x - 1)$

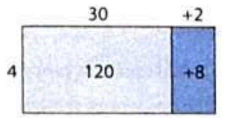
$$-5x(2x^2 + 3x - 1) = -10x^3 - 15x^2 + 5x$$

Multiplicou-se o monómio $-5x$ por cada um dos termos do polinómio:

- Coeficiente vezes coeficiente.
- Parte literal vezes parte literal, usando as regras de potências.

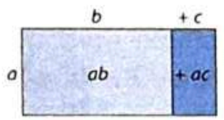
Para calcular o produto de um monómio por um polinómio aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Em aritmética:



$$4 \times (30 + 2) = 4 \times 30 + 4 \times 2$$

Em álgebra:



$$a \times (b + c) = ab + ac$$

Exercício resolvido

Calcula: a) $-7(3x+5)$ b) $3y(2y+1)$

Resolução:

a) $-7(3x+5) = -7(3x) + (-7) \times 5$ Usa-se a propriedade distributiva.
$= -21x - 35$

b) $3y(2y+1) = 3y(2y) + 3y \times 1$
$= 6y^2 + 3y$

Multiplicação de um polinómio por um binómio

Considera a situação:

Como exprimir a medida da área da figura A de duas maneiras diferentes?

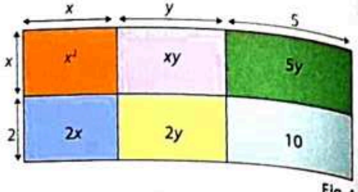


Fig. A

Resolução:

Penso:

- Rectângulo de comprimento $x + y + 5$ e de largura $x + 2$:

$(x + y + 5)(x + 2)$

ou

- Soma das áreas de seis rectângulos de lados: x e x; x e 2; y e x; y e 2; 5 e x; 5 e 2:

$x^2 + 2x + xy + 2y + 5x + 10$

$$(x + y + 5)(x + 2) = x^2 + 2x + yx + 2y + 5x + 10$$
$$= x^2 + 7x + yx + 2y + 10$$

ou seja: $(x + y + 5)(x + 2) = x^2 + 2x + yx + 2y + 5x + 10$
$= x^2 + 7x + yx + 2y + 10$ Resulta também da aplicação da propriedade distributiva.

Multiplicamos um polinómio por um binómio:

- Multiplicando cada monómio do polinómio, por cada um dos monómios do binómio.
- O produto será a soma de todos os produtos anteriormente obtidos, isto é, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição algébrica e, em seguida adicionamos os termos semelhantes.

Exemplos

Calcula:

a) $(2x + 1)(x - 8y + 2) = 2x^2 - 16xy + 4x + x - 8y + 2 \rightarrow 2$ Aplicação da propriedade distributiva
$= 2x^2 - 16xy + 5x - 8y + 2$ Redução dos termos semelhantes

b) $(a + 26b - 3)(a - b) = a^2 - ab + 2ab - 2b^2 - 3a + 3b = a^2 + ab - 3a - 2b^2 + 3b$

Multiplicação de dois binómios

Considera as situações:

Situação 1:

Como exprimir a medida da área da figura B de duas maneiras diferentes?

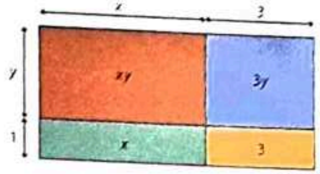


Fig. B

Resolução:

Penso:

- Rectângulo de comprimento $x + 3$ e de largura $y + 1$:

$(x + 3)(y + 1)$

ou

- Soma das áreas de quatro rectângulos de lados: x e y; 1 e x; 3 e y; 3 e 1:

$xy + x + 3y + 3$

$$(x + 3)(y + 1) = xy + x + 3y + 3$$

ou seja: $(x + 3)(y + 1) = xy + x + 3y + 3$ O que também resulta da aplicação da **propriedade distributiva**.

Situação 2:

Como exprimir a medida da área da figura C de duas maneiras diferentes?

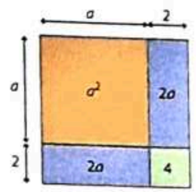


Fig. C

Resolução:

Penso:

- Quadrado de lado $(a + 2)$

$(a + 2)(a + 2)$

ou

- Soma de quatro áreas: a^2; $2a$; $2a$; 4:

$a^2 + 2a + 2a + 4$

$$(a + 2)(a + 2) = a^2 + 2a + 2a + 4$$
$$= a^2 + 4a + 4$$

ou seja: $(a + 2)(a + 2) = a^2 + 2a + 2a + 4$
$= a^2 + 4a + 4$ O que também resulta da aplicação da **propriedade distributiva**.

Exemplos

1. Calcula $(x+3)(x+4)$.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+4) &= xx + 4x + 3x + 3\times 4 \rightarrow \text{Aplicação da propriedade distributiva}\\ &= x^2 + 4x + 3x + 12\\ &= x^2 + (4+3)x + 12 \quad \text{Redução de termos semelhantes}\\ &= x^2 + 7x + 12\end{aligned}$$

2. Calcula $(3x-5)(4x+2)$.

$$\begin{aligned}(3x-5)(4x+2) &= 12x^2 + 6x - 20x - 10\\ &= 12x^2 - 14x - 10\end{aligned}$$

3. Calcula $(a-1)(a-1)$.

$$\begin{aligned}(a-1)(a-1) &= a^2 - a - a + 1\\ &= a^2 - 2a + 1\end{aligned}$$

- De um modo geral, o cálculo ou desenvolvimento de:

$$\underbrace{(a+b)(c+d)}_{\text{produto}} = \underbrace{ac + ad + bc + bd}_{\text{soma de 4 termos}}$$

Multiplica-se cada termo de $(a+b)$ por cada termo de $(c+d)$.

- Substituir o produto $(a+b)(c+d)$ pela soma $ac + ad + bc + bc$ é desenvolver o produto.
- De modo análogo:

$$(a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$$
$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

Exercício resolvido

Calcula $(2y-5)(y+3)$

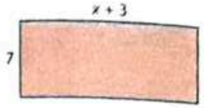
Resolução:

$$\begin{aligned}(2y-5)(y+3) &= 2y\times y + 2y\times 3 - 5\times y - 5\times 3 &&\text{• Multiplica-se cada termo de } (2y-5) \text{ por cada termo de } (y+3).\\ &= 2y^2 + 6y - 5y - 15 &&\text{• Efectua-se os produtos.}\\ &= 2y^2 + y - 15 &&\text{• Reduz-se os termos semelhantes.}\end{aligned}$$

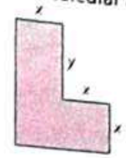
Exercícios de consolidação

25. Escreve uma fórmula que te permita calcular a medida da área de cada figura.

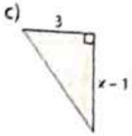
a)



b)



c)



26. Calcula:

a) $-9(2x-1)$

b) $\left(-\frac{3}{5}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)$

c) $-y(2y+1)$

d) $\frac{x}{3}(3x+6)$

e) $\left(\frac{3}{5}+x\right)\cdot\left(5+5x-5y\right)$

f) $(2+5y)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

27. Efectua e reduz os termos semelhantes:

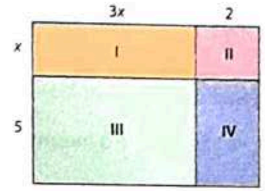
a) $4\left(\frac{1}{4}+x\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x-4\right)$

b) $0{,}25(4x-100)+x\left(\frac{x}{2}+1\right)$

c) $\frac{x}{5}\left(1-\frac{x}{5}\right)+\left(\frac{x}{5}\right)^2$

d) $y-\left[\frac{1}{2}(y+1)-2(y+2)\right]$

28. Observa os rectângulos I, II, III e IV (unidade: cm):



a) Escreve as expressões que representam a medida da área de cada um dos rectângulos e calcula a sua soma.

b) Calcula $(x+5)(3x-2)$.

29. Calcula e simplifica:

a) $(4+x-y)(3+x)$ b) $(x-1)(x+y-13)$ c) $(x+1)(x+y+13)$ d) $(2x-y-5)(3x+2)$

30. Dados os monómios a e b, calcula:

a) O produto de b pela soma de a com b.

b) O produto de a pela diferença entre a e b.

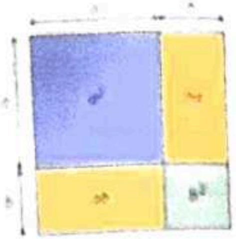
c) O produto da soma de a com b pela diferença entre a e b.

31. Quadrados de números:

a) Calcula 11^2, desenvolvendo $(10+1)(10+1)$.

b) Usando o mesmo método, calcula 21^2 e 19^2.

Quadrado de um binómio



1. Sabes que $(a+b)(a+b)$ é o mesmo que $(a+b)^2$.

Observa o quadrado ao lado.

O comprimento do lado é: $a+b$, logo, a sua área é $(a+b)^2$.

Mas o quadrado é formado por quatro rectângulos em que somando as suas áreas obténs:

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

logo,

$$(\underset{\text{1.º termo}}{a} + \overset{\text{2.º termo}}{b})^2 = \underset{\text{quadrado do 1.º termo}}{a^2} + \overset{\text{dobro do produto do 1.º termo pelo 2.º termo}}{2ab} + \underset{\text{quadrado do 2.º termo}}{b^2}$$

Nota: $(a+b)^2$ não é $a^2 + b^2$!!

Esquecer o termo $2ab$ é esquecer a área dos rectângulos amarelos.
O quadrado de um binómio é um trinómio.

2. Experimenta desenvolver $(a-b)^2$, fazendo $(a-b)(a-b)$. Obtiveste, com certeza:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Atenção:

- $(-5a-1)^2$ é o mesmo que: $[-(5a+1)]^2 = (5a+1)^2$
- Pela propriedade comutativa: $\left(-\frac{1}{3}+2t\right)^2 = \left(2t-\frac{1}{3}\right)^2$

Exemplos

Calcular os quadrados de alguns binómios:

a) $(2+y)^2 = 2^2 + 2 \times 2y + y^2 = 4 + 4y + y^2$

b) $\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 = c^2 - 2 \times c \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = c^2 - c + \frac{1}{4}$

c) $(-5a-1)^2 = (5a+1)^2 = 25a^2 + 2 \times 5a \times 1 + 1 = 25a^2 + 10a + 1$

d) $\left(-\frac{1}{3}+2t\right)^2 = \left(2t-\frac{1}{3}\right)^2 = 4t^2 - 2 \times 2t \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 4t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{9}$

Diferença de quadrados

Já sabes calcular $(a+b)(a-b)$.

É um produto de polinómios. Vamos desenvolvê-lo:

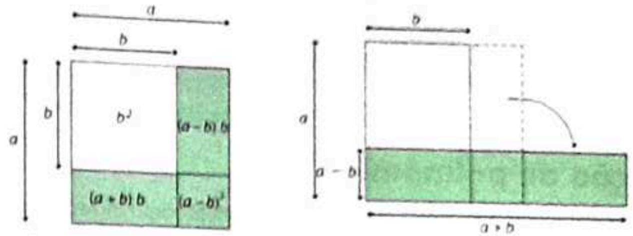
$$(a+b)(a-b) = a^2 \underbrace{- ab + ab}_{\text{simétricos}} - b^2 = a^2 - b^2$$

logo,

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Interpretação geométrica

Qual é a medida da área da parte colorida na figura?



- Área da parte colorida: $a^2 - b^2$

ou

- Área da parte colorida: $(a+b)(a-b)$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemplos

Desenvolver os produtos de binómios:

a) $(y+1)(y-1) = y^2 - 1$

b) $(b+5)(-5+b) = b^2 - 25$

c) $\left(-\frac{1}{2}a+1\right)\left(-\frac{1}{2}a-1\right) = \frac{1}{4}a^2 - 1$

d) $(-x-5)(-x+5) = x^2 - 25$

Casos notáveis da multiplicação

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Quadrado da soma
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Quadrado da diferença
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Diferença de quadrados

Exercícios resolvidos

1. Calcula: $(2x-5)(2x+5)$

Resolução:

$$(2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$$

2. Calcula e reduz os termos semelhantes: $(x-2)^2 - (2x+1)^2$

Resolução:

$$(x-2)^2 - (2x+1)^2 = \overbrace{x^2 - 4x + 4}^{(x-2)^2} - \overbrace{(4x^2 + 4x + 1)}^{(2x+1)^2}$$

• Desenvolve-se.

$$= x^2 - 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1$$

• Suprime-se os parêntesis precedidos do sinal «menos».

$$= x^2 - 4x^2 - 4x - 4x + 4 - 1$$

• Reduz-se os termos semelhantes.

$$= -3x^2 - 8x + 3$$

Factorização de polinómios

Factorizar um polinómio é escrevê-lo sob a forma de um produto de factores.

Como factorizar um polinómio?

1.º Caso: Factorizar, pondo em evidência o factor comum

Pela propriedade distributiva:

$$ka + kb = k(a+b)$$
$$ka - kb = k(a-b)$$

Considera as situações:

Situação 1: Factorizar $4x - 4y$

$$\underbrace{4x - 4y}_{} = 4(x-y)$$

O factor comum aos dois termos é o número 4.

Situação 2: Factorizar $3x^2 + 4x$

$$3x^2 + 4x = \underbrace{3xx + 4x}_{} = x(3x+4)$$

O factor comum aos dois termos é a letra x.

Situação 3: Factorizar $4y^2 - 8y$

$$4y^2 - 8y = \underbrace{4yy - 4y \times 2}_{} = 4y(y-2)$$

O factor comum é $4y$.

Situação 4: Factorizar $3(x+1) + x(x+1)$

$$\underbrace{3(x+1) + x(x+1)}_{} = (x+1)(3+x)$$

O factor comum é o binómio $(x+1)$.

2.º Caso: Factorizar, utilizando os casos notáveis da multiplicação

Considera as situações:

Situação 1:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a=b)$$

Factorizar $9x^2 - 16$

Não há nenhum factor comum. Trata-se de uma diferença de quadrados:

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x-4)(3x+4)$$

Situação 2:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Factorizar $4x^2 + 12x + 9$

Não há nenhum factor comum. Trata-se do quadrado de uma soma:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2 = (2x+3)(2x+3)$$

3.º Caso: Factorizar, pondo em evidência o factor comum e utilizando os casos notáveis da multiplicação

Considera a situação:

Factorizar $8x^2 - 2$

$$8x^2 - 2 = 2(\underbrace{4x^2 - 1}_{\text{diferença de quadrados}}) = 2(2x-1)(2x+1)$$

Para factorizar um polinómio deve-se:

- Averiguar se há factores comuns para pôr em evidência:

$$ka + kb = k(a+b)$$
$$ka - kb = k(a-b)$$

- Averiguar se se trata de um caso notável da multiplicação:

factorizar

$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

desenvolver

Nota:
- No mesmo polinómio podem existir factores comuns e tratar-se também de um caso notável.
- Desenvolvendo a expressão factorizada obtém-se a expressão inicial.

Exercícios resolvidos

1. Factoriza $4x - 20$

Resolução:

$4x - 20 = 4(x + 5)$

2. Factoriza $6x^2 + 15x$

Resolução:

$6x^2 + 15x = 3x(2x + 5)$

3. Factoriza $2(x + 1) + x(x + 1)$.

Resolução:

$2(x + 1) + x(x + 1) = (x + 1)(2 + x)$

4. Factoriza $4x^2 + 4x + 1$

Resolução:

$\underset{(2x)^2}{4x^2} + \overset{2\cdot 2x\cdot 1}{4x} + \underset{1^2}{1}$ Não há factores comuns a todos os termos do polinómio. É o desenvolvimento do quadrado de uma soma.

$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1)$

5. Decompõe num produto de factores $x^2 - 9$.

Resolução:

$x^2 - 9 = \underbrace{(x - 3)(x + 3)}_{\text{diferença de quadrados}}$

6. Factoriza $2y^2 - 18$.

Resolução:

$2y^2 - 18 = 2(y^2 - 9)$ Há um factor comum para pôr em evidência: é o 2.

$= 2(y - 3)(y + 3)$ $y^2 - 9$ é uma diferença de quadrados.

Divisão através da simplificação de um polinómio por um monómio

A compreensão de como funciona a divisão de polinómio por monómio irá depender de algumas definições e conhecimentos. Será preciso recordar como resolver a divisão de monómio por monómio.

- **Divisão de monómio por monómio**

Ao resolvermos uma divisão onde o dividendo e o divisor são monómios devemos seguir a regra, já conhecida: dividimos coeficiente com coeficiente e parte literal com parte literal.

Exemplos

1. $6x^3 \div 3x = \frac{6}{3} \cdot \frac{x^3}{x} = 2x^2$

2. $10x^2y^4 \div 2xy^2 = \frac{-10}{2} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^4}{y^2} = -5xy^2$

Observações: ao dividirmos as partes literais temos que estar atentos à propriedade de potenciação que diz que se a base é igual na divisão, dá-se a mesma base e subtraem-se os expoentes.

Depois de relembrar algumas definições vejamos alguns exemplos de como resolver divisões de polinómio por monómio.

Exemplos

1. $(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2)$

O dividendo $10a^3b^3 + 8ab^2$ é formado por dois monómios. Dessa forma, o divisor $2ab^2$, que é um monómio, irá dividir cada um deles.

$$(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2) = \frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$

Assim, transformamos a divisão de polinómio por monómio em duas divisões de monómio por monómio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$\frac{10a^3b^3}{2ab^2} + \frac{8ab^2}{2ab^2}$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$5a^2b + 4$$

ou

$$(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2) =$$
$$= \underbrace{(10a^3b^3 \div 2ab^2)}_{5a^2b} + \underbrace{(8ab^2) \div (2ab^2)}_{4}$$

Portanto, $(10a^3b^3 + 8ab^2) \div (2ab^2) = 5a^2b + 4$

2. $(9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy^2) \div (3x^2y)$
O dividendo $9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy$ é formado por três monómios. Dessa forma, o divisor $3x^2y$, que é um monómio, irá dividir cada um deles.

$$\frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{xy}{3x^2y}$$

Assim, transformamos a divisão de polinómio por monómio em três divisões de monómios por monómio. Portanto, para concluir essa divisão é preciso dividir coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

$$(9x^2y^3 - 6x^3y^2 - xy^2) \div (3x^2y) = \frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} - \frac{xy}{3x^2y} = 3y^2 - 2xy - \frac{1}{3x}$$

Exercícios resolvidos

1. Simplifica as expressões fraccionárias se for possível:

a) $\frac{4x+2}{2x}$

b) $\frac{x^2+x}{3x}$

c) $\frac{x^2-1}{x+1}$

d) $\frac{x}{ax+bx}$

Resolução:

a) $\frac{4x+2}{2x} = \frac{\cancel{2}(2x+1)}{\cancel{2}x} = \frac{2x+1}{x}$, sendo $x \neq 0$

b) $\frac{x^2+x}{3x} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3\cancel{x}} = \frac{x+1}{3}$, sendo $x \neq 0$

c) $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = x - 1$, sendo $x + 1 \neq 0$

d) $\frac{x}{ax+bx} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(a+b)} = \frac{1}{a+b}$, sendo $x \neq 0$

32. Desenvolve:

a) $(x + 3)(x + 3)$
b) $(y + 2)^2$
c) $(d - 1)^2$
d) $(n - 4)^2$
e) $(2x + 2)(2x + 2)$
f) $(3 + 2t)^2$

33. Calcula:

a) $(2x + 5)^2$
b) $(4x - 5)^2$
c) $(-x + 2)^2$
d) $(-y - 8)^2$
e) $(a + 0{,}5)^2$
f) $\left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2$
g) $\left(\frac{5}{4}a - 4\right)^2$
h) $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\right)^2$

34. Sem calcular $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$ e $\frac{1}{25} + \frac{1}{4}$, indica qual das expressões representa o maior número.

35. Copia e completa as igualdades:

a) $(x - 4)^2 = x^2 - \ldots + \ldots$
b) $(3a + 2b)^2 = 9a^2 + \ldots + 4b^2$
c) $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \ldots - \frac{x}{2} + \ldots$
d) $a^4 - 6a^2b + 9b^2 = (\ldots - 3b)^2$
e) $a^4 - 8a^2b + 16b^2 = (a^2 - \ldots)^2$
f) $16x^2 - 12xy + \frac{9}{4}y^2 = (\ldots - \ldots)^2$

36. Indica um valor de a que te permita escrever cada uma das expressões seguintes na forma de um quadrado de um binómio.

a) $y^2 + 8y + a$
b) $(2y)^2 + ay + 25$
c) $\frac{4}{9} + 4y + ay^2$

37. Calcula:

a) $(x + 1)(x - 1)$
b) $(-a + 2)(a + 2)$
c) $\left(\frac{1}{2} + y\right)\left(-y + \frac{1}{2}\right)$
d) $(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

38. Desenvolve e reduz os termos semelhantes.

a) $8a(a - 3)^2$
b) $5y(2y - 1)^2$
c) $7a(5 - a)(-a - 5)$

39. Factoriza os polinómios:

a) $15x - 30$ b) $7a - 28$

c) $x^2 - x$ d) $y^3 - y^2$

40. Factoriza os polinómios:

a) $2x^2 - 6x$ b) $4x^3 + 24x^2 - 16x$

c) $a^4 - 3a^3 - 2a^2$

41. Factoriza os polinómios:

a) $4st + 12t$ b) $6a^2 - 12ab$

c) $15x^2 + 5x + 20x^3$

42. Factoriza os polinómios:

a) $5(a - 1) + a(a - 1)$ b) $(a - 1)^2 + (a - 1)$

c) $(5x - 1)^2 + 7(5x - 1)$ d) $(y - 1)(y - 2)^2 - (y - 1)(y - 2)$

e) $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)$ f) $5(c - 1)^2 - 10(1 - c)$

g) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) - x(x + 1)$ h) $(y - 1)^2 - 3(1 - y)$

43. Decompõe os polinómios em factores:

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $y^2 - 4y + 4$

c) $x^2 - x$ d) $9x^2 + 9 + 18x$

e) $4t^2 + 20t + 25$ f) $36a^2 - 84a + 49$

g) $t^2 - t + \frac{1}{4}$

44. Decompõe num produto de factores:

a) $y^2 - 1$ b) $25 - a^2$

c) $\frac{9}{25} - \frac{x^2}{4}$ d) $(2x - 4)^2 - 36$

e) $169x^2 - (2x - 1)^2$ f) $(2x + 4)^2 - (x - 3)^2$

g) $x^4 - 1$ h) $\frac{1}{4} - (a + 2)^2$

45. Factoriza:

a) $2y^2 - 8$ b) $3x^2 - 48$

c) $2x^2 + 24x + 72$ d) $4 - 16y + 16y^2$

46. Decompõe num produto de factores:

a) $8x^2 - 2$ b) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2$

c) $16 - (x + 1)^2$ d) $(x - 1)(x + 3) + (5 - x)(1 - x)$

e) $2(a - 1)^2 + (4a - 4)$ f) $(2y + 1)^3 - 4(2y + 1)$

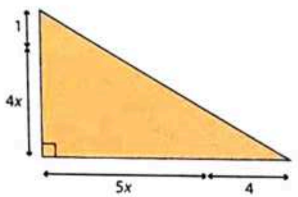
47. Simplifica as expressões fraccionárias se for possível:

a) $\frac{a+b}{a^2 + 2ab + b^2}$ b) $\frac{a-b}{a^2 - b^2}$

c) $\frac{4 - x^2}{x^2 + 2x}$ d) $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{3a^2 + 3ab}$

e) $\frac{1-y}{y^2 - 1}$ f) $\frac{2x+2}{x^2 + x}$

48. Observa o triângulo da figura:



a) Escreve uma expressão simplificada que representa a medida da área do triângulo.

b) Se $x = 2$ cm, calcula a medida da área do triângulo.

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

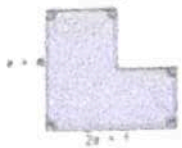
1. $\frac{7yz}{-7}$ é um monómio de coeficiente:

A. -7 B. $\frac{1}{7}$ C. $-\frac{1}{7}$ D. -1

2. O perímetro da figura é:

A. $3x + 5$ C. $6x + 10$

B. $2(x + 5)$ D. $3x$



3. A área, em cm², do rectângulo é:

A. $x^2 + x$ C. $4x + 2$

B. $2x + 1$ D. $x^2 + 1$

4. $(-1 - x)^2$ é:

A. $(1 - x)^2$ B. $(1 - x)(1 + x)$ C. $1 + 2x + x^2$ D. $1 - x^2$

5. O polinómio $(x - 1)^2 + (x - 1)$ factorizado é:

A. $(x - 1)x$ B. x^2 C. $(x - 1)(x - 1)$ D. $x^2 + x$

6. $100 - (x - 4)^2$ é o mesmo que:

A. $-x^2 + 8x + 84$ B. $10(x - 4)$ C. $(14 - x)(6 + x)$ D. $84 - x^2$

7. O valor numérico do polinómio $x^2y + 2x + \frac{xy^2}{4} - 1$ é 0 quando:

B. $x = 1$ e $y = -1$ B. $x = \frac{1}{2}$ e $y = -2$ C. $x = 0$ e $y = 0$ D. $x = -1$ e $y = -1$

8. Decompondo em factores o polinómio $3x^2y + 6x^3y^2 - x^2y^3$ obtemos:

A. $3x^2y(1 + 2xy - x^2y^2)$ B. $xy(3x + 6x^2y - y^2)$ C. $x^2y(3 + 6xy - y^2)$ D. $xy(3 + 6x^2y - y^2)$

9. $(x - 3)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ é uma factorização de:

A. $x^2 - 6x + 9 - \frac{1}{2}(x - 3)$ B. $x^2 - 9 + \frac{1}{2}(x - 3)$ C. $x^2 - \frac{15}{2} - 3x$ D. $x^2 - \frac{15}{2} - 3x$

10. Uma fracção equivalente a $\frac{a - a^2}{a^2 - 1}$ é:

A. $-\frac{a}{a - 1}$ B. $\frac{a}{a + 1}$ C. $-\frac{a}{a + 1}$ D. $\frac{a}{a - 1}$

2.ª Parte

1. Copia e completa com os sinais +, − ou ×, de modo a obteres afirmações verdadeiras.

a) $y \ldots y \ldots y = 3y$ b) $y \ldots y \ldots y = y^3$ c) $y \ldots y \ldots y \ldots y = y^2 + 2y$

2. Prova que:

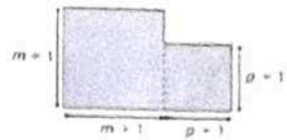
a) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ b) $x^2 + y^2 = \frac{(x - y)^2 + (x + y)^2}{2}$

3. Qual das afirmações é falsa?

A. $-\frac{1 - 3x}{2} = \frac{-1 + 3x}{2}$ B. $\frac{8x - 6}{3} = \frac{8}{3}x - 2$ C. $\frac{1}{5} - \frac{3 - x}{5} = \frac{2 - x}{5}$

4. Atribui um valor a p, de modo que $\frac{x^2}{9} + px + 9$ represente o desenvolvimento do quadrado de uma soma.

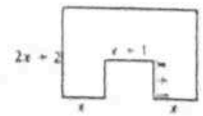
5. Na figura abaixo encontra-se a planta da piscina de um clube. Escreve uma expressão simplificada que represente o perímetro da piscina.



6. Determina a expressão equivalente a:

$$\frac{2a}{a^2 - 4} - \frac{a + 2}{2a + 4}.$$

7. Indica o polinómio que expressa a área da figura seguinte:



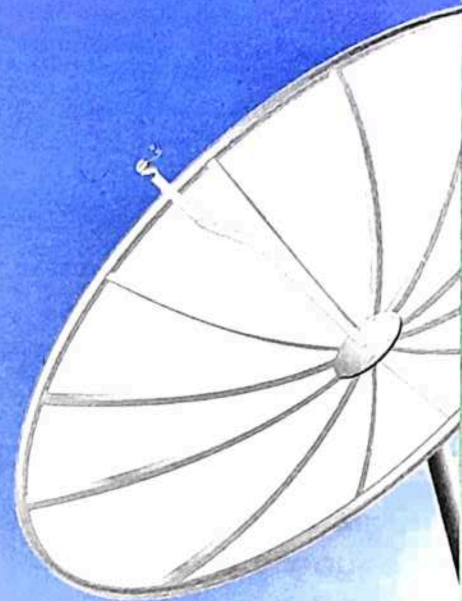
8. Factoriza a expressão seguinte:

$$6\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + z(3x - 2y).$$

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar as equações quadráticas.
- Resolver as equações quadráticas (incompletas e completas) aplicando:
  a) Factorização e lei de anulamento
  b) Fórmula resolvente; soma e produto de raízes da equação quadrática; outros métodos
- Equacionar problemas conducentes às equações quadráticas.
- Resolver problemas conducentes às equações quadráticas.



CONTEÚDOS

Equações quadráticas

- Noção de equação quadrática
- Lei do anulamento do produto
- Resolução de equações quadráticas
  a) Incompletas do tipo:
  $ax^2 = 0$
  $ax^2 + c = 0$
  $ax^2 + bx = 0$
  usando a lei do anulamento
  b) Completas do tipo:
  $ax^2 + bx + c = 0$ usando a lei do anulamento do produto
- Fórmula resolvente
- Soma e produto de raízes da equação quadrática
- Factorização de um trinómio:
  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Problemas conducentes às equações quadráticas

Equação quadrática

UNIDADE 4

Págs. 78 a 101

Equações do 2.º grau

«O produto de dois números inteiros consecutivos é 380.»

Números inteiros consecutivos é o mesmo que números inteiros seguidos.

Podemos traduzir este enunciado por uma equação.

Se um dos números for x, o seu consecutivo é $x + 1$, logo, a equação que traduz o enunciado é:

$$x(x+1) = 380 \Leftrightarrow$$

Aplicando a propriedade distributiva

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 380$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 380 = 0$$

→ equação do 2.º grau porque o termo de maior grau desta equação é de 2.º grau.

Chama-se equação do 2.º grau, em x, toda a equação que pode ser escrita na forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Forma canónica de uma equação do 2.º grau

Quando uma equação do 2.º grau está escrita na forma:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

em que:

- O 1.º membro é um polinómio reduzido, do 2.º grau.
- O 2.º membro é zero.

Diz-se que a equação está na forma canónica, onde:

x → incógnita

ax^2 → termo do 2.º grau, cujo coeficiente é a

bx → termo do 1.º grau, cujo coeficiente é b

c → termo independente

Exemplos

São equações do 2.º grau, escritas na forma canónica:

- $2x^2 + 3x - 1 = 0$ em que $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$
- $-y^2 + 3y = 0$ em que $a = -1$, $b = 3$, $c = 0$
- $-\frac{1}{2}x^2 + 13 = 0$ em que $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = 13$

Numa equação se substituir a incógnita, por um número e se obter uma igualdade verdadeira, então diz-se que este número é solução da equação.

Assim $x = 0$ e $x = 2$, são soluções da equação $x^2 - 2x = 0$ porque:

- Se $x = 0$ então $0^2 - 2 \times 0 = 0$, ou seja $0 = 0$
- Se $x = 2$ então $2^2 - 2 \times 2 = 0$, ou seja $0 = 0$.

Exercício resolvido

Escrever na forma canónica a equação $(3x - 1)(x + 1) = 4$ e indicar os valores a, b, e c.

Resolução:

$$(3x - 1)(x + 1) = 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - x - 1 = 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ logo, } a = 3,\ b = 2 \text{ e } c = -5.$$

Equações do 2.º grau completas e incompletas

Uma equação do 2.º grau deve sempre ser escrita na forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então o 1.º membro da equação contém exactamente três termos não nulos: um termo de 2.º grau, outro do 1.º grau e um termo independente:

Considera $2x^2 + 5x + 7 = 0$ → equação completa do 2.º grau

1 • Se $a \neq 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$, a equação não tem termo do 1.º grau e escreve-se:

$ax^2 + c = 0$ Diz-se equação incompleta do 2.º grau.

$-2x^2 + 2 = 0$

2 • Se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$, a equação não tem termo independente e escreve-se:

$ax^2 + bx = 0$ Diz-se equação incompleta do 2.º grau.

$4x^2 + 5x = 0$

3 • Se $a \neq 0$, $b = 0$ e $c = 0$, a equação não tem termo do 1.º grau nem termo independente e escreve-se:

$ax^2 = 0$ Diz-se equação incompleta do 2.º grau.

$3x^2 = 0$

UNIDADE 4

Depois de escreveres uma equação do 2.º grau na forma canónica, $ax^2 + bx + c = 0$, podes dizer se a equação é completa ou incompleta.

Equações do 2.º grau $ax^2 + bx + c = 0$
- → Completa: tem os três termos, não nulos.
- → Incompleta: falta-lhe o termo do 1.º grau, ou o termo independente ou ambos.

Factorização de um binómio ou trinómio

Exercícios resolvidos

1. Efectua e reduz os termos semelhantes em: $(2x + 1)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

$(a + b)(c + d) =$
$= ac + ad + bc + bd$

Resolução:

$$(2x + 1)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}x + 1 = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

2. Desenvolve os casos notáveis:

a) $(x + 1)^2$ b) $(3x - 2)^2$ c) $(9x - 1)(9x + 1)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Resolução:

a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ b) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$ c) $(9x - 1)(9x + 1) = 81x^2 - 1$

3. Factoriza os polinómios:

a) $4x^2 + 2x$ b) $(x + 1) - 2(x + 1)(x - 1)$

$ka + kb = k(a + b)$

Resolução:

a) $4x^2 + 2x = 2x(2x + 1)$

b) $(x + 1) - 2(x + 1)(x - 1) = (x + 1)[1 - 2(x - 1)] = (x + 1)(-2x + 3)$

4. Factoriza os polinómios (usando os casos notáveis):

a) $x^2 + 2x + 1$ b) $81x^2 - 36x + 4$ c) $25x^2 - 16$ d) $3x^2 - 6x + 3$

- $a^2 + 2ab + b^2 =$
$= (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
- $a^2 - 2ab + b^2 =$
$= (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Resolução:

a) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$

b) $81x^2 - 36x + 4 = (9x - 2)^2 = (9x - 2)(9x - 2)$

c) $25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$

d) $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 = 3(x - 1)(x - 1)$

Factorização e lei do anulamento do produto

1. O produto de um número pela sua soma com quatro é zero. Qual é o número?

Resolução:

Este enunciado traduz-se pela equação: $x(x + 4) = 0$

- 1.ª tentativa para resolver $x(x + 4) = 0$:

Efectuar os cálculos no primeiro membro da equação: $x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0$

Obtém-se uma equação do 2.º grau, em x^2, que não sabes resolver.

- 2.ª tentativa para resolver $x(x + 4) = 0$:

O que é necessário para que um produto de factores desconhecidos seja nulo? Pelo menos um dos factores tem que ser nulo.

Assim:

$$x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0$$

$\vee$ lê-se «ou».

Aplicou-se a lei do anulamento do produto, o que conduziu à resolução de duas equações do 1.º grau:

$x = 0 \vee x = -4$ $S = \{0\} \cup \{-4\}$ $S = \{-4, 0\}$

O problema tem duas soluções: 0 e − 4.

Lei do anulamento do produto:
- Se um factor é nulo, o produto é nulo.
- Se o produto é nulo, um dos factores é nulo.

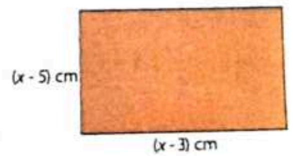
Verificação:

- Se $x = 0$ vem $0 \times (0 + 4) = 0$
$0 \times 4 = 0$
$0 = 0$ verdadeiro
- Se $x = -4$ vem $-4 \times (-4 + 4) = 0$
$-4 \times 0 = 0$
$0 = 0$ verdadeiro

O conjunto solução da equação $x(x + 4) = 0$ é $S = \{-4, 0\}$.

Quando ligamos duas condições com o sinal $\vee$ obtemos uma nova condição, a que se chama disjunção das duas condições iniciais. Por exemplo, para o preenchimento de um lugar exige-se que o candidato seja matemático ou engenheiro geógrafo. Pode ser matemático e não engenheiro geógrafo (ou o contrário). Mas também pode ser matemático e engenheiro geógrafo.

2. Quais são as dimensões do rectângulo, se a sua área é 15 cm²?



Resolução:

A equação que traduz o problema é: $(x - 5)(x - 3) = 15$

Desenvolvendo o primeiro membro:

$$(x-5)(x-3)=15$$

$$x^2-3x-5x+\cancel{15}=\cancel{15}$$

$x^2-8x=0$ · Equação do 2.º grau.

$x(x-8)=0$ · Factoriza-se o primeiro membro da equação, pondo x em evidência.

$x=0 \vee x-8=0$ · Usa-se a lei do anulamento do produto.

$x=0 \vee x=8$

O conjunto solução da equação $(x-5)(x-3)=15$ é $S=\{0, 8\}$.

Interpretação das soluções perante o problema proposto:

· se $x=0$, no rectângulo

$x-5=0-5=-5$

$x-3=0-3=-3$

Impossível, pois as dimensões não podem ser negativas.

· se $x=8$, no rectângulo

$x-5=8-5=3$

$x-3=8-3=5$

O rectângulo tem de dimensões 3 cm e 5 cm.

3. Resolve a equação: $5\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-1)=0$

Resolução:

$$\underset{\text{É sempre diferente de zero.}}{5}\overbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-1)}^{\text{Produto}}=\overset{\text{Zero}}{0}$$

$\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0 \vee 2x-1=0$ · Aplica-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=\frac{1}{2}$ O conjunto solução é $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. Escreve uma equação do 2.º grau que admita as soluções 5 e − 7.

Resolução:

Por exemplo: $(x-5)(x+7)=0$

· Se substituirmos x por 5 vem:

$(5-5)(5+7)=0$

$0\times 12=0$

$0=0$ verdadeiro

· Se substituirmos x por −7 vem:

$(-7-5)(-7+7)=0$

$-12\times 0=0$

$0=0$ verdadeiro

Lei do anulamento do produto

· Um produto é nulo se e só se pelo menos um dos factores é nulo:

$$\boxed{ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0}$$

Condições para aplicar esta lei à resolução de equações:

· Um membro da equação tem de ser zero.

· O outro um produto.

Exercícios resolvidos

1. Factoriza a expressão: $33x^2-3x$.

Resolução:

$33x^2-3x=3x(11x-1)$ Pôs-se em evidência o factor comum, $3x$.

2. Factoriza o polinómio: $(x+2)^2-9$.

Resolução:

$(x+2)^2-9=(x+2+3)(x+2-3)=(x+5)(x-1)$ Desenvolvimento de diferença de quadrados

3. Resolve a equação: $(3x-1)(x-7)=0$.

Resolução:

$(3x-1)(x+7)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \vee x+7=0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow 3x=1 \vee x=-7$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \vee x=-7$ $S=\left\{-7, \frac{1}{3}\right\}$.

4. Resolve a equação: $(3x-2)(x+5)=0$.

Resolução:

$(3x-2)(x+5)=0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \vee x+5=0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow 3x=2 \vee x=-5$

$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \vee x=-5$ $S=\left\{-5, \frac{2}{3}\right\}$.

➡

5. Resolve por dois processos diferentes, a equação: $x^2 = 25$.

Resolução:

É uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$.

1.º processo:

$x^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$ Extrai-se a raiz quadrada.

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$

2.º processo:

$x^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$ Factoriza-se o 1.º membro, desenvolvimento da diferença de produtos.

$\Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \vee x + 5 = 0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5$

Verificação

- Se $x = -5$ vem: $(-5)^2 = 25$
  $25 = 25$ verdadeiro
- Se $x = 5$ vem: $(5)^2 = 25$
  $25 = 25$ verdadeiro

O conjunto solução da equação é $\{-5, 5\}$.

6. Resolve a equação: $(x - 3)(x + 5) = 0$.

Resolução:

$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$

Verificação

- Se $x = -5$ vem $(-5 - 3)(-5 + 5) = 0$
  $-8 \times 0 = 0$
  $0 = 0$ verdadeiro
- Se $x = 3$ vem $(3 - 3)(3 + 5) = 0$
  $0 \times 8 = 0$
  $0 = 0$ verdadeiro

O conjunto solução é $\{-5, 3\}$.

Exercícios de consolidação

1. Dada a equação $(a + 3)(a - 1) = 0$.
   a) Explica por que é que esta equação está nas condições para se aplicar a lei do anulamento do produto.
   b) Que valor deve ter a para que $a + 3 = 0$?
   c) Quais são as soluções da equação dada?

2. Mentalmente, descobre as soluções de cada equação:
   a) $x(x + 1) = 0$ b) $-2(a + 2) = 0$ c) $2y(y - 3) = 0$

3. Resolve as equações:
   a) $(x - 2)(2x - 5) = 0$ b) $(1 - x)(2 - x) = 0$
   c) $(-5 + y)(y - 4) = 0$ d) $3(2x + 1)(2x + 3) = 0$

4. Escreve uma equação de grau superior ao primeiro que admita como soluções:
   a) 0 e 1 b) −1 e 1

5. Quais das seguintes equações são do 2.º grau com uma incógnita? Justifica a resposta.
   a) $2x + 3y = 9$ b) $9x^2 = -3x + 5$
   c) $3x(x + 1) = 9$ d) $x^3 + x^2 - 3x = 1$

6. Escreve, na forma canónica, a equação $(2x - 1)(x + 1) = 2$ e indica os valores a, b e c.

7. Copia e completa o quadro.

Equação	Equação na forma canónica	a	b	c
$x^2 = 2x - 5$				
$3x(x + 1) = 0$				
$7x^2 = 36$				
$2x(x - 1) = (x - 1)^2$				
$5(x^2 - 3x) = -15x$				

8. Traduz em linguagem simbólica:
   a) A soma do quadrado de um número com o seu dobro é 3.
   b) A diferença entre um número e o seu quadrado é zero.
   c) O produto de um número pelo seu consecutivo é 2.
   d) O quadrado da diferença entre um número e 2 é 9.

9. Escreve:
   a) Uma equação completa do 2.º grau, na forma canónica.
   b) Uma equação incompleta do 2.º grau, sem termo independente.
   c) Uma equação do 2.º grau incompleta que admita as raízes 1 e −1.

10. Factoriza as expressões:
   a) $9x^2 + 27x$ b) $\frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{8}x$ c) $5y^2 - 10y$

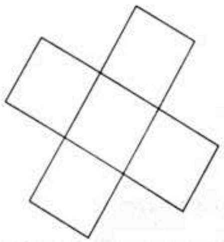
11. Os polinómios seguintes são casos notáveis da multiplicação. Factoriza-os:
   a) $x^2 + 2x + 1$
   b) $16x^2 - 25$
   c) $\frac{81}{121}y^2 - \frac{9}{4}$
   d) $64x^2 - 112x + 49$
   e) $\frac{16}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}$
   f) $\frac{49}{36} + x^2 - \frac{7}{3}x$

12. Factoriza os polinómios:
   a) $(3x - 1)^2 - 25$ b) $25x^2 - (x + 1)^2$ c) $\frac{9}{4}y^2 - (y + 3)^2$

13. Resolve as equações:
   a) $(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$
   b) $\frac{5}{4}(x + 2)(x - 4) = 0$
   c) $3x(x + 1)(x + 7) = 0$
   d) $\frac{5}{2}(-x + 2)(-x - 9) = 0$

14. Mostra que:
   a) $(x - 5)^2 - x^2 = 5(5 - 2x^2)$
   b) $(x - 5)^2 - (x + 5)^2 = 20x$
   c) $3\left(\frac{1}{3} - x\right)(9x + 5) = 5 - 33x$
   d) $\frac{81}{16}(x - 2)^2 = \left(\frac{17}{4} - x\right)\left(\frac{1}{4} + x\right)$

15. A área desta figura constituída por 5 quadrados iguais é 400 cm².



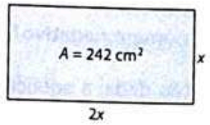
   a) Quanto mede o lado do quadrado?
   b) Qual é o perímetro da figura?

Resolução de equações $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$

Problema:

Qual é a largura de um rectângulo de área 242 cm², em que o comprimento é o dobro da largura?

Resolução:



$c \cdot l = A_{\square}$

$\Leftrightarrow 2x \cdot x = 242$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 242$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 242 = 0$ Equação do tipo $ax^2 + c = 0$; Equação incompleta do 2.º grau.

$\Leftrightarrow x^2 = 121$ Dividem-se ambos os membros de equação por 2.

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{121}$ Extrai-se a raiz quadrada.

$\Leftrightarrow x = 11 \vee x = -11$

Esta equação também se pode resolver por outro processo:

$2x^2 - 242 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 121) = 0$ Põe-se em evidência o factor comum, neste caso 2.

$\Leftrightarrow 2(x - 11)(x + 11) = 0$ Transforma-se a diferença de quadrados num produto.

$\Leftrightarrow \underbrace{2 = 0}_{\text{Condição impossível}} \vee x - 11 = 0 \vee x + 11 = 0$ Aplica-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x = 11 \vee x = -11$

O conjunto solução da equação $2x^2 - 242 = 0$ é $\{-11, 11\}$.

Interpretação das soluções do problema:

Só $x = 11$ é solução do problema proposto. Pensa porquê!

O rectângulo tem 11 cm de largura.

Problema:

Qual o número cujo quadrado adicionado a 4 é zero?

Resolução:

Vamos designar esse número por x.
Então:

$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ Equação incompleta do 2.º grau do tipo $ax^2 + c = 0$

Haverá algum número real cujo quadrado seja um número negativo?

Não existem números reais que verifiquem a equação dada; a equação diz-se impossível em $\mathbb{R}$. O conjunto solução desta equação é $\{\ \}$ ou $\varnothing$.

Problema:

O triplo do quadrado de um número é zero. Qual é o número?

Resolução:

Com certeza, mentalmente, já descobriste o número.

Designando o número por x, vem:

$3x^2 = 0$ Equação incompleta do 2.º grau do tipo $ax^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

A solução da equação, que é também solução do problema, é zero.

Como resolver?

Para as equações incompletas do 2.º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$:

$$ax^2 = -c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

- Se $-\frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ equação impossível
- Se $-\frac{c}{a} > 0 \rightarrow$ equação possível com duas soluções simétricas $\sqrt{\frac{-c}{a}}$ e $-\sqrt{\frac{-c}{a}}$
- Se $-\frac{c}{a} = 0 \rightarrow$ equação possível com uma só solução: zero

Resolução de equações $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Problema:

A diferença entre o quadrado de um número e o seu quádruplo é zero. Qual é o número?

Resolução:

Designando o número por x, vem:

$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$ Equação incompleta do 2.º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$

$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$ Factoriza-se o 1.º membro da equação, pondo x em evidência.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

O conjunto solução da equação é $\{0, 4\}$.
As soluções do problema são os números 0 e 4.

Como resolver?

Para as equações do 2.º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$ Factoriza-se o 1.º membro, pondo o factor comum em evidência.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$

O conjunto solução da equação do 2.º grau incompleta, $ax^2 + bx = 0$, é $\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

Resolução de equações $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$

- Usando a lei do anulamento do produto

Vamos resolver uma equação em que o 1.º membro é o desenvolvimento do quadrado de um binómio.

Resolver a equação: $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$(2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$ O 1.º membro é o desenvolvimento de um caso notável: $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$

$\Leftrightarrow (2x+1)(2x+1) = 0$ Factoriza-se o 1.º membro.

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \vee 2x + 1 = 0$ Usa-se a lei do anulamento do produto.

$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Diz-se que $-\frac{1}{2}$ é solução da equação dada e, portanto, o conjunto solução é $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

- Usando a fórmula resolvente

Quando uma equação do 2.º grau está na forma canónica:

$ax^2 + bx + c = 0$, para a, b e c $\in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

podes determinar rapidamente as raízes ou soluções, usando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente, em que:

- a é o coeficiente do termo do 2.º grau.
- b é o coeficiente do termo do 1.º grau.
- c é o termo independente.

Isto é: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Exercícios resolvidos

1. Resolve a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$, pela fórmula resolvente.

Resolução:

Dado que a equação já está na forma canónica:

- Registam-se os valores de a, b e c: $a = 1$ $b = -6$ $c = 5$
- Substituem-se esses valores na fórmula resolvente:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6+4}{2} \vee x = \frac{6-4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

A equação é possível; tem duas soluções diferentes.

O conjunto solução da equação é {1, 5}.

2. Resolver a equação $x(x - 15) - x = -64$, pela fórmula resolvente.

Resolução:

Escreve-se a equação na forma canónica:

$$x^2 - 15x - x = -64 \Leftrightarrow x^2 - 16x - 64 = 0$$

- Registam-se os valores de a, b e c:

$$a = 1 \quad b = -16 \quad c = 64$$

- Substituem-se esses valores na fórmula resolvente:

$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times 1 \times 64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 \pm 0}{2} \Leftrightarrow x = 8$$

A equação é possível.

O conjunto solução da equação é {8}.

3. Resolver a equação $x(x + 4) = -9$, pela fórmula resolvente.

Resolução:

Escreve-se a equação na forma canónica: $x^2 + 4x + 9 = 0$

- Registam-se os valores de a, b e c:

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = 9$$

- Substituem-se esses valores na fórmula resolvente:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

Mas, $\sqrt{-20}$ não existe no conjunto dos números reais porque não há nenhum número real que elevado ao quadrado dê um número negativo.

A equação é impossível em $\mathbb{R}$; não tem soluções.

O conjunto solução é $\varnothing$ ou { }.

Na resolução de qualquer equação do 2.º grau, deves escolher o processo mais simples e adequado de entre os seguintes:

- Extracção da raiz quadrada
- Lei do anulamento do produto
- Fórmula resolvente

A fórmula resolvente para equações do 2.º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

com: $a \rightarrow$ coeficiente do termo do 2.º grau
$b \rightarrow$ coeficiente do termo do 1.º grau
$c \rightarrow$ termo independente

O número de soluções depende do valor de $b^2 - 4ac$, chamado binómio discriminante.

- Se $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ a equação é possível e tem duas soluções diferentes.
- Se $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ a equação é possível e tem uma solução.
- Se $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow$ a equação é impossível; não tem solução no conjunto $\mathbb{R}$.

Soma e produto das raízes de uma equação do 2.º grau

Observa o quadro:

Equação	Raízes	Soma das raízes	Produto das raízes
$x^2 - 3x - 4 = 0$	$x = -1 \vee x = 4$	$S = 3$	$P = -4$
$2x^2 - 3x - 5 = 0$	$x = -1 \vee x = \frac{5}{2}$	$S = \frac{3}{2}$	$P = -\frac{5}{2}$
$6x^2 + x - 1 = 0$	$x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{3}$	$S = -\frac{1}{6}$	$P = -\frac{1}{6}$
$4x^2 - 9 = 0$	$x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{2}$	$S = 3$	$P = -\frac{9}{4}$

Compara os resultados das duas últimas colunas com os coeficientes das equações correspondentes. Que observas?

A conclusão do quadro anterior vai permitir que resolvas exercícios, tais como:

Exercícios resolvidos

1. Escreve uma equação do 2.º grau na forma $x^2 - Sx + P = 0$, sabendo que admite as raízes 2 e 3.

Resolução:

$S = 2 + 3 = 5$
$P = 2 \times 3 = 6$

A equação é:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2. Resolve mentalmente a equação:
$x^2 - 3x + 2 = 0$

Resolução:

$S = 3$
$P = 2$

Tens de descobrir dois números cujo produto seja 2 e a soma 3.
Então: 2 e 1 são as soluções da equação dada.

Dada uma equação do 2.º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com soluções x_1 e x_2:

- Se $a = 1$, $\quad S = x_1 + x_2 = -b \quad$ e $\quad P = x_1 \cdot x_2 = c$
- Se $a \neq 1$, $\quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad$ e $\quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Factorização de um trinómio do 2.º grau

A partir da forma geral do trinómio $ax + bx + c$, que sabemos possuir $a \neq 0$, teremos:

1. Colocando a em evidência, obteremos $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

2. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ e recordando a soma e o produto das raízes de uma equação do 2.º grau, podemos escrever:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow -(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}$ e $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, o que nos leva a:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] = a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) \rightarrow$$

$$a(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2) = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a\left[(x - x_1)(x - x_2)\right]$$ colocamos em evidência $(x - x_1)$

E, dessa forma, um trinómio do 2.º grau poderá ser decomposto como:

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x - x_1)(x - x_2)\right]$$

Onde x_1 e x_2 são os zeros do trinómio $ax^2 + bx + c$

Observação: se o trinómio não possuir zeros ou raízes, ele não poderá ser decomposto num produto de factores do primeiro grau.

Exercícios resolvidos

1. Decompor em factores do 1.º grau o trinómio $5x^2 - 26x + 5$

Resolução:

Determinando os zeros do trinómio, teremos: $5x^2 - 26x + 5 = 0$

Temos: $a = 5$; $b = -26$ e $c = 5$, aplicando a fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Teremos: $x = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \times 5 \times 5}}{2 \times 5} \Leftrightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{26 + 24}{10} \vee x_2 = \frac{26 - 24}{10} \Leftrightarrow x_1 = 5 \vee x_2 = \frac{1}{5}$

como: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ou seja,

$5\left[(x - 5)\left(x - \frac{1}{5}\right)\right] = 5\left[(x - 5)\left(\frac{5x - 1}{5}\right)\right]$ Reduzir ao mesmo denominador e simplificar

$\rightarrow$

2. Decompor em factores do 1.º grau o trinómio $x^2 - 3x - 4$

Resolução:

Determinando os zeros do trinómio, teremos: $x^2 - 3x - 4 = 0$

Temos $a = 1$, $b = -3$ e $c = -4$ e aplicando a fórmula resolvente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Teremos: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3+5}{2}$ $x_2 = \frac{3-5}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = -1$ como $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

Teremos: $x^2 - 3x - 4 = 1(x - 4)(x + 1) = (x - 4)(x + 1)$

Problemas com equações do 2.º grau

Ao longo do capítulo, já resolveste problemas que envolveram equações do 2.º grau. Vamos resolver mais alguns.

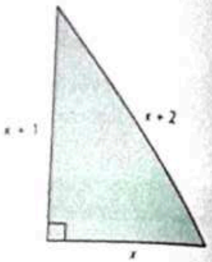
Para resolver um problema deves:

- Fazer um desenho ou um esquema, se necessário.
- Identificar os dados e a incógnita.
- Traduzir o enunciado por uma equação.
- Resolver a equação.
- Interpretar e analisar as soluções.

Problema:

O Sitoe quer vedar, com rede, um canteiro com a forma de um triângulo rectângulo e cujas dimensões, em metros, são três números inteiros consecutivos.

Será que 10 metros de rede chegarão para vedar o canteiro?



Resolução

- Se o lado menor for x, os outros lados serão $x + 1$ e $x + 2$.
- Pelo Teorema de Pitágoras:

$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow$ Equação completa do 2.º grau

- Usando a fórmula resolvente:

$a = -1$ $\quad b = 2$ $\quad c = 3$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \text{ e } x = 3$$

Mas $x = -1$ não pode ser lado do triângulo. Então, o lado será: $x = 3$ e os lados do triângulo são 3 m, 4 m e 5 m.

A quantidade de rede necessária para vedar o canteiro é: Perímetro $= 3 + 4 + 5 = 12$ m

R.: 10 metros não chegam para vedar o canteiro.

16. Resolve, por dois processos diferentes, as equações:

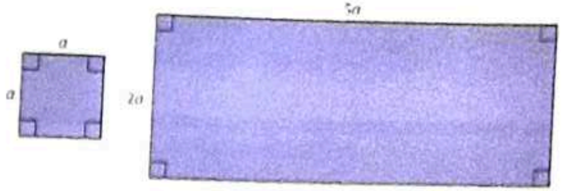
a) $x^2 = 9$ $\quad$ b) $4x^2 = 4$ $\quad$ c) $x^2 = \frac{9}{4}$

17. Resolve as equações:

a) $7x^2 - 14 = 0$ $\quad$ b) $-15x^2 = -135$

c) $(3x - 1)(3x + 1) = 8$ $\quad$ d) $(6 - x)(6 + x) = 20$

18. Os dois pátios representados na figura - um quadrangular e o outro rectangular - têm de área, juntos, 1331 m².



Quais são as dimensões de cada pátio?

19. O quadrado do óctuplo de um número positivo é 36. Descobre-o.

20. Resolve as equações:

a) $x^2 - 5x = 0$ $\quad$ b) $7x = -14x^2$ $\quad$ c) $3x - 9x^2 = 0$

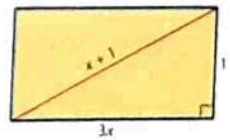
d) $\frac{x^2}{12} - \frac{3}{4}x = 0$ $\quad$ e) $\frac{13x^2}{7} = 5x$

21. Resolve as equações:

a) $-\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{3}x$ $\quad$ b) $9x^2 = 36x$

c) $\frac{1}{2}(x^2 - x) = 3x$ $\quad$ d) $\frac{1}{3}(x-1)^2 = -\frac{2}{3}x + 4$

22. Observa a figura.



Determina a medida da diagonal do rectângulo (unidade: cm).

23. Resolve as seguintes equações, usando a lei do anulamento do produto.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $4x^2 + 1 = -4x$

c) $\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

d) $-50x = 25x^2 + 25$

e) $4 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}x^2$

f) $\frac{49}{9}x^2 = \frac{14}{3}x - 1$

24. Resolve as seguintes equações, utilizando a fórmula resolvente:

a) $5x^2 - 7x + 2 = 0$

b) $x^2 - 5x = -4$

c) $3y^2 - 5 = 2y$

d) $x^2 - 1 = \frac{3x}{2}$

e) $x^2 = -3 - 2x$

25. Partindo do cálculo do binómio discriminante, indica o número de soluções de cada uma das equações:

a) $x^2 - 5x - 7 = 0$

b) $x^2 + 2x + 9 = 0$

c) $x^2 = 6x - 9$

26. Resolve as equações seguintes, aplicando a lei do anulamento do produto.

a) $(x-1)(x+3) = 0$

b) $\left(5x - \frac{1}{2}\right)(x+4) = 0$

c) $(2x+1)\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0$

d) $3x(x-1) = 0$

27. Considera a expressão $(x-1)(2x+3) - (x-1)^2$.

a) Desenvolve e reduz os termos semelhantes.

b) Factoriza.

c) Resolve, por dois processos diferentes, a equação que se obtém, igualando a expressão dada a zero.

28. Sem resolveres as equações, indica a soma e o produto das suas raízes.

a) $x^2 - 5x + 1 = 0$

b) $x^2 = 3x + 12$

c) $5x - 1 = -x^2$

29. Factoriza os trinómios do 2.º grau seguintes:

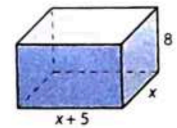
a) $x^2 + x - 6$

b) $3x^2 - 21x + 3$

c) $x^2 + 3x - 28$

30. Uma estufa ocupa um terreno rectangular de 15 m por 8 m. Pretende-se aumentar, igualmente, o comprimento e a largura de modo que a área do terreno ocupado pela estufa aumente 78 m². Quantos metros aumentam o comprimento e a largura da estufa?

31. Que dimensões tem a caixa que vês na figura, sabendo que o seu volume é 400 cm³? (unidade: cm)



32. Escolhe, de entre as equações seguintes:

- $3x^2 - 2x - 4 = 0$
- $x^2 + 3x = 0$
- $x^2 + 4x + 4 = 0$
- $x^2 + 5x + 12 = 0$

a) Uma impossível em $\mathbb{R}$.

b) Uma que admita uma só solução.

c) Uma que admita como soluções números irracionais.

33. Escreve uma equação do 2.º grau, na forma canónica, que admita como soluções 1 e − 4. Resolve a equação por dois processos diferentes.

34. Determina k de modo que a equação $x^2 + 6x + k = 0$:

a) Admita uma só raiz real.

b) Admita as soluções − 1 e − 5.

35. Completa a demonstração da fórmula resolvente.

Consideremos a equação completa do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

- Mudamos o termo c para o segundo membro da equação: $ax^2 + bx = -c$
- Multiplicamos ambos os membros por $4a$ ($a \neq 0$) e ficamos com: $4a^2x +$ ____ $bx = -4ac$
- Adicionamos b^2 aos dois membos: $4a^2x + 4abx + b^2 =$ ___ $- 4ac$
- Factorizamos o primeiro membro: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
- Se $b^2 - 4ac \geq 0$ podemos escrever: ________ $= \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ e resolvendo em ordem a x:

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\_\_\_\_}}{2a}$ solução da equação do 2.º grau.

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

1. As soluções da equação $x^2 = -3x$ são:

A. 3 e −3 B. 1 e −3 C. 0 e −3 D. 0 e 3

2. A equação $(x + 1)(x + 3) = 0$ é equivalente a:

A. $x^2 + 3 = 0$ B. $x^2 + 4x + 3 = 0$ C. $x^2 + 3x + 1 = 0$ D. $x^2 - 4x - 3 = 0$

3. A medida da diagonal do quadrado  $\sqrt{3}$ é:

$\sqrt{3}$

A. $2\sqrt{3}$ B. 6 C. 9 D. $\sqrt{6}$

4. $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ é o conjunto solução da equação:

A. $x^2 = -2$ B. $x^2 = 2$ C. $x + \sqrt{2} = 0$ D. $x - \sqrt{2} = 0$

5. A soma das raízes da equação $2x - x^2 = -3$ é:

A. 2 B. −2 C. 3 D. −1

6. O conjunto solução da equação $x^2 = 9$ é:

A. {3} B. {−3} C. {3, −3} D. {0, 9}

7. O conjunto solução da equação $x^2 = -9$ é:

A. {3} B. {−3} C. {3, −3} D. { }

8. O produto das raízes da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$ é:

A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. 2

2.ª Parte

1. De entre as quatro equações seguintes:

- $(x + 1)^2 = -2x$
- $(2x - 1)^2 = (3x + 1)^2$
- $(x - 3)(x + 2) = -6$
- $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2$

Escolhe uma que seja do:

a) 2.º grau incompleta.

b) 2.º grau e admita soluções irracionais.

c) 2.º grau e admita as soluções 0 e − 2.

2. Dada a expressão: $(x + 3)(2x - 1) - 2(2x - 1)$

a) Factoriza a expressão dada.

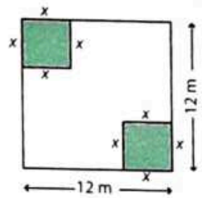
b) Resolve, por dois processos diferentes, a equação que se obtém, igualando a zero a expressão dada.

3. À pergunta «Que idade tens?»
A Margarida respondeu:
«A soma do quadrado da minha idade com a minha idade em anos é 156».
Determina a idade da Margarida.

4. Resolve, pela lei do anulamento do produto, as equações:

a) $0{,}1x^2 = \frac{5}{10}x$ b) $4x^2 - 12x = -9$ c) $3x(x - 1) - 5(-x + 1) = 0$

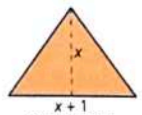
5. A figura representa o *hall* quadrado de um hotel, com 12 m de lado, coberto a mármore branco e verde.



a) Escreve uma expressão que permita calcular a área ocupada pelo mármore branco.

b) Sabe-se que a área ocupada pelo mármore branco é sete vezes a área ocupada pelo mármore verde. Calcula x.

6. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares.
Cada peça é um triângulo isósceles, como vês na figura, e tem de área 10 dm^2.
Calcula a base e a altura de cada peça.



7. A Teresa afirmou: «$x^2 - 6x + 10 = 0$ é uma equação impossível».
Mostra, sem resolver a equação, que a afirmação é verdadeira.

Função quadrática

UNIDADE 5

Págs. 102 a 123

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar a função ...
- Identificar a expressão ... de uma função quadrática
- Representar graficamente as funções quadráticas ...
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função ... variação do sinal ...
- ... variação da função (monotonia) e equação do eixo de simetria
- ... da concavidade do gráfico da função quadrática
- ... os pontos de intersecção do gráfico de uma função ...

CONTEÚDOS

... quadrática

... da função quadrática

... do tipo $y = f(x) = ax^2$

... gráfica da função $y = ax^2$

... completo da função $y = ax^2$: domínio, contradomínio, ... da função, vértices da parábola, variação do sinal, ... variação da função (monotonia) e equação do eixo de simetria

... do tipo $y = ax^2 + c$

... gráfica da função $y = a(x - p)^2$ a partir da ...

... completo da função $y = ax^2 + c$

... problemas práticos que envolvem funções ...

Noção de função

Na linguagem corrente, o termo «função» surge ligado a expressões como «depende de» ou «varia com», conforme os exemplos seguintes o ilustram:

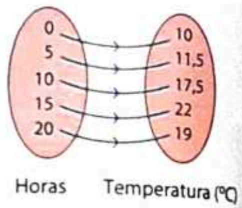
- «O preço da gasolina varia em função do preço do barril de petróleo.»
- «A distância ideal de travagem num veículo motorizado varia em função da sua velocidade.»
- «O volume de uma esfera depende do comprimento do raio.»

Em Matemática, a algumas destas relações entre grandezas (variáveis) chamamos funções, do latim *functione*.

> Dados dois conjuntos, A e B, chamamos função definida em A com valores em B a toda a correspondência que associa a cada elemento de A um e um só elemento de B isto é, a toda a correspondência unívoca de A para B.

Simbolicamente, e designando a correspondência por f, escrevemos:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \smile y = f(x)$$



Ao conjunto A chamamos domínio de f e aos seus elementos chamamos originais ou objectos. A cada objecto x corresponde uma e uma só imagem y, $y = f(x)$, no conjunto de chegada B. Os originais correspondem aos valores da variável independente e as imagens aos valores da variável dependente.

Chamamos contradomínio de f ao conjunto dos elementos de B que são imagem de algum elemento de A.

São habituais as notações D_f para o domínio de f e D'_f ou CD_f para o contradomínio de f.

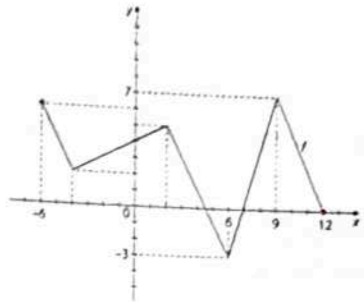
É importante salientar as funções em que o domínio e o conjunto de chegada são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que estamos perante uma função real de variável real, abreviadamente função r. v. r.

Simbolicamente:

$$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \smile y = f(x)$$

O gráfico de uma função f, real de variável real, num referencial cartesiano é o conjunto de pontos $(x, f(x))$, em que x é um ponto de D_f e y é a sua imagem, $y = f(x)$. A variável independente x, marca-se no eixo horizontal, o eixo das abcissas, e a segunda coordenada, a variável dependente y, no eixo vertical, o eixo das ordenadas.

Observando com atenção o gráfico seguinte de uma função podemos estudar algumas das suas características.



- Domínio: $[-6, 12]$ (lê-se no eixo das abcissas).
- Contradomínio: $[-3, 7]$ (lê-se no eixo das ordenadas).
- Zeros: $x = 4{,}5$, $x = 7$ e $x = 12$ (os pontos que cruzam o eixo das abcissas).

Os zeros de uma função são os valores do domínio para os quais a função é nula. ($f(x) = 0$).

- Sinal: a função f é negativa: $x \in]4{,}5; 7[$; a função f é positiva: $x \in]-6; 4{,}5[\cup]7, 12[$.
- Monotonia: a função f é crescente: $x \in [-4, 2] \cup [6, 9]$.
  A função f é decrescente: $x \in [-6, -4] \cup [2, 6] \cup [9, 12]$.

Por exemplo, no intervalo $[-4, 2]$, quando a variável independente aumenta, a variável dependente também aumenta. A função f diz-se crescente neste intervalo.

No entanto, por exemplo, no intervalo $[2, 6]$, quando aumenta a variável independente, diminui a variável dependente. A função f diz-se decrescente no intervalo considerado.

> Uma função é monótona num intervalo do seu domínio se for crescente ou decrescente nesse intervalo.

Os intervalos do domínio em que a função é crescente ou decrescente chamam-se intervalos de monotonia.

- Extremos de uma função: máximo absoluto: 7; mínimo absoluto: – 3

Para qualquer x em $[-6, 12]$, temos então que $-3 \leq f(x) \leq 7$.

Aos máximos ou mínimos de uma função chamamos, de um modo geral, extremos da função.

A função tem como máximos relativos 5, 6 e 7 e como mínimos relativos – 3, 2 e 0.

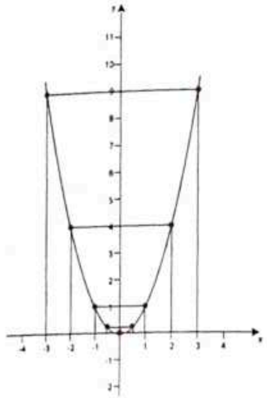
Função quadrática

Função quadrática é uma função cuja expressão analítica é um polinómio do 2.º grau $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e a, b e c números reais.

Consideremos a função $f(x) = x^2$. Nesta função $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$.

Para construir o gráfico de f necessitamos de determinar alguns pares (x, y).

x	$f(x) = x^2$	y
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	9
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	4
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	1
0	$f(0) = (0)^2 = 0$	0
$+1$	$f(1) = (1)^2 = 1$	1
$+2$	$f(2) = (2)^2 = 4$	4
$+3$	$f(3) = (3)^2 = 9$	9



A função do 2.º grau é representada graficamente por uma curva denominada parábola.

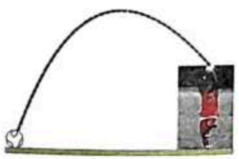
Exemplos

As funções seguintes são funções quadráticas?

1. $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ Sim
2. $h(x) = (2x - 1)(x + 3) - 2x^2$ Sim
3. $g(x) = (2x - 1)^2(x + 3)$ Não
4. $i(x) = (2x - 1)(x + 3) - (x + 5)$ Não

A parábola é uma curva que serve de modelo matemático para descrever numerosos fenómenos físicos:

- O tiro de um projéctil
- A trajectória de uma bola lançada ao ar
- A queda livre de um corpo
- Um jacto de água que sai de uma fonte



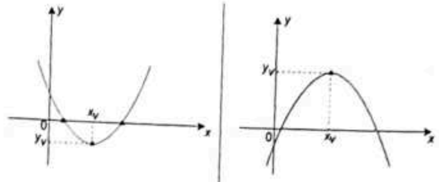
Características da parábola

- É simétrica em relação a uma recta vertical designada por eixo de simetria.
- Tem um vértice, que é o ponto de intersecção da parábola com o seu eixo de simetria.

Vértice da parábola

O vértice da parábola é o ponto da curva correspondente à ordenada máxima ou mínima e será indicada por $V(x_v; y_v)$ – denominado coordenadas do vértice.

Observe os gráficos:



y_v é a ordenada mínima de f y_v é a ordenada máxima de g

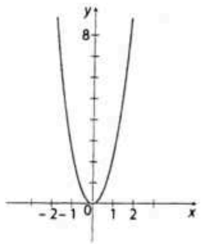
Eixo de simetria

A parábola é simétrica relativamente à recta paralela ao eixo das ordenadas (yy') que passa pelo vértice. Dizemos que esta recta é o eixo de simetria da parábola.

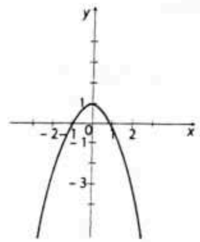
Exemplos

Observa as parábolas:

- $y = 2x^2$
  Vértice: $V(0, 0)$
  Eixo de simetria: $x = 0$



- $y = -x^2 + 1$
  Vértice: $V(0, 1)$
  Eixo de simetria: $x = 0$



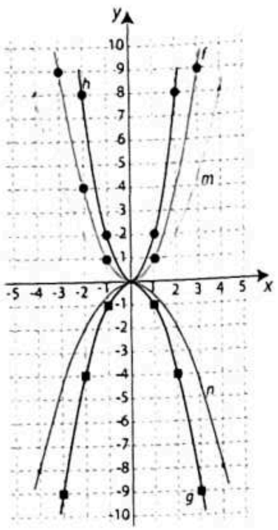
Propriedades da função quadrática, $f(x) = x^2$

- Gráfico: parábola
- Domínio: $\mathbb{R}$
- Vértice: (0,0)
- Eixo de simetria: $x = 0$
- Injectividade: não injectiva
- Sentido da concavidade: voltada para cima
- Contradomínio: $[0, +\infty[$
- Monotonia: crescente em $[0, +\infty[$; decrescente em $]-\infty, 0]$
- Extremos: mínimo absoluto = mínimo relativo = 0 para $x = 0$

Estudo da função $y = ax^2, a \neq 0$

Observa os gráficos seguintes representados no mesmo sistema de coordenadas:

$a > 0$



$a < 0$

x	$g = x^2$	$g(x) = -x^2$	$h(x) = 2x^2$	$m(x) = \frac{1}{2}x^2$	$n(x) = -\frac{1}{2}x^2$
-4	16	-16	32	8	-8
-2	4	-4	8	2	-2
-1	1	-1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0	0
1	1	-1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	4	-4	8	2	-2
4	16	-16	32	8	-8

Da análise dos gráficos constata-se que as parábolas têm a concavidade virada para cima se o coeficiente a de x^2 for positivo, e a concavidade virada para baixo se o coeficiente a for negativo.

A abertura da parábola depende do valor absoluto de a.
O gráfico da função quadrática terá uma abertura tanto maior quanto menor for o $|a|$.

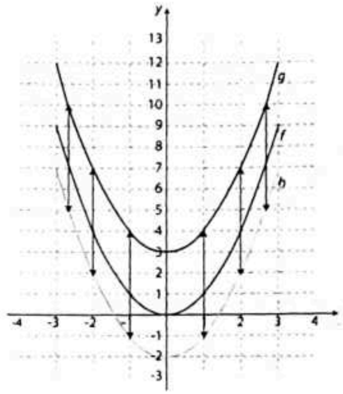
Propriedades da função quadrática, $y = ax^2, a \neq 0$

- Vértice: (0, 0)
- Eixo de simetria: $x = 0$
- Injectividade: não injectiva
- Sentido da concavidade: concavidade voltada para cima, se $a > 0$,
  concavidade voltada para baixo, se $a < 0$
- Contradomínio: $D' = [0, +\infty[$ se $a > 0$; $D' =]-\infty, 0]$ se $a < 0$
- Monotonia: crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0]$, se $a > 0$
  crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$, se $a < 0$
- Extremos: mínimo absoluto = mínimo relativo = 0 para $x = 0$, se $a > 0$
  máximo absoluto = máximo relativo = 0 para $x = 0$, se $a < 0$
- $|a| < 1$ a parábola afasta-se do eixo de simetria
  $|a| > 1$ a parábola aproxima-se do eixo de simetria

Estudo da função $y = ax^2 + c, a \neq 0$

Representemos no mesmo sistema de coordenadas as seguintes funções: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ e $h(x) = x^2 - 2$.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 3$	$h(x) = x^2 - 2$
-3	9	12	7
-2	4	7	2
-1	1	4	-1
0	0	3	-2
1	1	4	-1
2	4	7	2
3	9	12	7



A partir dos gráficos construídos podemos observar o seguinte:

Os gráficos das funções f, g e h possuem a mesma abertura, isto é, têm o mesmo coeficiente $a = 1$.

O gráfico de $g(x) = x^2 + 3$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, através de uma translação de 3 unidades para cima, isto é, $g(x) = f(x) + 3$, logo $(1, 1) \in f \Rightarrow (1,4) \in g$.

O gráfico de $h(x) = x^2 - 2$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = x^2$, através de uma translação de 2 unidades para baixo, isto é, $h(x) = f(x) - 2$, logo $(3, 9) \in f \Rightarrow (3, 7) \in g$.

Podemos concluir que o gráfico da função $y = ax^2 + c$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = ax^2$, através de uma translação de c unidades para:

- cima, se $c > 0$
- baixo se $c < 0$

Propriedades da função quadrática, $y = ax^2 + c, a \neq 0$

- Vértice: $(0, c)$
- Eixo de simetria: $x = 0$
- Injectividade: não injectiva
- Sentido da concavidade: voltada para cima, se $a > 0$
  voltada para baixo, se $a < 0$
- Contradomínio: $[c, +\infty[$, se $a > 0$
  $[-\infty, c[$, se $a < 0$
- Monotonia: crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0]$, se $a > 0$
  crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$, se $a < 0$
- Extremos: mínimo absoluto = mínimo relativo = c, se $a > 0$
  máximo absoluto = máximo relativo = c se $a < 0$

Exercício resolvido

1. Indica o contradomínio de cada uma das funções cujas expressões analíticas se apresentam:
   a) $y = 5x^2 - 10$ b) $y = -x^2 + 8$

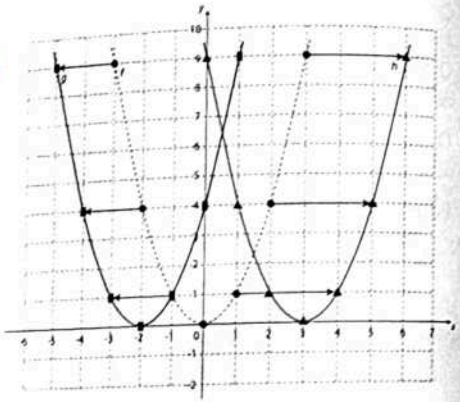
Resolução:
a) Como $a = 5 > 0$, a parábola tem a concavidade virada para cima. O contradomínio é $D' = [-10, +\infty[$.
b) Como $a = -1 < 0$, a parábola tem a concavidade virada para baixo. O contradomínio é $D' =]-\infty, 8]$.

Estudo da função $y = a(x - p)^2, a \neq 0$

Representemos no mesmo sistema de coordenadas as seguintes funções:

$$f(x) = x^2, g(x) = (x + 2)^2 \text{ e } h(x) = (x - 3)^2.$$

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 2)^2$	$h(x) = (x - 3)^2$
−3	9	1	36
−2	4	0	25
−1	1	1	16
0	0	4	9
+1	1	9	4
+2	4	16	1
+3	9	25	0



A partir dos gráficos, podemos observar que:

- O gráfico de $g(x) = (x + 2)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = x^2$ através de uma translação de 2 unidades para a esquerda.
- O gráfico de $h(x) = (x - 3)^2$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = x^2$ através de uma translação de 3 unidades para a direita.
- O vértice de f é (0; 0), de g é (−2; 0) e de h é (3; 0).

Podemos concluir que:

Os gráficos de $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a(x - p)^2$ são congruentes e obtêm-se a partir do gráfico de $f(x) = ax^2$ através de uma translação de p unidades para:

- a direita se $p > 0$
- a esquerda se $p < 0$.

Propriedades da função quadrática, $y = a(x - p)^2, a \neq 0$

- Vértice: $(p, 0)$
- Eixo de simetria: $x = p$
- Injectividade: não injectiva
- Sentido da concavidade: voltada para cima, se $a > 0$
  voltada para baixo, se $a < 0$
- Contradomínio: $[0, +\infty[$, se $a > 0$
  $]-\infty, 0]$, se $a < 0$
- Monotonia: crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0]$, se $a > 0$
  crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$, se $a < 0$
- Extremos: mínimo absoluto = mínimo relativo = p se $a > 0$
  máximo absoluto = máximo relativo = p se $a < 0$

Zeros da função quadrática

Os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dados pela fórmula resolvente da equação do 2.º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

Então os zeros são:

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

A existência de zeros depende de Δ, daí o nome atribuído a Δ − binómio discriminante.

Δ	Função: zeros
$\Delta > 0$	A função tem dois zeros distintos. O gráfico de f intersecta o eixo dos xx em dois pontos: $\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, f\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$ e $\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, f\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$.
$\Delta = 0$	A função tem um zero duplo: $-\frac{b}{2a}$. O gráfico de f intersecta o eixo dos xx num único ponto: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(\frac{b}{2a}\right)\right)$
$\Delta < 0$	A função não tem zeros, visto a equação ser impossível. O gráfico da função não intersecta o eixo dos xx.

Exemplos

- $x^2 - 3x + 4 = 0$

  $\Delta = 9 - 16 = -7$

  Equação impossível em $\mathbb{R}$

- $4x^2 - 20x + 25 = 0$

  $\Delta = 400 - 400 = 0$

  Zero: $\frac{5}{2}$

- $14x^2 + 19x - 3 = 0$

  $\Delta = 361 + 168 = 429$

  Zeros: $-\frac{3}{2}, \frac{1}{7}$

Exercícios resolvidos

1. Considera a função definida em $\mathbb{R}$ por: $g(x) = 3x^2 - 3x + p \in \mathbb{R}$

   a) Determina o valor de p de modo a que g tenha um e só um zero.

   b) Para o valor de p encontrado, obtém os valores de y que tornam possível a equação $y = 3x^2 - 2x + p$.

Resolução:

a) Para que g tenha um só zero tem de ser $\Delta = 0$; $\quad \Delta = 4 - 12p$

Logo, $4 - 12p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

b) Se $p = \frac{1}{3}$ vem: $y = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 3y = 0$

Esta equação é possível se $\Delta \geq 0$, ou seja,

$$36 - 36(1 - 3y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 1 + 3y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$$

2. O espaço e, em metros, percorrido por um móvel em movimento uniformemente acelerado, ao fim de t segundos, é dado por:

$$e = 3t^2 - 6t + 3$$

O gráfico da função $e(t)$ é uma parábola.

a) Qual é o espaço inicial, quer dizer, o espaço correspondente a zero segundos?

b) Indica as coordenadas do vértice de parábola e uma equação do seu eixo de simetria.

c) Qual é o menor valor de e? E o maior?

Resolução:

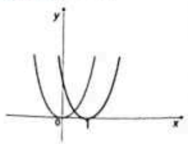
a) O espaço inicial é 3 m. Obtém-se fazendo na equação dada $t = 0$

b) $3t^2 - 6t + 3 = 3 - (t^2 - 2t + 1) = 3(t-1)^2$

As coordenadas do vértice são (1, 0) e a equação do eixo de simetria é $t = 1$

c) Como o coeficiente de t^2 é 3 ($3 \geq 0$), a concavidade está voltada para cima. Então, o gráfico terá um mínimo igual a zero para $t = 1$.

Não tem máximo, porque quando $t > 1$ a função $e(t)$ é crescente.



3. Estuda analiticamente as características da função $x \mapsto x^2 - 4x + 4$

Resolução:

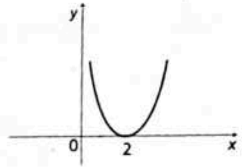
$$f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

- Domínio: como não há nenhuma restrição a impor a x, o $D_f = \mathbb{R}$
- Sentido da concavidade: como $x = 1$, $a > 0$, a concavidade está voltada para cima
- Zeros: a sua existência depende do sinal de Δ.

  $\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta = 16 - 16 = 0$

  A função tem um zero. Calculemo-lo:

  $$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



O zero é 2.

- Vértice: (2, 0)
- Eixo de simetria: $x = 2$
- Extremos: como a concavidade está voltada para cima, o vértice é um mínimo absoluto. O valor mínimo de f é 0, atingido para $x = 2$.
- Contradomínio: $[0, +\infty[$.
- Injectividade: a função não é injectiva.
- Monotonia: a função é crescente em $[2, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 2]$.

O gráfico confirma o estudo efectuado.

4.a) Como foram obtidos os gráficos de $y = (x-2)^2$ e de $y = (x+1)^2$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

E os gráficos de $y = -(x-3)^2$ e de $y = -(x+3)^2$ a partir do gráfico de $y = -x^2$?

Explica a influência do parâmetro h no gráfico destas funções.

b) Indica as coordenadas do vértice para cada uma das funções.

c) Indica as coordenadas do vértice de $y = (x + 0,5)^2$, $y = 2(x + 0,5)^2$ e de $y = -2(x + 0,5)^2$.

d) Quais são as coordenadas do vértice das parábolas cuja expressão analítica é:

$$y = a(x+h)^2?$$

e) Escreve a equação da recta que é eixo de simetria do gráfico das funções desta família.

Resolução:

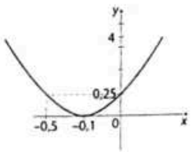
a) O gráfico de $y = (x-2)^2$ obteve-se do gráfico de $y = x^2$ por meio de um deslocamento horizontal de duas unidades para a direita. Quanto ao gráfico de $y = (x+1)^2$, este obteve-se do primeiro por meio de um deslocamento horizontal de uma unidade para a esquerda.

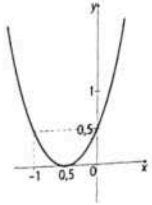
O gráfico de $y = -(x-3)^2$ obteve-se a partir do gráfico $y = -x^2$ por meio de um deslocamento horizontal de três unidades para a direita. Quanto ao gráfico de $y = -(x+3)^2$, este obteve-se a partir do primeiro por meio de um deslocamento horizontal de três unidades para a esquerda.

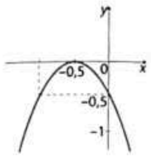
- Se $h > 0$ a parábola desloca-se h unidades para a esquerda.
- Se $h < 0$ a parábola sofre um deslocamento para a direita de h unidades.

b) $y = x^2$ $V(0, 0)$; $y = -x^2$ $V(0, 0)$
$y = (x-2)^2$ $V(2, 0)$; $y = -(x-3)^2$ $V(3, 0)$
$y = (x+1)^2$ $V(-1, 0)$; $y = -(x+3)^2$ $V(-3, 0)$

c) Traçando e observando os gráficos destas funções.
$y = (x+0,5)^2$ $V(-0,5; 0)$; $y = 2(x+0,5)^2$ $V(-0,5; 0)$; $y = 2(x+0,5)^2$ $V(-0,5; 0)$







d) Pelo que tem vindo a ser estudado, parece ser possivel concluir que as coordenadas do vértice não dependem do parâmetro a.
A ordenada do vértice toma sempre o valor zero e a abcissa do vértice é simétrica do valor de h.
Assim sendo, o vértice do gráfico de funções do tipo $y = a(x + h)^2$ é $V(-h, 0)$.

e) A equação da recta é $x = -h$.

Representação gráfica das funções quadráticas

Para esboçar o gráfico das funções quadráticas é preciso:

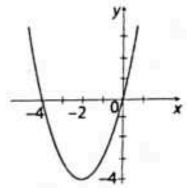
- Identificar o sinal do coeficiente a.
- Determinar o vértice da parábola.
- Determinar os zeros.
- Determinar o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas.

Sinal

Estudar o sinal de uma função é procurar os valores de x para os quais a função toma valores positivos ou negativos.

A partir do gráfico de uma função é imediato este estudo.

Estudemos o sinal da função definida analiticamente por $y = x^2 + 4x$, cujo gráfico se apresenta ao lado:



$x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Como $a = 1 > 0$, a função tem a concavidade voltada para cima.

Repara que:

- A função é negativa para valores de x pertencentes ao intervalo $]-4, 0[$.
- A função é positiva para valores de x pertencentes aos intervalos $]-\infty, -4[$ e $]0, +\infty[$.

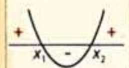
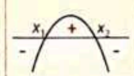
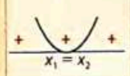
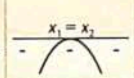
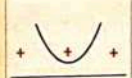
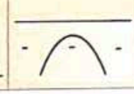
Resumindo:

- $f(x) < 0$ se $x \in]-4, 0[$
- $f(x) > 0$ se $x \in]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

Constata-se também que, quando o coeficiente $a > 0$, a função toma o sinal de a fora do intervalo dos seus zeros.

Para estudar o sinal de uma função quadrática, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, basta conhecer os seus zeros (se existirem) e o sinal do coeficiente a.

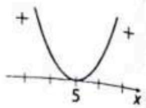
No quadro seguinte resume-se o estudo do sinal da função quadrática.

Função: zeros	Concavidade		Observações
2 zeros x_1 e x_2: $\Delta > 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	A função toma o sinal de a fora do intervalo dos seus zeros e consequentemente toma o sinal contrário ao de a no intervalo dos seus zeros.
1 zero duplo $\Delta = 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	A função toma o sinal de a para todos os valores reais excepto o valor que anula a função.
Não tem zeros: $\Delta < 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	A função toma o sinal de a.

Exercícios resolvidos

1. Estuda o sinal de:

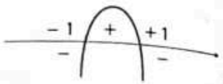
a) $f(x) = (x-5)^2$. b) $g(x) = -x^2 + 1$ c) $h(x) = x^2 - 5x + \dfrac{25}{4}$



Resolução:

a) Vamos resolver a equação: $(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

$f(x)$ é positiva, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$.



b) Determinemos os zeros de $g(x)$: $-x^2 + 1 = 0$

$-x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \lor x = x - 1$

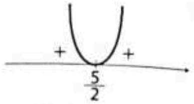
$g(x)$ é positiva: $x \in]-1, 1[$

$g(x)$ é negativa: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, -\infty[$

c) Vamos determinar os zeros de $h(x)$:

$x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 0$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4(4)(25)}}{2(4)} \Leftrightarrow x = \frac{20}{8} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$



$h(x)$ é positiva: $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

2. Para os doze meses de 2017, uma empresa familiar apresentou as contas, expressas em milhares de meticais, através de fórmula: $f(t) = t^2 - 8t + 15$, em que a unidade de tempo é o mês e $t = 0$ corresponde a 1 de Janeiro de 2017.

a) Em que mês foi positivo o saldo da empresa?

b) Indica o mês em que a empresa teve prejuízos e qual o seu montante.

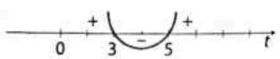
Resolução:

a) $f(t) = t^2 - 8t + 15$,

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(15)}}{2(1)} \Leftrightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{8 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{8+2}{2} \lor t = \frac{8-2}{2} \Leftrightarrow t = 5 \lor t = 3$$



O saldo foi positivo em Janeiro, Fevereiro, Março, Julho, Agosto, Setembro, Outubro, Novembro e Dezembro.

b) $f(4) = 4^2 - 8(4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

Teve prejuízo de 1 000 meticais em Maio.

3. Quando se atira uma bola ao ar, com uma velocidade inicial de 30 m/s a altura em metros atingida pela bola ao fim de t segundos é dada pela expressão:

$$h = 30t - 4{,}9t^2$$

a) t pode assumir qualquer valor?

b) Determina a altura máxima da bola.

c) Indica o intervalo de tempo durante o qual a bola subiu.

Resolução:

a) Como a incógnita t, representa o tempo, só faz sentido considerar t positivo ($t > 0$).

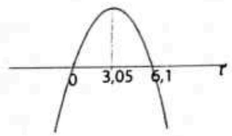
b) $30t - 4{,}9t^2 = 0 \Leftrightarrow 30t - \dfrac{49}{10}t^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 300t - 4{,}9t^2 = 0 \Leftrightarrow t(300 - 49t) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \lor 300 = 49t$

$t = 0 \lor t = \dfrac{300}{49}$

$t = 0 \lor t = 6{,}1$



$h = 30(3{,}05) - 4{,}9\,(3{,}05)^2 = 45{,}9$

Aproximadamente 46 m.

c) A bola subiu nos primeiros 3 segundos.

4. Faz o estudo completo da função definida analiticamente por: $y = -x^2 + 5$.

Resolução:

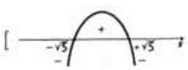
Como $a = -1 < 0$, significa que a concavidade está voltada para baixo.

O vértice é $V(0, 5)$.

Os zeros obtém-se: $-x^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \lor x = -\sqrt{5}$.

Estudo da função

- $D = \mathbb{R}$; • $D' =]-\infty, 5]$
- Positiva: se $x \in]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$; • Negativa: se $x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$
- Crescente $]-\infty, 0]$; • Decrescente $[0, +\infty[$.
- Máximo absoluto $= 5$ para $x = 0$
- Não é injectiva.



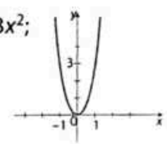
5. O gráfico seguinte representa a função definida analiticamente por $y = 3x^2$;

Esboça os gráficos de:

a) $y = -3x^2$

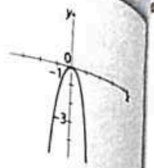
b) $y = 4x^2$

c) $y = -0{,}25x^2$

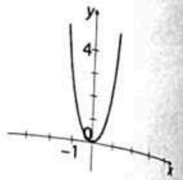


Resolução:

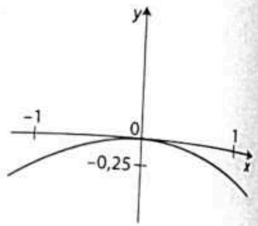
a) O gráfico de $y = -3x^2$ obtém-se do inicial por meio de uma simetria em relação ao eixo dos xx, já que os coeficientes de x^2 são simétricos.



b) O gráfico de $y = 4x^2$: como $4 > 3$, significa que a parábola fica mais próxima do eixo dos yy (eixo de simetria desta parábola) e como $a = 4 > 0$, significa que a concavidade é voltada para cima. Basta determinar, por exemplo, a imagem de -1 e 1 que é 4.

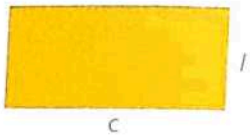


c) O gráfico de $y = -0{,}25x^2$: como $a = |-0{,}25| < 1$ significa que a parábola se afasta do eixo dos yy (eixo de simetria desta parábola) e como $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo. Basta determinar, por exemplo a imagem de -1 e 1 que é $-0{,}25$.



6. Num terreno com 50 m de perímetro pretende-se construir uma piscina rectangular com a maior área possível.

Determina as dimensões da piscina.



Resolução:

O perimetro P é $P = 2c + 2l$

Logo,

$$2c + 2l = 50 \Leftrightarrow c + l = 25 \Leftrightarrow l = 25 - c$$

Substituindo na expressão da área A, vem:

$$A = c \cdot l \Leftrightarrow A = c(25 - c) \Leftrightarrow A = (25c - c)^2$$

O gráfico da função A(c) é uma parábola com a concavidade voltada para baixo ($a = -1$). O seu máximo é a ordenada do vértice, cuja abcissa é a do ponto intermédio entre os zeros.

$$c(25 - c) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \vee c = 25$$

A abcissa do vértice é, então, 12,5. A ordenada é $A(12{,}5)$

$$A(12{,}5) = 12{,}5 \times 12{,}5 = 156{,}25$$

O valor máximo da área é $156{,}25\ m^2$: como $c = 12{,}5$; $l = 25 - 12{,}5 = 12{,}5$

A piscina de área máxima será quadrada com 12,5 m de lado.

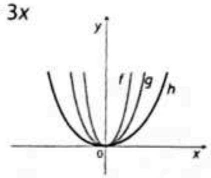
Exercícios de consolidação

1. Considera as funções quadráticas f, g, h e t definidas por:

$$f(x) = ax^2; \quad g(x) = bx^2; \quad h(x) = cx^2 \quad e \quad t(x) = d - x^2 - 3x$$

a) Os gráficos f, g e h estão esboçados num mesmo referencial.

Qual das relações seguintes é verdadeira?



A. $a < b < c < 0$ B. $0 < a < b < 0$

C. $c < b < a < 0$; D. $0 < c < b < a$

b) O gráfico de t, passa pelo ponto (2, 1). Então $t(-3)$ é

A. 29 B. 11 C. − 7 D. 0.

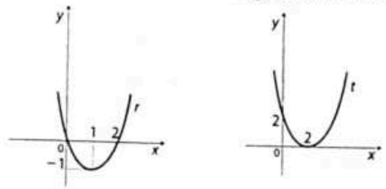
c) Se um, zero de t for zero então d é:

A. 3 B. − 1 C. 0 D− 4

d) O contradomínio de t é $]-\infty; 2{,}5]$ se d for:

A. 2 B. −0,25 C. 0,25 D− 2

2. As funções quadráticas r, e t estão definidas graficamente a seguir:



a) Define analiticamente as funções. b) Indica os contradomínios.

d) Determina os extremos das funções.

3. O Sr. Machanguana quer fazer um canteiro num canto do quintal da sua casa. Em dois dos lados há um muro e ele tem 200 pés de micaias disponíveis. Como os deve dispor regularmente de modo a ocupar a maior área possível?

4. Um corpo é atirado verticalmente de baixo para cima. A altura h, em metros, atingida ao fim de t segundos é dada por:

$$h = -3t^2 + 18t - 24$$

a) Qual é a máxima altura atingida pelo corpo?

b) Ao fim de quantos segundos a atinge?

c) Nesta função qual é a variável independente? E a dependente?

5. O perímetro de um terreno rectangular é de 60 m. Quais deverão ser as dimensões de uma casa a construir nesse terreno de modo que a sua área seja máxima?

6. A partir de um lugar **A** disparou-se um tiro que descreveu uma trajectória parabólica de equação:

$$e(x) = 0{,}4x - 0{,}01\,x^2$$

Determina:

a) A distância do ponto **B** a que foi cair o projéctil.

b) A maior altura atingida pela bala.

7. Atira-se verticalmente uma bola de baixo para cima. A altura h, em metros, atingida ao fim de t segundos é dada por:

$$h(t) = 40t - 5t^2$$

a) Calcula a altura atingida pela bola no instante 2 segundos.

b) Ao fim de quanto tempo volta a cair a bola, isto é, quando é que $h = 0$?

c) A altura máxima atingida pela bola é o maior valor de h que torna possível a equação dada. Calcula-o.

d) Calcula o instante em que a pedra passa pela posição 75 m na subida.

8. Considera as seguintes funções reais de variável real:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad j: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -2x^2 \quad x \mapsto -2x^2 + 1 \quad x \mapsto -2x^2 + 1$$

a) Esboça o gráfico de g.

b) Indica os zeros de g e o seu contradomínio.

c) Qual é a relação entre os gráficos das funções?

c.1) g e h **c.2)** g e j

d) Quais são as coordenadas do vértice da parábola, gráfico da função j?

e) Indica o contradomínio de h.

f) Alguma das funções será injectiva? Justifica.

9. Escreve uma equação da parábola:

a) Resultante da translação de $y = 5x^2$ cujo transformado do vértice é o ponto $(7, 0)$.

b) A que pertence o ponto $(5,2)$ e cujo vértice é $(-3, 0)$.

10. Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$f(f) = (x+1)^2\,; \quad g(x) = 3\,(x-2)^2\,; \quad h(x) = -2\,(x+2)^2\,;$$

De cada uma delas indica:

a) Domínio, contradomínio e zeros.

b) Sentido da concavidade, vértice e eixo de simetria do gráfico.

c) Sentido das monotonias.

11. Seja f a função quadrática definida assim:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3$$

a) Completa a tabela:

x	-3	-1	0	1	2	
$\frac{1}{2}x^2 - 3$						0

b) Esboça o seu gráfico.

c) Como obténs, a partir deste, o gráfico da função m, cuja expressão analítica é $\frac{1}{2}x^2 - 3$?

d) Indica:

d.1) As coordenadas dos vértices das duas parábolas.

d.2) Os contradomínios de f e m.

d.3) Os valores de x para os quais f é decrescente e aqueles para os quais m é crescente.

d.4) A parte de $\mathbb{R}$ na qual f é negativa.

12. Determina as coordenadas do vértice da parábola representativa da função quadrática definida por:

$$m(x) = 9x^2 + 6x - 3; \quad n(x) = 9x^2 + 6x + 1; \quad p(x) = 9x^2 + 6x + 3$$

Esboça os três gráficos num mesmo referencial.

13. Lança-se verticalmente, de baixo para cima, uma bola. A altura, h, em metros, atingida pela bola t após o lançamento é dada pela expressão:

$$h = 25t - t^2$$

a) Ao fim de quantos segundos atinge a altura máxima? **b)** Qual é a altura máxima?

14. Determina dois números cuja soma seja 24 de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

15. Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$p(x) = x^2 - 1; \quad q(x) = -(x^2 - 3)^2$$

a) Determina os seus zeros.

b) Calcula as coordenadas dos vértices das parábolas que são as suas representações geométricas.

c) Esboça os gráficos de cada uma delas.

d) Indica, a partir do gráfico, quando é que cada uma das funções é positiva e quando é negativa.

16. Considera as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = x^2 - 9; \quad g(x) = 1 + x^2 \quad j(x) = -3 - x^2; \quad n(x) = x^2 + 18 + 81$$

a) Esboça, num mesmo referencial, os gráficos das funções.

b) Estuda, a partir dos gráficos, o sinal das funções consideradas.

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

1. Considera a função, real de variável real, $f(x) = 2x^2 + 3$. As coordenadas do vértice da parábola que representa a função são:

A. (2, 3) B. (2, 0)
C. (0, 3) D. (0, –3)

2. O eixo de simetria do gráfico da função, real de variável real, definida por $f(x) = x^2 + 4$, é a recta v.

A. $y = 0$ B. $x = 0$
C. $x = 4$ D. $x = -4$

3. A solução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ é:

A. {3} B. {1, 3}
C. {6, 9} D. {0, 3}

4. Considera as seguintes afirmações:

I. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for positivo, a função não tem zeros.
II. Se o binómio discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) for positivo, a função quadrática tem dois zeros.
III. Uma função quadrática tem sempre um extremo absoluto.
IV. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for negativo, o termo independente dessa função também é negativo.

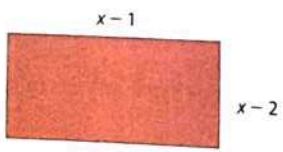
As afirmações verdadeiras são:

A. I e IV B. I e III C. II e III D. II e IV

5. A função, real de variável real, definida por $f(x) = x^2 - 5x$ tem valores negativos no intervalo:

A. [2, 3] B.]–5, 6[C.]–3, –2[D.]0, 5[

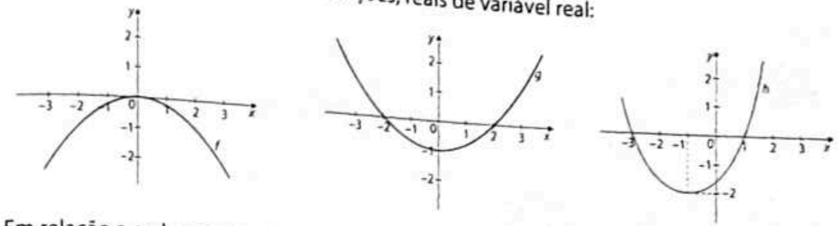
6. Quais são as dimensões do rectângulo cuja área é 2 m^2.



A. 1 e 2 m B. 3 e 4 m C. 1 e 5 m D. 2 e 3 m

2.ª Parte

1. Observa os gráficos das seguintes funções, reais de variável real:



Em relação a cada um deles indica:
a) O conjunto dos zeros.
b) A equação do eixo de simetria da parábola.
c) As coordenadas do vértice da parábola.
d) Os intervalos em que a função é crescente e os intervalos em que é decrescente.

2. Representa graficamente a seguinte função real de variável real:

$$f(x) = x^2 + 2.$$

3. Considera a função, real de variável real, definida por:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6.$$

a) Determina as coordenadas do vértice e os zeros.
b) Indica o sentido da concavidade da parábola.
c) Estuda a função indicando o domínio, o contradomínio, os intervalos de monotonia e sinal.
d) Escreve a equação do eixo de simetria.
e) Indica o seu extremo absoluto.

4. A expressão que permite calcular a energia cinética E_c, em Joules (J), de um corpo de massa m, em kg, e velocidade v, em m/s, é $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

a) Escreve a expressão da energia cinética de um automóvel de 1200 kg de massa, em função da sua velocidade.
b) Se o automóvel se deslocar a uma velocidade de 90 km/h, qual é o valor da sua energia cinética?

Quadriláteros

UNIDADE 6

Págs. 124 a 141

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar quadriláteros.
- Classificar quadriláteros.
- Demonstrar o teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero.
- Aplicar o teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero na resolução de problemas da vida real.
- Definir: trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado.
- Construir trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado, a partir de condições dadas, investigando as suas propriedades.
- Usar as propriedades dos paralelogramos na justificação de raciocínios.
- Aplicar as propriedades na resolução de problemas sobre trapézio, paralelogramo, rectângulo, losango e quadrado.
- Discutir estratégias de resolução de problemas e interpretar os resultados.

CONTEÚDOS

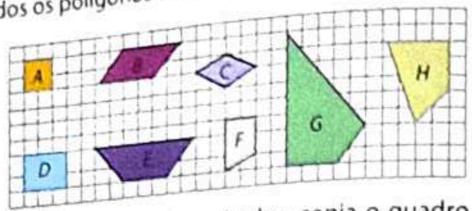
Quadrilátero

- Noção de quadrilátero
- Classificação de quadriláteros
- Teorema sobre ângulos internos de um quadrilátero e sua aplicação
- Conceitos e propriedades de:
  - Trapézio
  - Paralelogramo
  - Rectângulo
  - Losango
  - Quadrado
- Resolução de problemas envolvendo quadriláteros

Quadriláteros. Classificação

Actividade

1. Que nome dás a todos os polígonos abaixo desenhados?



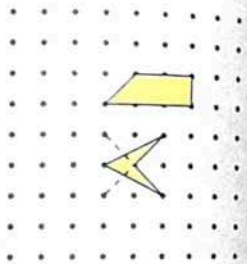
2. Depois de observares os polígonos desenhados, copia o quadro e completa-o com «sim» (S) ou «não» (N).

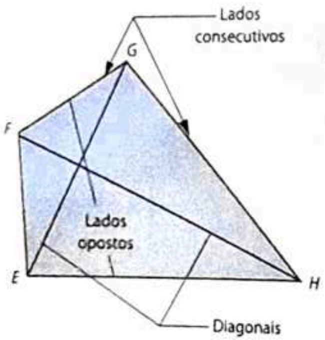
Quadriláteros	A	B	C	D	E	F	G	H
2 lados opostos paralelos								
2 lados opostos não paralelos								

Acabaste de verificar que um **quadrilátero** é um polígono com quatro lados.

Os quadriláteros podem ser:

- **Convexos** – os prolongamentos dos lados não atravessam o polígono.
- **Côncavos** – os prolongamentos de alguns lados atravessam o polígono.





Na figura ao lado, o quadrilátero $[EFGH]$ tem:

- Quatro lados: $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ e $[HE]$
- Quatro vértices: E, F, G e H
- Quatro ângulos: EFG, FGH, GHE e HEF
- Duas diagonais: $[EG]$ e $[FH]$

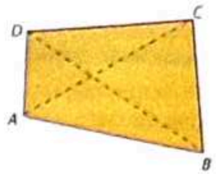
A diagonal de um polígono é o segmento de recta que une dois vértices não consecutivos.

Quadrilátero é um polígono com quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos.

Exercícios resolvidos

1. Identifica, no quadrilátero $[ABCD]$:

a) Dois lados consecutivos
b) Dois lados opostos
c) Uma diagonal
d) Dois ângulos opostos
e) Os ângulos internos adjacentes ao lado $[BC]$

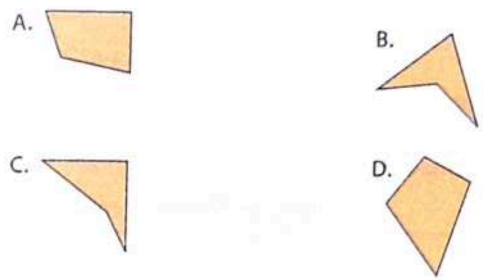


Resolução:

a) $[AB]$ e $[BC]$ ou $[BC]$ e $[CD]$ ou $[AD]$ e $[AB]$.
b) $[AB]$ e $[CD]$ ou $[AD]$ e $[BC]$.
c) $[AC]$ ou $[BD]$.
d) Ângulos de vértices A e C ou de vértices B e D.
e) Ângulos internos de vértices B e C.

2. a) Indica se os quadriláteros seguintes são côncavos ou convexos:

b) Que polígonos nunca podem ser côncavos?



Resolução:

a) A. Convexo
B. Côncavo
C. Côncavo
D. Convexo

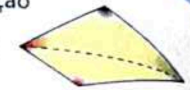
b) Os polígonos de três lados, ou seja, os triângulos.

UNIDADE 6

Teorema sobre os ângulos internos de um quadrilátero e sua aplicação

Recorda: o teorema sobre os ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

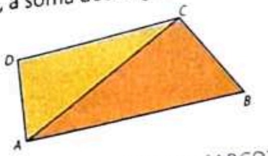
A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.



180° + 180° = 360°

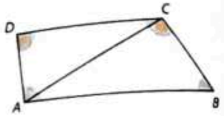
Exercícios resolvidos

1. Dado um quadrilátero qualquer, podemos sempre dividi-lo em dois triângulos. Utilizando a figura, prova que, de facto, a soma dos ângulos internos dum quadrilátero é 360°.



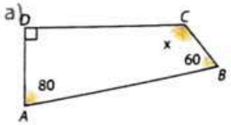
Resolução:

A soma dos ângulos internos do quadrilátero [ABCD] é igual à soma dos ângulos internos dos dois triângulos, [ABC] e [ACD], ou seja, 180° + 180° = 360°.

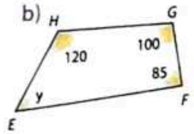


2. Quanto mede cada um dos ângulos assinalados com uma letra?

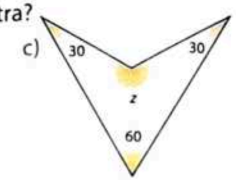
a)



b)



c)



Resolução:

a) $x = 360° - (90° + 80° + 60°) = 130°$

b) $y = 360° - (120° + 180° + 85°) = 55°$

c) $z = 360° - (60° + 30° + 30°) = 240°$

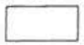
3. Que podes dizer sobre os ângulos internos de:

a) Um quadrilátero convexo?

b) Um quadrilátero côncavo?

Resolução:

a) Os ângulos internos de um quadrilátero convexo podem ser:

 • todos iguais

 • 2 rectos, 1 agudo e 1 obtuso

 • 2 agudos e 2 obtusos

 • 1 recto, 2 agudos e 1 obtuso

b) Um quadrilátero côncavo tem, obrigatoriamente, um ângulo interno com mais de 180°.

Pode ter, para além desse ângulo:

• 3 ângulos agudos

• 2 ângulos agudos e 1 recto

• 2 ângulos agudos e 1 obtuso

4. Desenha um quadrilátero convexo com dois ângulos opostos de:

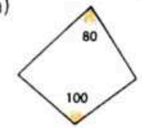
a) 80° e 100°.

b) 80° cada um.

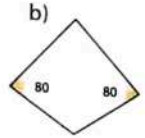
c) 90° cada um.

Resolução:

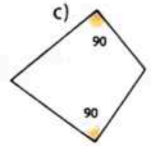
a)



b)



c)



5. Desenha, se for possível, um quadrilátero côncavo com dois ângulos opostos de:

a) 80° e 100°.

b) 30° cada um.

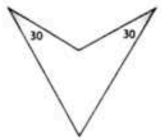
c) 90° cada um.

d) 45° e 60°.

Resolução:

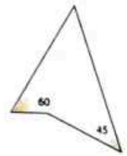
a) É impossível, pois um dos ângulos internos dum quadrilátero côncavo mede mais de 180° o que, somado com 80° e 100° daria mais de 360°, soma dois ângulos internos.

b)



c) O mesmo que na alínea a).

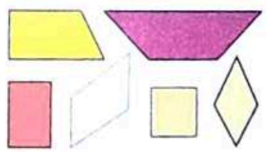
d)



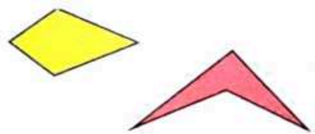
Classificação

Um quadrilátero ou é trapézio ou não é trapézio:

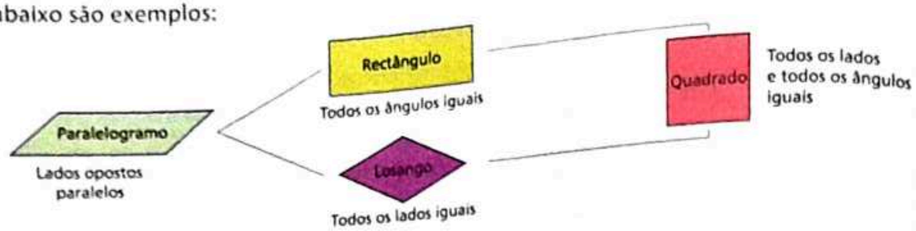
Trapézios – são quadriláteros que têm, pelo menos, 2 lados paralelos:



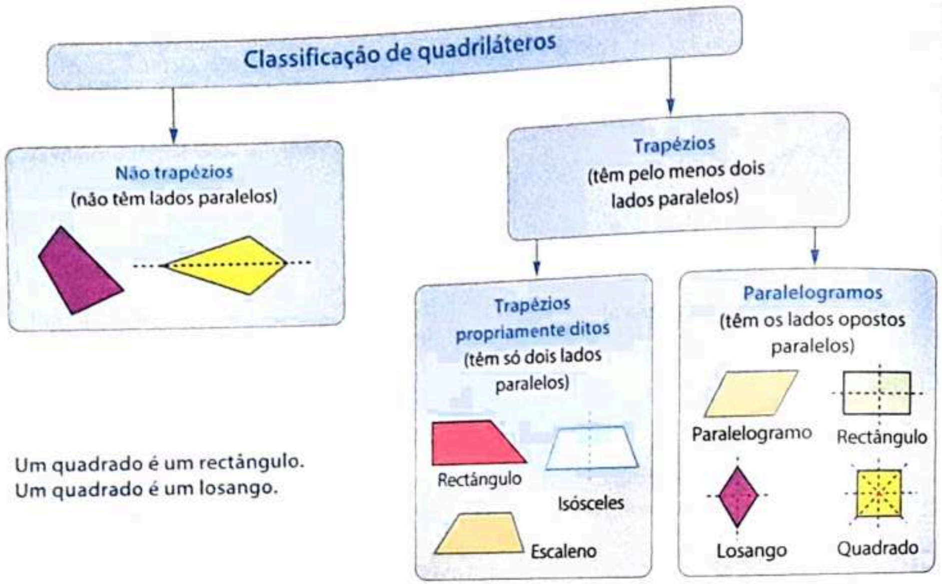
Não trapézios – são quadriláteros que não têm lados paralelos:



Há trapézios com os lados opostos paralelos – são os paralelogramos, de que as figuras abaixo são exemplos:



Resumindo temos:

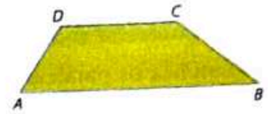


Um quadrado é um rectângulo.
Um quadrado é um losango.

Se um quadrilátero tiver lados consecutivos iguais, dois a dois, chama-se quite.

Exercícios resolvidos

1. No trapézio da figura ao lado, mede os ângulos de vértices B e C. Soma as suas medidas. Agora mede os ângulos de vértices A e D. Soma as suas medidas. Que achas que podes concluir?



Resolução:

A soma dos ângulos deverá ser, sempre, um valor próximo de 180°.

2. Desenha agora um trapézio isósceles. Mede também os ângulos adjacentes a cada um dos lados não paralelos. Que achas que podes concluir?

Resolução:

A soma dos ângulos deverá ser, sempre, um valor próximo de 180°.

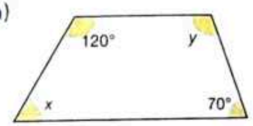
3. Desenha um trapézio rectângulo. Mede os ângulos adjacentes a cada um dos lados não paralelos. Que achas que podes concluir?

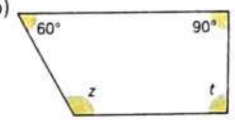
Resolução:

A soma dos ângulos deverá ser, sempre, um valor próximo de 180°.

4. Dos três exercícios anteriores podes concluir:
Os ângulos adjacentes a cada um dos lados não paralelos de um trapézio são suplementares.

Determina os valores das letras x, y, z e t nos trapézios seguintes:

a)


b)


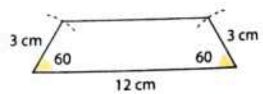
Resolução:

a) $x = 180° - 120° = 60°$ $\quad y = 180° - 70° = 110°$

b) $z = 180° - 60° = 120°$ $\quad t = 180° - 90° = 90°$

5. Constrói um trapézio isósceles de base 12 cm, em que os ângulos adjacentes à base maior medem 60° cada, e os lados oblíquos medem 3 cm cada.

Resolução:



- Constrói a base maior.
- Marca os ângulos de 60°.
- Traça os lados oblíquos com 3 cm.
- Traça finalmente a base menor.

Paralelogramos

Actividade

1. Identifica os paralelogramos 1, 2, 3 e 4 indicados no quadro. Utiliza material de desenho para descobrir as suas propriedades, de modo a poderes completar os espaços vazios.

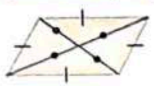
	 1	 2	 3	 4
Lados opostos paralelos				
Quatro lados iguais				
Ângulos rectos				
Diagonais que se cortam ao meio				
Diagonais iguais				
Diagonais perpendiculares				
Eixos de simetria*				

* Nota: recorta-os e faz dobragens.

2. Dá nome aos paralelogramos 1, 2, 3 e 4 (consulta a informação seguinte).

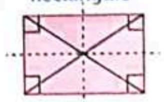
Propriedades dos paralelogramos

Paralelogramo obliquângulo



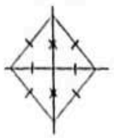
- Os lados opostos são paralelos e iguais.
- Os ângulos opostos têm igual amplitude.
- As diagonais cortam-se ao meio.

Rectângulo



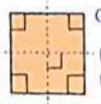
- Paralelogramo com quatro ângulos rectos.
- Os lados opostos são paralelos e iguais.
- As diagonais cortam-se ao meio e são iguais.
- Tem dois eixos de simetria.

Losango



- Paralelogramo com os quatro lados geometricamente iguais.
- Os lados opostos são paralelos.
- Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
- As diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.
- Tem dois eixos de simetria.

Quadrado



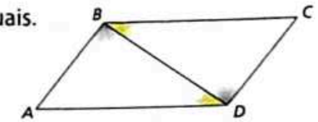
Um quadrado é um rectângulo.
Um quadrado é um losango.

- Paralelogramo com quatro ângulos rectos e os quatro lados geometricamente iguais.
- Os lados opostos são paralelos.
- As diagonais são perpendiculares, cortam-se ao meio e são geometricamente iguais.
- Tem 4 eixos de simetria.

Algumas propriedades podem ser demonstradas a partir do que aprendeste sobre critérios de igualdade de triângulos e sobre ângulos de lados paralelos.

Exercício resolvido

Demonstra que os lados opostos de um paralelogramo são iguais.



Resolução:

Os triângulos [ABD] e [BCD] são geometricamente iguais (a.l.a.), e, em triângulos iguais, a ângulos iguais opõem-se lados iguais, logo:

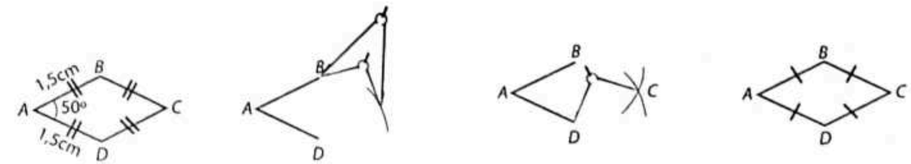
- Como $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$ então $\overline{AD} = \overline{BC}$.
- Como $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$ então $\overline{AB} = \overline{DC}$.

Construção de paralelogramos

Actividade

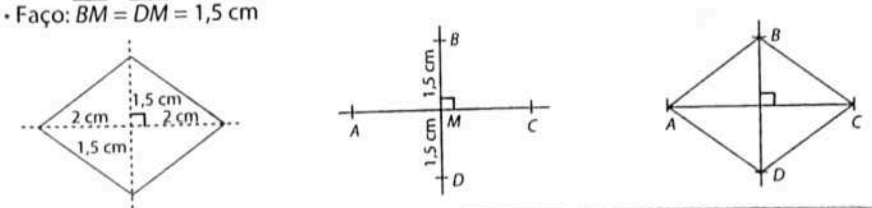
Vais aprender a construir, com rigor, alguns paralelogramos. Usa régua, esquadro e compasso. Deves primeiro fazer um esboço, onde assinales os dados.

1. Traçar um losango [ABCD] com 1,5 cm de lado, $B\hat{A}D = 50°$. Um losango é um paralelogramo com os quatro lados iguais.

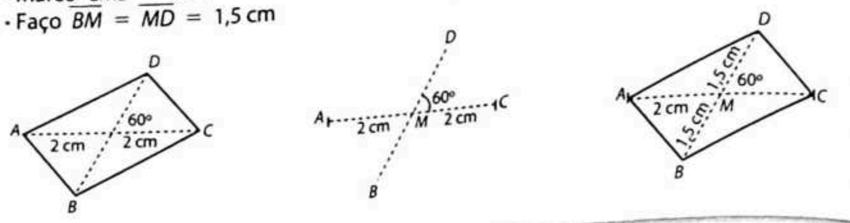


- Traço o lado [AD] e marco o ângulo de 50°. Traço [AB].
- Traço um arco com 1,5 cm, de centro B.
- Traço um arco com 1,5 cm e centro D. Traço [BC] e [DC].

2. Construir um losango [ABCD], sendo conhecidas as suas diagonais: $\overline{AC} = 4$ cm $\overline{BD} = 3$ cm
- Traço [AC] e assinalo o ponto M, meio da diagonal.
- Traço a perpendicular a [AC], que passa por M.
- Faço: $\overline{BM} = \overline{DM} = 1,5$ cm



3. Construir um paralelogramo cujas diagonais têm 4 cm e 3 cm e em que o ângulo por elas formado é de 60°.
   - Traço [AC] e assinalo o ponto médio, M.
   - Marco $C\hat{M}D = 60°$.
   - Faço $\overline{BM} = \overline{MD} = 1,5$ cm

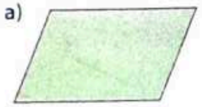


Exercícios resolvidos

1. Constrói paralelogramos, se possível, a partir dos seguintes dados:
   a) Dois lados de 6 e 8 cm, sendo o ângulo por eles formado de 120°.
   b) Três lados com 4, 5 e 6 cm de comprimento.
   c) Lados de 10 e 12 cm.

Resolução:

a)



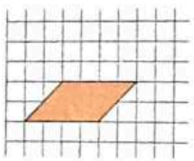
b) É impossível, pois os lados são iguais 2 a 2.

c) Tem muitas soluções pois não conhecemos nenhum ângulo.

2. Numa quadrícula, constrói um paralelogramo cujos lados maiores tenham quatro unidades de comprimento e que tenha dois ângulos com 45° de amplitude.

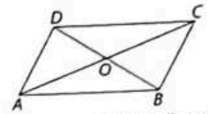
Resolução:

Como não é dada qualquer informação sobre os outros dois lados, uma das soluções possíveis é a seguinte:



Actividades

1. Passa a figura para o teu caderno, copia-a duas vezes e simula as operações que se propõem com o auxílio de um compasso e da sua ponta seca.



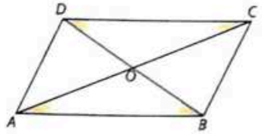
Se dermos meia volta em torno de O a este paralelogramo, veremos que D vai coincidir com o ponto onde estava B, que A vai coincidir com o ponto onde estava C, etc.

Sendo assim, podemos concluir que o lado [AD] é geometricamente igual ao seu oposto, o lado [BC], e também que o lado [AB] é igual ao lado [DC], ou seja:

Num paralelogramo, os lados opostos são iguais.

2. Observando a figura depois da meia volta em torno de O, temos:

$\overline{AO} = \overline{OC}$ e $\overline{DO} = \overline{OB}$



ou seja:

As diagonais de um paralelogramo bissectam-se.

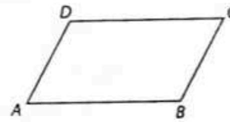
Bissectar é o mesmo que cortar ao meio.

Vê-se na figura que, ao fazer a rotação, [DO] vai coincidir com [BO] e também que [AO] vai coincidir com [CO].

Exercícios resolvidos

1. Como os ângulos opostos de um paralelogramo são ângulos da mesma espécie (ambos agudos ou ambos obtusos) e de lados paralelos, são, portanto, iguais.

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ e } \hat{B} = \hat{D}$$



Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.

Utilizando esta propriedade prova que:

Os ângulos adjacentes a um mesmo lado do paralelogramo são suplementares.

Resolução:

Sabe-se que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$

Mas se $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$, então a primeira igualdade vem:

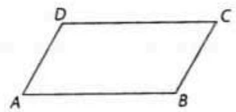
$$2\hat{A} + 2\hat{B} = 360°$$

ou

$$2(\hat{A} + \hat{B}) = 360°$$

e

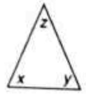
$$\hat{A} + \hat{B} = 180°$$



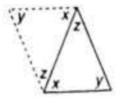
Os ângulos das vértices A e B são, pois, suplementares.

Nota: As figuras ajudam a perceber o que se afirma no exercício.

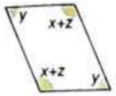
• 2 triângulos iguais a este:



• Podem arrumar-se assim:



Concluindo-se que:



2. **Na figura seguinte desenharam-se, à mão e sem qualquer cuidado de perfeição, vários paralelogramos nos quais se assinalam medidas de alguns elementos.**

A. B. C. D. E. F.

Selecciona de entre estes paralelogramos, os que são rectângulos e os que são losangos.

Resolução:

Analisemos os dois primeiros casos:

A. Se o paralelogramo tem um ângulo com 80° de amplitude, o ângulo oposto a este tem a mesma amplitude, medindo os outros dois 100° cada um; sendo os lados consecutivos diferentes, o paralelogramo não tem um nome especial, costumando dizer-se que é um *paralelogramo propriamente dito*.

B. Se um ângulo tem 90° de amplitude, o oposto também terá a mesma amplitude, o mesmo sucedendo com os restantes ângulos, sendo, portanto, todos rectos.
Como os lados consecutivos são diferentes, trata-se de um *rectângulo*.

Se continuares esta análise caso a caso, irás concluir que são rectângulos os paralelogramos **B.** **D.** e **E.** e são losangos os **C.** **E.** e **F.**

Destas conclusões sai ainda outra: o paralelogramo E, é simultaneamente rectângulo e losango, ou seja, é um *quadrado*.

3. **É possível desenhar um rectângulo de diagonais medindo 12 cm? E se for um paralelogramo propriamente dito?**

Resolução:

As diagonais do rectângulo são iguais. Logo é possível que um rectângulo tenha diagonais com 12 cm.
Porém, num paralelogramo propriamente dito isso não é possível.

4. **«Se um quadrilátero é um rectângulo, então as suas diagonais são iguais». Comenta esta outra afirmação: «Se as diagonais dum quadrilátero são iguais então ele é um rectângulo».**

Resolução:

Conclui-se que todo o quadrilátero com diagonais iguais é rectângulo (ou quadrado).

5. **Poderá um paralelogramo ser côncavo? E um quite? Exemplifica.**

Resolução:

Um paralelogramo não pode. Mas um quite pode.
Por exemplo: Um quite côncavo.

6. **Desenha, se possível, um quadrilátero que verifique a condição pedida em cada caso e comenta os resultados obtidos.**

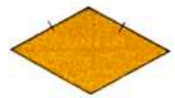
a) Paralelogramo com um ângulo recto.
b) Paralelogramo com dois lados consecutivos iguais.
c) Rectângulo com dois lados consecutivos iguais.
d) Losango com dois lados perpendiculares.
e) Três e só três ângulos rectos.

Resolução:

a)

Um paralelogramo com um ângulo recto tem todos os ângulos rectos. É um rectângulo.

b)



Só pode ser um losango. Se os lados consecutivos são iguais os opostos também são, por ser um paralelogramo.

c)

Só pode ser um quadrado.

d)

Só pode ser um quadrado

e) Impossível pois o quarto ângulo será 360° – 3 × 90° = 90° ou seja, também ângulo recto.

7. **Podemos afirmar que:**

a) Um rectângulo é um paralelogramo com um ângulo recto?
b) Um losango é um paralelogramo com dois lados consecutivos iguais?
c) Um quadrado é um losango rectângulo?

Resolução:

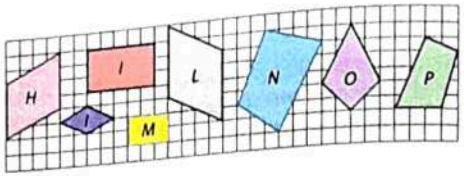
a) Sim, pois se tem um ângulo recto, o oposto também é recto, o mesmo sucedendo aos restantes.
b) Sim. Se os lados consecutivos são iguais os opostos também o são.
c) Sim. Tem os lados iguais por ser losango e os ângulos por ser rectângulo.

1. De entre os polígonos seguintes, quais são quadriláteros?

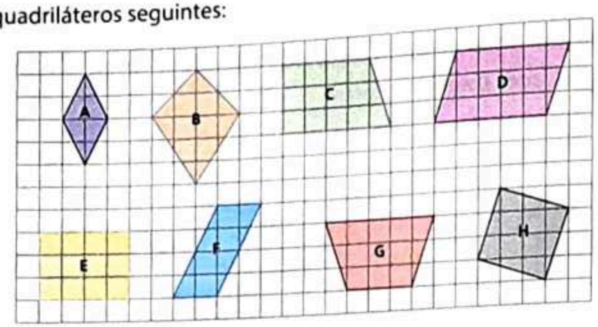
2. Observa os quadriláteros e indica:

a) Os não trapézios.

b) Os paralelogramos.



3. Observa os quadriláteros seguintes:

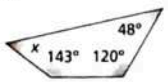


a) Indica os que são paralelogramos.

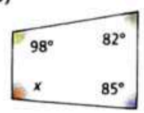
b) De entre os que são paralelogramos, indica aqueles que admitem dois, e só dois, eixos de simetria.

4. Determina a amplitude dos ângulos desconhecidos em cada um dos seguintes quadriláteros.

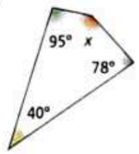
a)



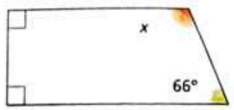
b)



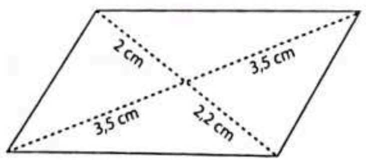
c)



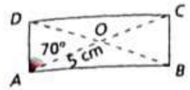
d)



5. O quadrilátero da figura abaixo é um paralelogramo? Justifica a resposta.



6. Observa o rectângulo [*ABCD*] e o losango [*RSTU*]. Completa:

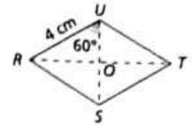


$\overline{DB} =$ ____

$\widehat{CAB} =$ ____

$\widehat{AOB} =$ ____

$\widehat{DOC} =$ ____



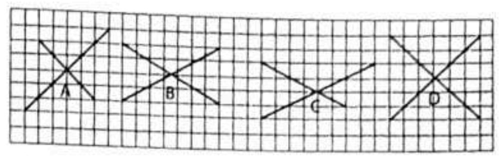
$\overline{ST} =$ ____

$\widehat{URS} =$ ____

$\widehat{RTU} =$ ____

$\widehat{UOT} =$ ____

7. Observa a figura ao lado, onde estão traçadas as duas diagonais de quatro quadriláteros.



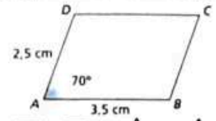
a) Em que casos são as diagonais geometricamente iguais?

b) Em que casos são as diagonais perpendiculares?

c) Identifica o quadrilátero a que pertence cada par de diagonais.

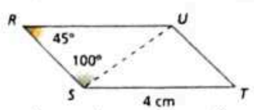
8. As figuras representam paralelogramos. Para cada caso, determina os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos indicados. Justifica as respostas.

a)



$\overline{DC}$; $\overline{BC}$; $\widehat{DCB}$; $\widehat{ADC}$; $\widehat{ABC}$

b)



$\widehat{RST}$; $\widehat{UST}$; $\widehat{UTS}$; $\widehat{RUS}$; $\overline{RU}$

9. Constrói o paralelogramo [*PATO*], sabendo que as suas diagonais têm de comprimento 7 cm e 5 cm e o ângulo por elas formado tem 55° de amplitude.

10. Constrói o quadrado [*RATO*], de perímetro 20 cm .
Traça a diagonal [*RT*].
Que podes dizer do triângulo [*RTO*] ?
Quantos eixos de simetria admite a figura [*RATO*]? Traça-os a vermelho.

11. Constrói o paralelogramo [*RATO*], em que:

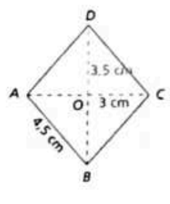
$\overline{RO} = 3$ cm $\quad \overline{OT} = 2$ cm $\quad \overline{RT} = 4$ cm

12. O quadrilátero ao lado é um paralelogramo. Determina:

a) $\overline{CD}$

b) $\overline{AO}$

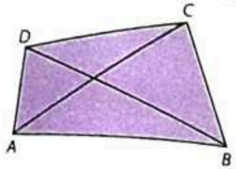
c) $\overline{BD}$



Exercícios de escolha múltipla

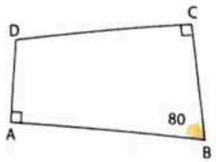
1.ª Parte

1. Em relação ao quadrilátero abaixo apresentado só uma das afirmações é verdadeira:
   - **A.** As diagonais [AC] e [BD] bissectam-se.
   - **B.** [BC] e [DC] são lados consecutivos.
   - **C.** Os ângulos opostos são iguais.
   - **D.** Os ângulos opostos são suplementares.

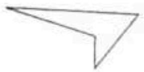
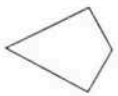
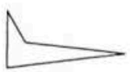
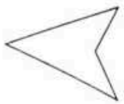


2. Qual das afirmações é verdadeira:
   - **A.** A soma dos ângulos externos dum triângulo é igual à soma dos ângulos externos dum quadrilátero.
   - **B.** Os ângulos adjacentes a um lado de um quadrilátero são suplementares.
   - **C.** Os ângulos adjacentes a um lado de um quadrilátero são iguais.
   - **D.** As diagonais dum quadrilátero são perpendiculares.

3. O ângulo interno de vértice D mede:
   - **A.** 80°
   - **B.** 90°
   - **C.** 100°
   - **D.** 110°



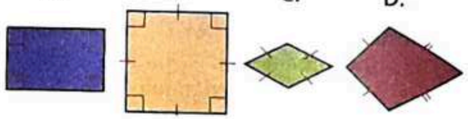
4. Qual dos quadriláteros é convexo?

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

5. Um quadrilátero, só com dois lados paralelos, é:
   - **A.** Losango.
   - **B.** Não trapézio.
   - **C.** Rectângulo.
   - **D.** Trapézio.

6. Qual dos quadriláteros seguintes é simultaneamente rectângulo e losango?

A. **B.** **C.** **D.**



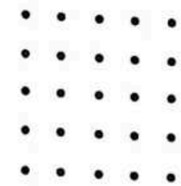
7. Com os dados de cada alínea, só num caso é possível construir um paralelogramo de lados consecutivos com 6 e 8 cm de comprimento. Qual deles é?
   - **A.** Ângulos adjacentes ao lado de 6 cm com 70° e 100°.
   - **B.** Dois ângulos opostos com 80° e 70°.
   - **C.** Ângulos opostos com 80° e 70°.
   - **D.** Diagonais medindo 10 cm cada uma.

8. Indica qual é a única afirmação verdadeira:
   - **A.** Todos os trapézios são paralelogramos.
   - **B.** Todos os losangos são rectângulos.
   - **C.** Todos os quadrados são trapézios.
   - **D.** Todos os quadriláteros de diagonais perpendiculares são losangos.

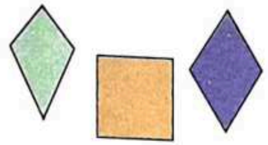
2.ª Parte

1. Explica se é verdadeiro ou falso?
   - **A.** Se um quadrilátero tem dois eixos de simetria perpendiculares, é losango.
   - **B.** Se um quadrilátero tem quatro lados iguais, tem quatro eixos de simetria.
   - **C.** Se as diagonais de um quadrilátero têm o mesmo comprimento, é um rectângulo.
   - **D.** As diagonais de um losango são perpendiculares.
   - **E.** O quadrado é um quadrilátero regular.

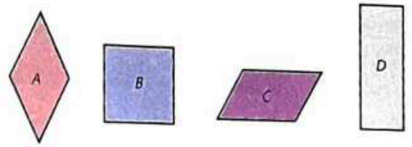
2. Copia e desenha, na grelha de pontos, um polígono que tenha as seguintes características:
   - É um quadrilátero.
   - Tem todos os lados geometricamente iguais.
   - As suas diagonais são diferentes.



3. Observa os quadriláteros representados ao lado e indica uma das propriedades que é comum a todos eles.
   - ☐ Os quatro lados são geometricamente iguais.
   - ☐ Os lados opostos são paralelos.
   - ☐ As diagonais são perpendiculares.
   - ☐ Os ângulos são todos rectos.

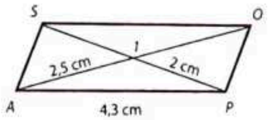


4. Observa os seguintes quadriláteros.



Descreve o quadrilátero A, recorrendo às suas propriedades geométricas, de modo a que seja possível distingui-lo dos outros três.

5. Observa o paralelogramo e determina $\overline{IS}$, $\overline{IO}$ e $\overline{SO}$.
   Verdadeiro ou falso? Explica.
   - **A.** Todos os trapézios são paralelogramos.
   - **B.** Um quadrado é um rectângulo.



UNIDADE 7

Noções básicas de estatística

Págs. 142 a 157

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Reconhecer a importância da Estatística.
- Definir população e amostra.
- Diferenciar população da amostra.
- Recolher e organizar dados em tabelas.
- Determinar frequências absoluta, relativa e relativa percentual e acumuladas.
- Apresentar dados na forma de uma distribuição de frequências.
- Representar e interpretar dados em tabelas e gráficos.
- Determinar o valor médio (simples e ponderada), a moda e a mediana.
- Analisar o significado do valor médio, moda e mediana em dados simples.

CONTEÚDOS

Estatística

- Objectivo da estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta ciência na vida moderna
- Conceito de população e amostra
- Recolha e organização de dados
- Frequência absoluta e relativa para dados simples
- Tabelas de frequências (absoluta e relativa, percentual e acumuladas)
- Gráfico circular
- Gráficos de barras
- Medidas de tendência central e o seu uso na análise de dados: valor médio, moda e mediana

Introdução

A Estatística é um ramo da Matemática que tem por objectivo: obter, organizar e analisar informação.

Um estudo estatístico incide sobre um conjunto cujos elementos têm uma ou mais características comuns.

Recorda alguns termos ou conceitos muito utilizados em Estatística:

- **População**: conjunto cujos elementos têm uma ou mais características comuns.
- **Amostra**: conjunto finito da população que seja representativo desta.
- **Variável estatística**: propriedade ou característica que é observada nos elementos de uma população. Esta variável pode ser qualitativa (cor dos olhos, sexo, etc.) ou quantitativa (número de irmãos, peso, altura, etc.).
  A variável estatística quantitativa pode ser:
  - **discreta**, por exemplo, o número de golos marcados por uma equipa, numa época;
  - **contínua**, por exemplo, a altura dos alunos de uma escola.
- **Censo**: estudo estatístico em que se observa toda a população.
- **Sondagem**: estudo estatístico em que se estuda uma amostra da população.

No teu dia a dia, lendo jornais, revistas, vendo televisão, contactas com tabelas, gráficos, sondagens e previsões nos domínios da Biologia, Astronomia, Medicina, Agricultura, Educação, Economia, Política…

Consulta a rubrica Notas históricas pág. 211.

Exemplo

Perguntou-se a um grupo de vinte e cinco alunos:
«Quantos filmes de vídeo viste o mês passado?»
E fez-se o registo.

5	2	2	2	5
1	4	5	4	3
3	3	1	2	2
1	1	2	3	4
5	2	3	4	3

Neste exemplo:
- População em estudo: 25 alunos.
- Variável estatística: filmes de vídeo vistos por cada aluno.
- Valores da variável estatística: 1, 2, 3, 4 e 5.

Recolha e organização de dados. Frequência absoluta, relativa e acumulada. Tabelas e gráficos

Um estudo estatístico envolve: recolha, organização e apresentação de dados. A análise e interpretação dos dados permite fazer previsões e tomar decisões.

Observa o conjunto de dados que se refere ao número de aulas de natação frequentadas por 24 alunos de uma turma, durante uma semana.

Dados

3	5	3	4	3	3
2	5	4	1	4	1
2	3	3	2	4	3
2	4	3	1	4	3

A partir desses dados constrói-se a tabela de frequências absolutas, que representa a distribuição de efectivos.

Número de aulas	Contagem	Frequência absoluta
1	|||	3
2	||||	4
3	~~||||~~ ||||	9
4	~~||||~~ |	6
5	||	2

Há 6 alunos que frequentaram 4 aulas.

A frequência absoluta, ou efectivo, é o número de vezes que um dado se repete. Outra forma de apresentar esta distribuição é através de gráficos. Observa o gráfico de barras ao lado relativo a esta distribuição. Neste caso, o gráfico é constituído por rectângulos com bases iguais, onde a cada número de aulas corresponde uma barra de altura proporcional à frequência absoluta correspondente.

Observa agora outro exemplo.

Um professor de Informática, numa turma de 24 alunos, registou, no final de uma semana, o número de horas que cada aluno passou na *Internet*.

Recolhidos os dados, como constam ao lado, organizou-os numa tabela de frequências absolutas e de frequências relativas.

2	5	3	4
5	5	4	5
6	5	5	5
5	4	3	4
4	5	6	2
5	6	4	6

A frequência relativa de cada valor é o quociente da frequência absoluta desse valor pelo número total das frequências absolutas.

$$\text{Frequência relativa} = \frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total dos efectivos}}$$

A frequência relativa é sempre um número entre 0 e 1 (ou entre 0% e 100%). O total das frequências relativas tem de ser 1 (100%) se assim não acontecer, deves proceder a ajustamentos.

Número de aulas	Contagem	Frequência absoluta	Frequência relativa
2	||	2	$\frac{2}{24} \approx 0{,}08 = 8\%$
3	||	2	$\frac{2}{24} \approx 0{,}08 = 8\%$
4	~~||||~~ |	6	$\frac{6}{24} = 0{,}25 = 25\%$
5	~~||||~~ ~~||||~~	10	$\frac{10}{24} \approx 0{,}42 = 42\%$
6	||||	4	$\frac{4}{24} \approx 0{,}17 = 17\%$
Total		24	$1 = 100\%$

Por exemplo, o registo de 4 horas surge seis vezes num total de 24. A frequência relativa do valor 4 é:
$\frac{6}{24} = 0{,}25$ ou 25%

O total das frequências relativas é 1 (100%).

Concluímos que a percentagem de alunos que passou:

- Menos de 4 horas na *Internet* foi de aproximadamente $8\% + 8\% = 16\%$.
- Pelo menos 3 horas na *Internet* foi de aproximadamente $8\% + 25\% + 42\% + 17\% = 92\%$.

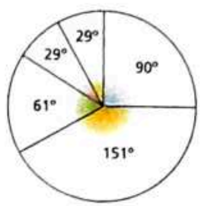
Vamos construir um gráfico circular correspondente à situação apresentada.

Representamos, num círculo, a distribuição das frequências relativas usando sectores circulares.

A amplitude do ângulo ao centro de cada sector circular é directamente proporcional à frequência relativa desse valor e obtém-se, em graus, multiplicando a frequência relativa por 360°.

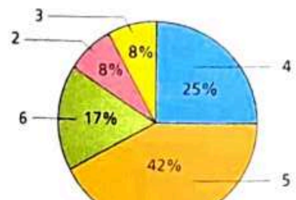
Número de horas	Frequência relativa	Amplitude do ângulo (arredondada às unidades)
2	0,08	$0{,}08 \times 360° \approx 29°$
3	0,08	$0{,}08 \times 360° \approx 29°$
4	0,25	$0{,}25 \times 360° = 90°$
5	0,42	$0{,}42 \times 360° \approx 151°$
6	0,17	$0{,}17 \times 360° \approx 61°$
Total	1	360°

Utilizando o transferidor, marcam-se os ângulos ao centro:



e obtém-se

Número de horas na *Internet*



- **Frequência absoluta acumulada** de um valor x é a soma das frequências absolutas dos valores inferiores ou iguais a x.
- **Frequência relativa acumulada** de um valor x é a soma das frequências relativas dos valores inferiores ou iguais a x.

Recolhidos os dados da página 144,

5	2	2	2	5
1	4	5	4	3
3	3	1	2	2
1	1	2	3	4
5	2	3	4	3

vamos organizá-los numa tabela de frequências e em gráficos.

Tabela de frequências

Número de filmes de vídeo	frequência absoluta fa	frequência relativa fr	frequência absoluta acumulada Fa	frequência relativa acumulada Fr	amplitude do ângulo $fr \times 360°$
1	4	0,16 = 16%	4	16%	$0{,}16 \times 360° = 58°$
2	7	0,28 = 28%	11	44%	$0{,}28 \times 360° = 100°$
3	6	0,24 = 24%	17	68%	$0{,}24 \times 360° = 86°$
4	4	0,16 = 16%	21	84%	$0{,}16 \times 360° = 58°$
5	4	0,16 = 16%	25	100%	$0{,}16 \times 360° = 58°$
Totais	25	1 = 100%			360°

Há 7 alunos em 25 que viram 2 filmes. A frequência relativa do valor 2 é:

$\frac{7}{25} = 28\%$

21 alunos (4 + 7 + 6 + 4) viram 4 ou menos de 4 filmes. 84% dos alunos (16% + 28% + 24% + 16%) viram 4 ou menos de 4 filmes.

Gráficos:

Gráfico circular

Número de filmes vistos num mês

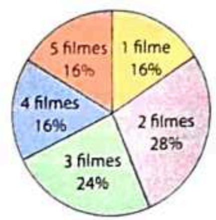
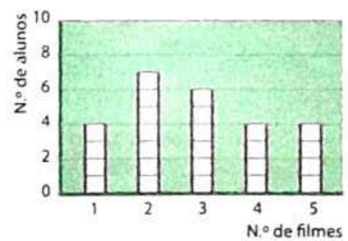


Gráfico de barras

Número de filmes vistos num mês



Resumindo

Gráfico de barras

- As barras devem ter todas a mesma largura.
- A altura de cada barra é proporcional à frequência.
- O gráfico deve ter um título.
- A unidade gráfica deve ser escolhida de acordo com os dados.

Gráfico circular

- Obtém-se dividindo o círculo em sectores circulares com ângulos ao centro de amplitudes directamente proporcionais aos efectivos (ou às frequências relativas). Para obter a amplitude em graus do ângulo de cada sector, multiplica-se a frequência relativa por 360°.

Interpretação de dados

É importante que saibas interpretar os dados fornecidos por uma tabela de frequências ou por um gráfico.

Deves estar atento a gráficos que fornecem informações de uma forma enganadora. Por exemplo, um gráfico que não tem título ou em que a escala está incorrectamente marcada pode levar-te a tirar conclusões erradas.

Observa os dois gráficos seguintes, que mostram o resultado de um inquérito feito a 102 consumidores sobre a sua preferência pelo sumo A ou B.

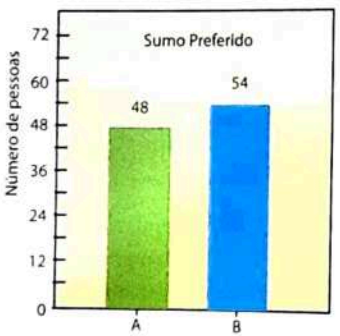


Gráfico correcto

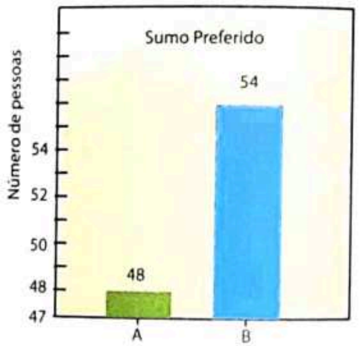


Gráfico incorrecto – a escala não começa no zero.

Uma empresa que vendesse o sumo B podia estar interessada em fazer publicidade usando o gráfico da direita, que dá a ideia de que o número de pessoas inquiridas que gostam do sumo B é muito superior ao número de pessoas que gostam do sumo A.

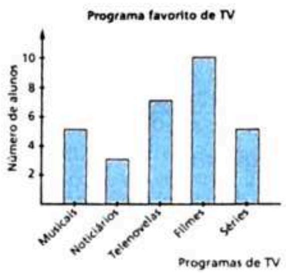
Exercícios de consolidação

1. Vinte e cinco alunos do 9.º ano, num trabalho de História, obtiveram as notas ao lado.

8	9	15	13	19
10	13	19	9	10
13	15	18	10	13
18	18	15	9	15
13	15	10	13	18

a) Constrói uma tabela de frequência, absoluta, relativa, absoluta acumulada, relativa acumulada.
b) Qual é a percentagem de notas inferiores a 10?
c) Quantos alunos tiveram, pelo menos, nota 13?

2. A Eulália fez um inquérito à sua turma, com 30 alunos, sobre o «Programa favorito de televisão». Com os resultados, construiu o gráfico ao lado.



a) Qual é a diferença entre o número de alunos que prefere filmes e o número de alunos que prefere noticiários?
b) Que percentagem dos inquiridos prefere noticiários?
c) Que tipos de programas têm igual preferência?
d) Se fosses anunciante, em que tipo de programas farias passar o teu anúncio? Justifica.

3. Foi feito um inquérito a 74 pessoas sobre as doenças de que padeciam. Completa a tabela.

Doenças	Tuberculose	SIDA	Malária	Alcoolismo	Outras
Frequência absoluta	21	16		12	10
Frequência relativa					

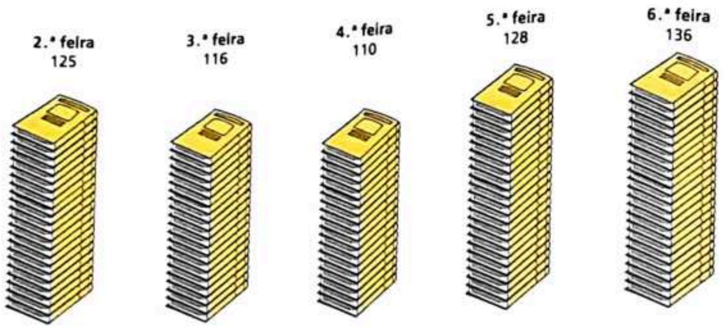
4. Observa o gráfico circular e responde às seguintes questões:

a) Estarão os moçambicanos optimistas em relação à situação do ambiente em Moçambique, nos próximos anos? Justifica a tua resposta.
b) Poderemos afirmar que um em cada quatro inquiridos acha que o ambiente vai melhorar? Justifica a resposta.
c) Sabendo que o inquérito foi feito a 800 pessoas, quantas não souberam ou não quiseram responder?
d) Qual seria a tua resposta? Justifica-a.

Medidas de tendência central

Média

Observa as vendas na livraria Boa Leitura na semana de 1 a 6 de Abril:



Problema

Qual foi o número médio de livros vendidos por dia?

Resolução:

A média de livros vendidos por dia obtém-se somando o número de livros vendidos nos cinco dias e dividindo a soma obtida pelo número de dias:

$$\frac{125+116+110+128+136}{5} = \frac{615}{5} = 123 \leftarrow \boxed{\text{média}}$$

O número médio de livros vendidos por dia foi de 123, o que significa que se o número de livros vendidos fosse o mesmo em cada dia, para vender os mesmos 615 livros, teríamos de vender 123 livros em cada um dos dias.

Supõe agora que a mesma livraria abriu no sábado e que vendeu nesse dia apenas 27 livros. O que aconteceu à média?

$$\frac{125+116+110+128+136+27}{6} = \frac{642}{6} = 107 \leftarrow \boxed{\text{média}}$$

Neste caso, um dia de vendas fraco baixou muito a média. A média, 107, é inferior aos valores dos cinco primeiros dias da semana e por isso não descreve um dia normal de vendas na livraria Boa Leitura.

Para obter a média aritmética ou média:

- Somam-se os valores de todos os dados.
- Divide-se a soma obtida pelo número de dados.
- A média representa-se por $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_2 + x_n}{n}$$

Exemplo

As alturas de 8 crianças, em cm, são:

95 66 93 91 68 92 77 95

calcular a média das alturas.

Resolução:

$$\bar{x} = \frac{95+66+93+91+68+92+77+95}{8} = \frac{677}{8} = 84{,}625$$

R.: A média das alturas é 84,625 cm.

Média ponderada

Nos cálculos envolvendo a média aritmética simples, todas as ocorrências têm exactamente a mesma importância ou o mesmo peso. Dizemos, então, que elas têm o mesmo peso relativo.

No entanto, existem casos onde as ocorrências têm importância relativa diferente. Nestes casos, o cálculo da média deve levar em conta esta importância relativa ou peso relativo. Este tipo de média chama-se média aritmética ponderada.

Ponderar é sinónimo de pesar. No cálculo da média ponderada, multiplicas cada valor do conjunto por seu «peso», isto é, sua importância relativa.

A média aritmética ponderada, $\bar{x}_p$ de um conjunto de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ cuja importância relativa («peso») é respectivamente $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ é calculada da seguinte maneira:

$$\bar{x}_p = \frac{p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

Exercício resolvido

A Marta participou num concurso, onde foram realizadas provas de Português, Matemática, Biologia e História. Essas provas tinham peso 3, 3, 2 e 2, respectivamente. Sabendo que a Marta tirou 12,0 em Português, 7,5 em Matemática, 5,0 em Biologia e 10,0 em História, qual foi a média ponderada que ele obteve?

Resolução:

$$\bar{x}_p = \frac{12{,}0 \cdot 3 + 7{,}5 \cdot 3 + 5{,}0 \cdot 2 + 10{,}0 \cdot 2}{3+3+2+2} = \frac{88{,}5}{10} = 8{,}85$$

A média ponderada da Marta foi de 8,85.

Moda

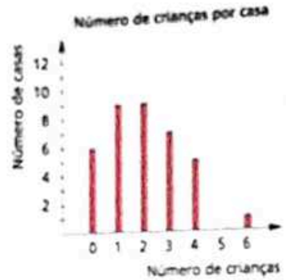
A moda de uma distribuição de dados é o valor, ou modalidade, que ocorre mais vezes nessa distribuição, isto é, o que tem maior frequência absoluta, ou efectivo.

No entanto, um conjunto de dados pode não ter moda – nesse caso, diz-se amodal – ou ter mais do que uma moda.

Observa os exemplos:

1. No conjunto de dados: 41 22 39 63 39 80
   a moda é 39 porque 39 ocorre mais vezes que qualquer outro dado.
2. No conjunto de dados: 12,4 12,7 12,9 12,6 13,1 12,2
   não existe moda.

- Na distribuição de dados representada no gráfico seguinte, relativamente ao número de crianças por casa, existem duas modas:



1 criança e 2 crianças, porque às modalidades 1 criança e 2 crianças corresponde a maior frequência, isto é, 9.

Resumindo:

- Moda: é o valor, ou modalidade, que ocorre mais vezes numa distribuição.
- Representa-se por M_o.
- Moda de um conjunto de dados é o valor que ocorre com mais frequência.

Exemplos

1. 82 44 13 78 44 25
   $M_o = 44$
2. 125,1 13,4 125,1 13,4 18
   A moda é 13,4 e 125,1.

Mediana

Para melhor caracterizar esta distribuição de dados, recorremos a outra medida de tendência central, chamada mediana.

Vamos, então, determinar a mediana de:

125 116 110 128 136 27

Para isso, ordenam-se os valores dos dados e procura-se o valor do dado central:

27 110 116 125 128 136

Neste caso, a distribuição não tem apenas um dado central, pois tem um número par de dados. Toma-se para mediana a média dos valores dos dois dados centrais:

$$\text{mediana} = \frac{116 + 125}{2} = 120{,}5$$

A mediana, 120,5, descreve melhor a distribuição dos dados do que a média anteriormente obtida, 107. A média é afectada pelos valores extremos dos dados, o que não acontece com a mediana.

Para obter a mediana da primeira distribuição do exemplo anterior, com um número ímpar de dados:

125 116 110 128 136

Ordenam-se os dados e o valor do dado central é a mediana da distribuição:

110 116 125 128 136

mediana

Para obter a mediana:

- Ordenam-se os dados, na ordem crescente ou decrescente.
- Escolhe-se o valor do meio, se o número de dados for ímpar.
- Calcula-se a média dos dois valores centrais, se o número de dados for par.
- Representa-se por $\tilde{x}$.
- A mediana divide um conjunto de dados ao meio.

Na maioria dos casos devemos determinar a média e a mediana para melhor descrever uma distribuição de dados.

A média e a mediana não têm que pertencer ao conjunto de dados.

Para comparar conjuntos de dados recorre-se às medidas de tendência central:

- Média, $\bar{x}$
- Mediana, $\tilde{x}$
- Moda, M_o

Exemplos

1. 5 13 17 21 23
   $\tilde{x} = 17$
2. 2 7 9 15 23 24
   $\tilde{x} = \frac{9 + 15}{2} = 12$

5. Numa loja, a venda de CD's durante duas semanas foi:

16 17 18 30 10 12 19 20 22 78 16 15 20 16

a) Calcula a média e a mediana desta distribuição.

b) Indica, justificando, qual das duas medidas de tendência central, média e mediana, representa melhor esta distribuição.

6. Calcula a média de cada um dos seguintes conjuntos de dados:

a) 1, 3, 2, 3, 4, 3

b) 4, 6, 4, 5, 3, 4, 1, 4

c) 244, 118, 250, 208, 272, 196, 250

d) 18,4; 20,2; 16,9; 23,1; 22; 24,6; 18,8

7. A Joana contou o número de passageiros dos 50 automóveis que pararam durante uma manhã no parque da sua escola. Os resultados foram os seguintes:

2	4	2	4	2	1	3	1	1	1
1	2	1	2	1	1	1	2	1	1
1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	1	2	1
2	2	3	1	3	1	1	3	1	1

a) Organiza os dados numa tabela de frequências.

b) Determina o número médio de pessoas por automóvel.

8. Calcula a mediana dos seguintes conjuntos de dados:

a) 16, 32, 41, 35, 28, 37, 28

b) 1,0; 4,7; 2,9; 7,1; 5,3; 8,2; 3,2; 9,4

c) 15, 15, 14, 14, 13, 17, 16

d) 90, 14, 90, 90, 14, 6, 8, 16

9. Pensei em cinco números cuja média é 6. Quatro dos números são: 5, 7, 4 e 3. Descobre o outro número em que pensei.

10. A média de cinco números naturais é 8. Retirou-se um número e a média dos quatro restantes é 9. Que número se retirou?

11. Dos 60 candidatos a emprego numa empresa, 50% foram admitidos. A média das classificações obtidas (numa escala de 0 a 20) pelos candidatos na prova de selecção foi de 10,8 e a mediana 9,5. Sabendo que a Teresa foi seleccionada, o que podes dizer acerca da sua classificação na prova de selecção?

12. Calcula a moda de cada um dos seguintes conjuntos de dados:

a) 41, 22, 39, 63, 39, 80

b) 12,4; 12,7; 12,9; 12,6; 13,1; 12,2

c) 282, 285, 283, 285, 287, 289, 287

d) azul, preto, vermelho, azul, azul

13. Dá exemplos de um conjunto de dados em que não seja possível calcular a média nem a mediana, mas que seja possível calcular a moda.

14. O quadro seguinte refere-se ao grupo sanguíneo dos doentes internados num hospital durante uma semana.

Grupo sanguíneo	A	B	AB	0
Frequência relativa	30,6%	24,2%	5%	40,2%

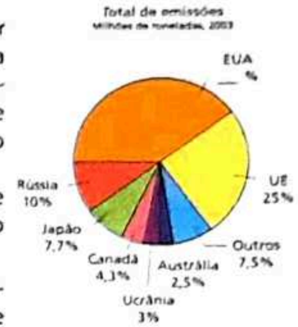
a) Representa estes dados num gráfico circular.

b) Averigua junto dos teus colegas da turma o grupo sanguíneo a que pertencem. Faz o estudo estatístico, construindo a tabela de frequências e o gráfico circular.

c) É importante conheceres o teu grupo sanguíneo? Discute com os teus colegas.

15. O efeito de estufa é uma das grandes preocupações do ser humano, neste início do século. Em todo o mundo, há uma tentativa de chamar a atenção dos governantes, principalmente dos países mais industrializados, para a necessidade de reduzir a emissão de gases para a atmosfera, responsáveis pelo aumento deste fenómeno.

No gráfico circular apresenta-se a distribuição das emissões de gases para a atmosfera, em milhões de toneladas, durante o ano de 2003.



a) Os Estados Unidos da América é um dos países mais desenvolvidos. Em que percentagem contribui para o efeito de estufa?

b) Sabendo que, em 2003, o total de emissão de gases de efeito de estufa foi de 17 287,8 milhões de toneladas, calcula a emissão de gases na UE nesse ano.

c) Calcula as amplitudes dos ângulos correspondentes a cada sector do gráfico.

d) Prevê-se que, até 2050, a emissão de gases seja reduzida em 60% relativamente aos dados de 2003. Qual é a previsão, em milhões de toneladas, da emissão de gases de efeito de estufa para 2050?

e) Calcula a emissão de gases nos outros e analisa a diferença para EUA e UE.

16. Observa a tabela:

Número de dias de faltas	1	2	3	4	5
Frequência absoluta	6	0	3	1	1

a) Calcula a média, a mediana e a moda desta distribuição.

b) Completa a tabela de frequências com a frequência relativa e as frequências absoluta e relativa acumuladas.

17. Considera a regra de ouro:

Seja educado, em civismo tome sempre a dianteira.

a) Qual é a vogal que aparece com maior frequência?

b) Qual é a frequência relativa das palavras com quatro letras?

c) Qual é o número médio de letras por palavra?

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

Indica a resposta correcta: A, B, C ou D.

1. A tabela seguinte indica o número de livros que um grupo de jovens leu durante as férias:

Número de livros	0	1	2	3	4
Número de jovens	12	8	6	2	4

a) O número de jovens deste grupo é:

A. 10 B. 30 C. 32 D. 36

b) A percentagem de jovens que leu um livro é:

A. 5% B. 20% C. 25% D. 8%

c) O número de jovens que leu pelo menos dois livros é:

A. 6 B. 4 C. 12 D. 20

d) Nas férias, estes jovens leram uma média aproximada de:

A. 1,3 livros B. 2 livros C. 1 livro D. 4 livros

e) A moda desta distribuição é:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. Em 23 trabalhos de Física, avaliados de 0 a 20, as classificações foram:

8	11	9	15	9	16	20	8	9	12	16	9
18	18	15	7	6	18	14	8	7	16	10	

a) A média das notas é de aproximadamente:

A. 6,3 B. 12,1 C. 9 D. 10

b) A mediana das notas é:

A. 11 B. 10 C. 12 D. 9

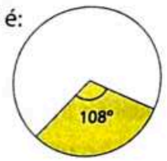
c) A nota mais frequente é:

A. 9 B. 16 C. 18 D. 8

3. A percentagem do círculo que corresponde ao ângulo ao centro de 108° é:

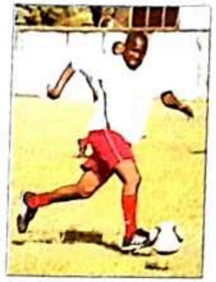
A. 25% C. 40%

B. 50% D. 30%



2.ª Parte

1. O número de golos marcados por uma equipa de futebol em 20 jogos foi:



0	1	3	0	2	2	3	1	2	0
1	0	1	0	3	0	0	1	0	3

a) Organiza os dados numa tabela de frequências absolutas, relativas e acumuladas.

b) Qual é a moda e a média de golos marcados?

c) Qual é a percentagem de jogos em que a equipa marcou pelo menos dois golos?

d) Constrói um gráfico circular desta distribuição.

2. O gráfico ao lado traduz o resultado de viagens de uma agência de turismo.

a) Qual é o local preferido?

b) Sabendo que viajaram no total 4 000 turistas, quantos viajaram em cada destino?

c) Qual é o local que reuniu 1/3 dos visitantes da barragem de Cahora-Bassa?

3. As notas num teste de Matemática com duas versões, A e B, numa escala de 0 a 20, foram:

Teste A	11	11	12	13	15			
Teste B	9	12	12	12	13	13	14	15

a) Calcula, para cada versão, a moda, a média e a mediana.

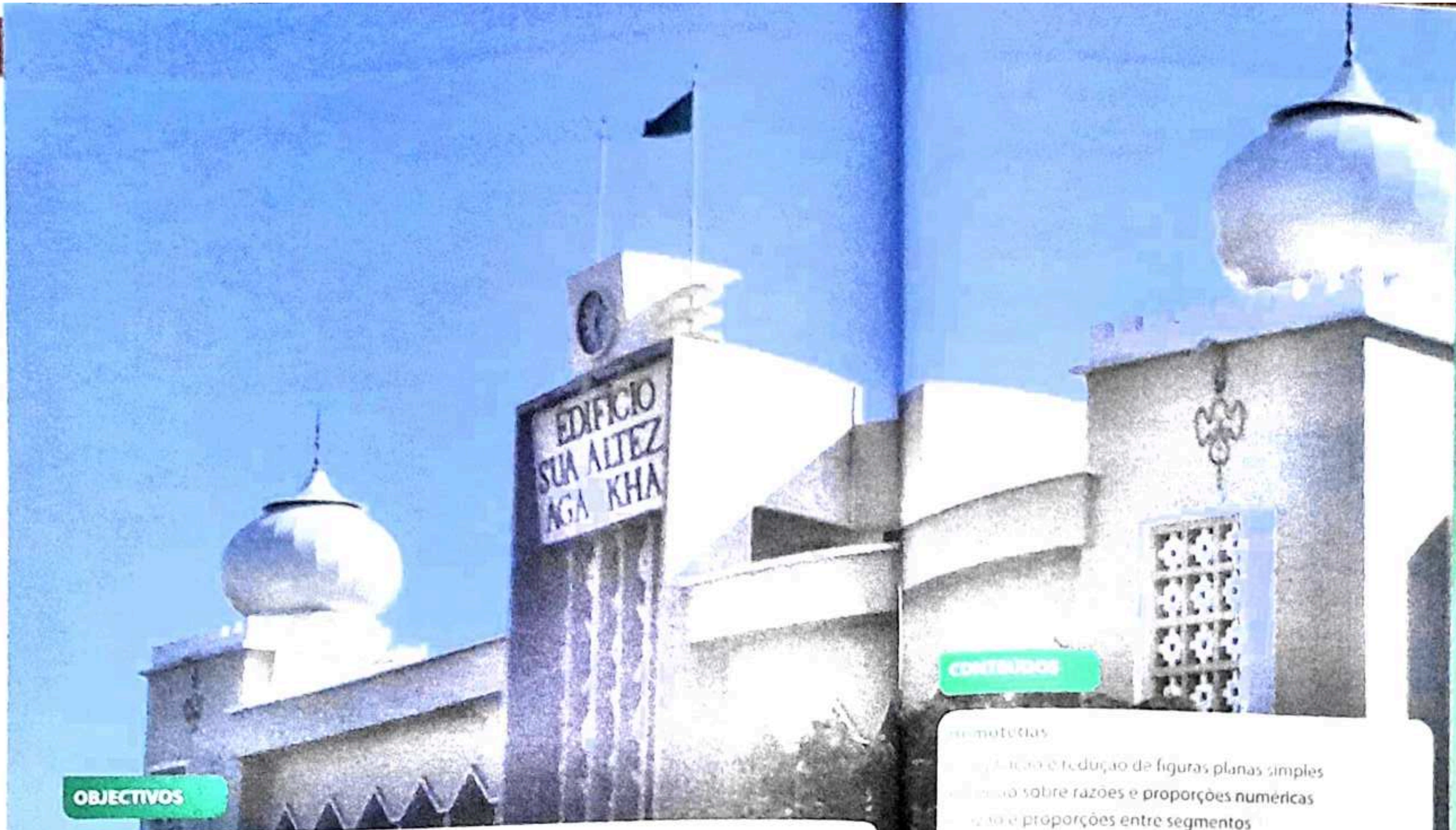
b) Baseando-te nos cálculos da alínea anterior, compara o aproveitamento da turma em cada uma das versões.

4. O Miqueias ajudou a sua irmã Paula a calcular a sua média final para se candidatar a uma bolsa de estudos:

Disciplinas	Port.	Hist.	Geog.	Mat.	Filosof.	Inglês
Notas finais	10	12	15	11	12	13
Exames	10	8	9	9	10	10

Média final = Nota final (70%) + Nota de exame (30%)

Com que média a Paula se candidatou?



UNIDADE 8

Semelhança de triângulos

Págs. 158 a 187

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Aplicar a homotetia na ampliação e na redução de figuras planas simples (triângulo, rectângulo, quadrado).
- Determinar razões e proporções de segmentos.
- Ampliar e reduzir uma figura dada a razão relacionando os conceitos de semelhança e de proporç[illegible]
- Identificar figuras e triângulos semelhantes.
- Justificar a semelhança de triângulos aplicando os critérios (lll; ala; lal).
- [illegible] critérios de semelhança na resolução de problemas.
- Construir um triângulo semelhante a um outro.
- Relacionar o teorema de Thales com a semelhança de triângulos.
- Aplicar o teorema de Thales na resolução de exercícios sobre a semelhança de triângulos.
- Demonstrar o teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos.
- [illegible] práticos da vida aplicando a semelhança de triângulos [illegible] Thales [illegible]

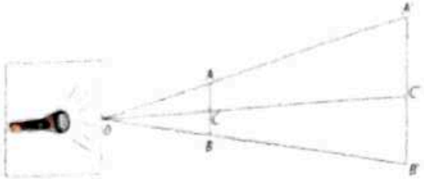
CONTEÚDOS

- [illegible]motetias
- [illegible] e redução de figuras planas simples
- [illegible] sobre razões e proporções numéricas
- [illegible] e proporções entre segmentos
- [illegible]elhança de triângulos
- [illegible] de semelhança
- [illegible]ceito de semelhança de triângulos
- [illegible] de semelhança de triângulos: l.l.l., a.a., l.a.l.
- [illegible]ema de perímetro e de áreas
- [illegible] de Thales (T. das transversais)
- [illegible]ções do teorema de Thales
- [illegible] de semelhança de triângulos rectângulos
- [illegible]monstração do teorema de Pitágoras pela semelhança [illegible] triângulos
- [illegible]lução de problemas práticos da vida aplicando a [illegible]elhança de triângulos e os teoremas de Thales e d[illegible]
- [illegible] do triângulo rectângulo

UNIDADE 8

Homotetia

A figura procura representar a determinação da imagem de uma haste AB num alvo, paralelo a $[AB]$, incidindo o foco luminoso através do orifício O.



- A imagem de A é o ponto A'
- A imagem de B é o ponto B'
- A imagem de C é o ponto C'

Podes verificar que:

$$\overline{OA'} = 3 \cdot \overline{OA} \ ; \ \overline{OB'} = 3 \cdot \overline{OB} \ ; \ \overline{OC'} = 3 \cdot \overline{OC}$$

A cada ponto P do segmento $[AB]$ corresponde uma imagem P':

$$P \smile P', \text{ sendo } \overline{OP'} = 3 \cdot \overline{OP}$$

Fica, assim, definida uma aplicação que se chama **homoteteia de centro O e razão 3.**

Observas que é constante o quociente de dois comprimentos correspondentes em figuras semelhantes. A este quociente denomina-se escala ou razão de semelhança (r).

Figuras semelhantes têm a mesma forma.

Duas figuras são semelhantes se uma é ampliação da outra ou se são geometricamente iguais.

Actividade

Faz homotetias em casa: numa cartolina preta desenha uma figura a teu gosto e recorta-a. No escuro, aponta uma lanterna à figura e projecta-a na parede. Podes fazer figuras fantasmagóricas!

Generalizemos com a seguinte definição:

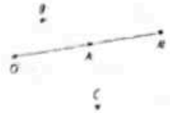
- Homotetia de centro O e razão r é a aplicação que a cada ponto P faz corresponder um ponto P' tal que:

$$\overline{OP'} = r \cdot \overline{OP}$$

Designaremos habitualmente a homotetia por $H_{O,r}$ ou, simplesmente, por H quando o centro e a razão já foram previamente dados.

Exercícios resolvidos

1. Na homotetia de centro O e razão 2, a imagem do ponto A é o ponto A'. Determina, por construção geométrica, os transformados dos pontos B e C, na mesma homotetia.

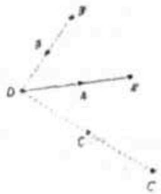


Resolução:

A' diz-se o homotético de A.

B' diz-se o homotético de B.

C' diz-se o homotético de C.



2. Na figura, os cinco pontos assinalados são colineares e a distância entre cada dois pontos consecutivos é constante.

a) Designando por H a homotetia de centro Q e razão -2, indica $H(P)$ e $H(R)$.

b) Considerando agora a homotetia $H_{O,\frac{1}{2}}$, indica as imagens de Q, S e O.

c) Qual é a razão da homotetia de centro P que transforma R em S?

Resolução:

a) $H_{Q,-2}(P) = S$

$H_{Q,-2}(R) = O$

b) $H_{O,\frac{1}{2}}(Q) = P$

$H_{O,\frac{1}{2}}(S) = Q$

$H_{O,\frac{1}{2}}(O) = O$

c) $H_{P,r}(R) = S$

Como $\overline{PR} = 2$ e $\overline{PS} = 3$

$$r = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} = \frac{3}{2}$$

- Se $r > 0$, A' fica do lado de A.
- Se $r < 0$, A' fica de lado contrário de A, relativamente a O.
- Em qualquer homotetia, a imagem do centro é o próprio centro.
- Numa homotetia, o centro, um ponto e a sua imagem são sempre pontos colineares.

Exercícios resolvidos

1. Sendo P e Q dois pontos distintos do plano, se soubermos que numa homotetia H se verifica $H(P) = P$ e $H(Q) = P$, que podemos concluir sobre o centro e a razão da homotetia? E no caso de $H(P) = P$ e $H(Q) = Q$?

Resolução:

1.º caso: O centro é P e a razão é zero.
2.º caso: O centro é um ponto qualquer do plano e a razão é 1.

2. Em qualquer homotetia, o centro é um ponto *invariante*, isto é, coincide com a sua própria imagem. Em geral, é o único ponto invariante. Mas há uma excepção. És capaz de dizer qual é a razão de uma homotetia em que todos os pontos são invariantes? E em que condições todos os pontos terão a mesma imagem?

Resolução:

Se todos os pontos são invariantes, a razão tem que ser 1.
Todos os pontos terão a mesma imagem (o centro da homotetia) se a razão for zero.

Numa homotetia, a imagem de um segmento de recta é outro segmento, paralelo ao primeiro, e cujos extremos são os transformados dos seus extremos.

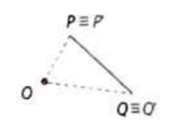
Exercício resolvido

Traça um segmento de recta $[PQ]$. Considera um ponto O, não pertencente ao segmento. Determina o transformado de $[PQ]$ pela homotetia de centro O e razão:

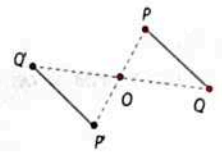
a) 1 b) -1 c) 2 d) $\frac{5}{2}$

Resolução:

a)

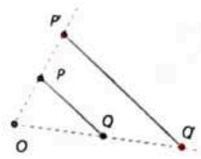


b)



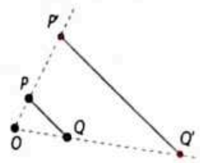
$\overline{OP'} = \overline{OP}$

c)



$\overline{OP'} = 2\,\overline{OP}$

d)



$\overline{OP'} = \frac{5}{2}\,\overline{OP}$

Numa homotetia:

- A imagem de uma recta é outra recta, paralela à primeira.
- A imagem de uma semi-recta é outra semi-recta, paralela à primeira, sendo a origem desta transformada na origem da imagem.

Exercícios resolvidos

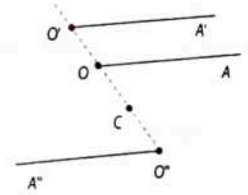
1. Sendo P um ponto pertencente à recta s, qual é o transformado de s em $H_{P,\,2}$?

Resolução:

É a própria recta **s**.

2. Constrói a imagem de uma semi-recta OA (à tua escolha), por meio de $H_{C,\,2}$, sendo C um ponto qualquer do plano, não pertencente a OA.
Determina, em seguida, a imagem de OA em $H_{C,\,-1}$.

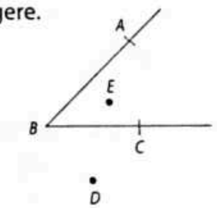
Resolução:



Numa homotetia, a imagem de um ângulo é um ângulo geometricamente igual ao primeiro. Além da amplitude, qualquer homotetia *conserva* também o sentido aos ângulos orientados, quer a sua razão seja positiva, quer negativa.

Exercício resolvido

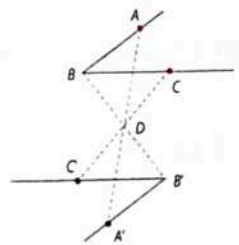
Desenha um ângulo ABC e considera os pontos D e E como a figura sugere.



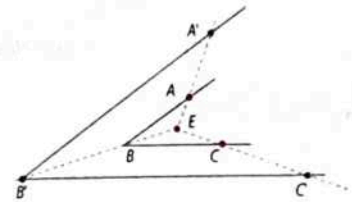
a) Constrói a imagem do $\measuredangle ABC$ em $H_{D,\,-1}$.
b) Constrói a imagem do $\measuredangle ABC$ em $H_{E,\,3}$.
c) As imagens obtidas em a) e b) serão ângulos com a mesma amplitude? Porquê?

Resolução:

a)



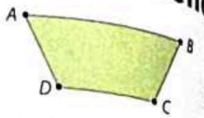
b)



c) São ângulos de lados paralelos e ambos agudos, logo, têm a mesma amplitude.

Construção de figuras semelhantes usando homotetia

Utilizaremos uma homotetia para efectuarmos uma redução e uma ampliação do quadrilátero [*ABCD*].



Construção

1. Primeiro marcamos um ponto *O*, ao qual se chama centro da homotetia.
2. Traçamos rectas de origem em *O* e que passem por todos os vértices da figura.
3. Seguidamente, sobre cada uma das semi-rectas, marcamos pontos de acordo com a semelhança que queremos fazer. Se, por exemplo, quisermos reduzir a figura para metade do tamanho, marcamos os pontos médios dos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$, que são os pontos *A'*, *B'*, *C'* e *D'*, respectivamente (figura azul). Se quisermos ampliar a figura, por exemplo para o dobro, duplicamos a medida dos segmentos e marcamos pontos nas extremidades desses segmentos: *A''*, *B''*, *C''* e *D''* (figura vermelha).
4. Por fim, basta unir os pontos resultantes em cada um dos casos e obtemos a semelhança pretendida.

$\overline{OA''} = 2\,\overline{OA}$

$\overline{OB''} = 2\,\overline{OB}$

$\overline{OC''} = 2\,\overline{OC}$

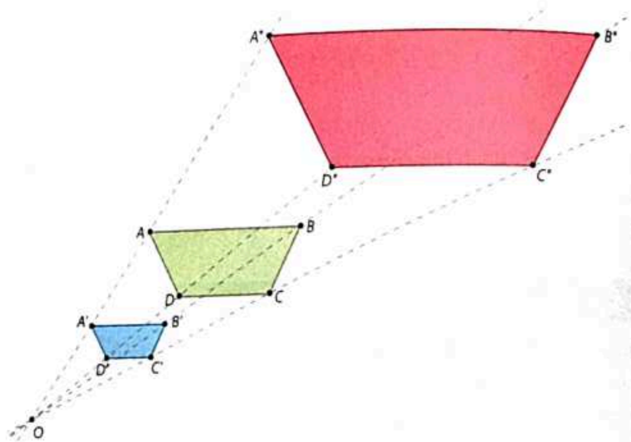
$\overline{OD''} = 2\,\overline{OD}$

$\overline{OA''} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

$\overline{OA''} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

$\overline{OA''} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

$\overline{OA''} = \frac{1}{2}\overline{OA}$



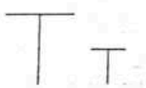
- Unem-se os pontos *A'*, *B'* e *C'* e também *A''*, *B''* e *C''*.

$$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB''}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC''}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD''}}{\overline{OD}} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{razão de semelhança}}}{r} = 2 \qquad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = \underset{\substack{\downarrow\\ \text{razão de semelhança}}}{r} = \frac{1}{2}$$

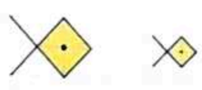
De certeza que já desenhaste figuras semelhantes usando a mesma rede ou redes diferentes.

Exemplos

1. Usando a mesma rede



2. Usando redes diferentes



Uma homotetia transforma segmentos de recta em segmentos de comprimentos directamente proporcionais.

A constante de proporcionalidade é o valor absoluto da razão da homotetia, isto é, se $[AB] \rightarrow [A'B']$ por uma homotetia de razão *r*, então,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = |r|$$

Exercícios resolvidos

1. Dado um segmento de recta com 8 cm de comprimento, diz qual é o comprimento do seu transformado numa homotetia de razão:

a) 3 b) 2 c) $-\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{4}$

Resolução:

a) $3 \times 8 = 24$ cm b) $2 \times 8 = 16$ cm

c) $\frac{2}{5} \times 8 = 3{,}2$ cm d) $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ cm

2. Desenha um quadrado [*ABCD*] e considera a homotetia de centro *A* e razão $\frac{1}{2}$.

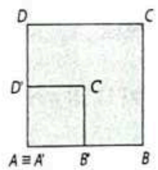
a) Constrói a imagem do quadrado na homotetia referida.

b) Qual é o vértice do quadrado cujo transformado, naquela homotetia, é o ponto de intersecção das diagonais de [*ABCD*]? Porquê?

c) A imagem de [*ABCD*] é um novo quadrado. Que relação existe entre os comprimentos dos lados dos dois quadrados? E entre as suas áreas?

Resolução:

a)



b) É o vértice *C*.

c) O lado do 1.º quadrado tem o dobro do comprimento do lado do 2.º quadrado. A área do 1.º é *quádrupla* da área do 2.º

Uma homotetia de razão *r* diz-se:

- Positiva ou directa, se a razão é positiva.
- Negativa ou inversa, se a razão é negativa.

Por outro lado, uma homotetia (de razão *r*) é:

- Uma ampliação, se $|r| > 1$
- Uma isometria, se $|r| = 1$
- Uma redução, se $|r| < 1$

Exercícios resolvidos

1. Numa homotetia de centro C, sabe-se que o ponto A' é a imagem do ponto A. E tem-se $\overline{CA'} = -2\overline{CA}$ estando A e A' um de cada lado de C.

a) A homotetia é positiva ou negativa? Porquê?

b) Trata-se de uma ampliação, uma redução ou uma isometria? Porquê?

Resolução:

a) É negativa. A razão é negativa (–2).

b) Trata-se de uma ampliação, pois $|-2| > 1$.

2. Dá exemplo de um número real que possa ser a razão de uma homotetia, sabendo que esta é:

a) Negativa, redução.

b) Directa, isometria.

c) Inversa, ampliação.

d) Positiva, redução.

Resolução:

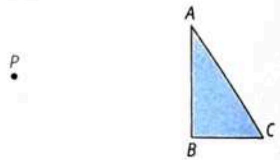
a) $-\frac{1}{2}$ ou qualquer outro real negativo entre –1 e 0.

b) 1

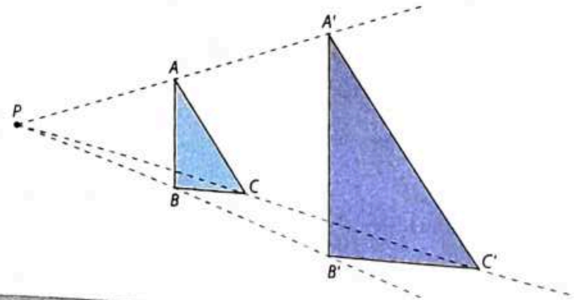
c) –2 ou qualquer outro real negativo inferior a –1.

d) $\frac{1}{4}$ ou qualquer outro real positivo entre 0 e 1.

3. Desenha a homotetia de centro P e razão 2 do triângulo rectângulo $[ABC]$.



Resolução:



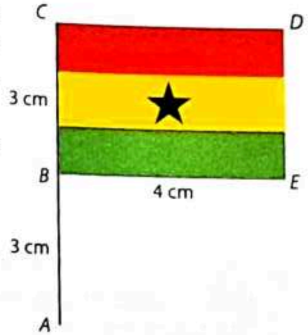
4. Observa a bandeira representada ao lado.
Numa figura semelhante a esta, os pontos A', B', C', D' e E' são imagens dos pontos A, B, C, D e E, respectivamente.

a) Se $\overline{A'B'} = 5$ cm, qual é a razão de semelhança da bandeira menor para a maior?

b) Qual é a razão de semelhança da bandeira maior para a menor?

c) Determina $\overline{C'D'}$.

d) Desenha uma figura semelhante à dada de razão $\frac{1}{2}$.



Resolução:

a) A razão de semelhança pedida é dada por $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. Como na figura dada, $\overline{AB} = 3$ cm e sabendo-se que $\overline{A'B'} = 5$ cm, então $r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{3}$.

b) As duas razões de semelhança são inversas uma da outra, logo, a razão pedida é $\frac{3}{5}$.

c) $[C'D']$ é imagem de $[CD]$ na ampliação, logo:

$$\overline{C'D'} = \overline{CD} \times \frac{5}{3}$$

Como $\overline{CD} = 4$ cm, temos:

$$C'D' = 4 \times \frac{5}{3} \approx 6{,}7$$

O comprimento do segmento $[C'D']$ é aproximadamente 6,7 cm.

d) Como a razão é $\frac{1}{2}$, que é menor que 1, trata-se de uma redução, logo, os comprimentos são reduzidos a metade.

Em figuras semelhantes, os segmentos correspondentes têm comprimentos directamente proporcionais e os ângulos correspondentes são geometricamente iguais. É fácil verificar que os dois polígonos desenhados ao lado são polígonos semelhantes porque:

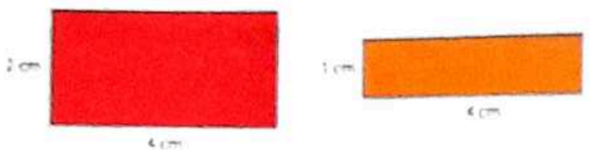
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = \frac{3}{2}$$ Razão de semelhança de ampliação

isto é, os lados correspondentes são directamente proporcionais.

$\hat{A} = \hat{A'} = 90°$ $\hat{C} = \hat{C'} = 135°$ $\hat{B} = \hat{B'} = 45°$ $\hat{D} = \hat{D'} = 90°$

isto é, os ângulos correspondentes são geometricamente iguais.
Logo, os quadriláteros [ABCD] e [A'B'C'D'] são semelhantes.

Observa agora dois polígonos não semelhantes.



Embora os ângulos correspondentes sejam iguais, os lados correspondentes não são directamente proporcionais, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{6}{6}$.

Dois polígonos, com o mesmo número de lados, dizem-se semelhantes quando se verificam as condições:

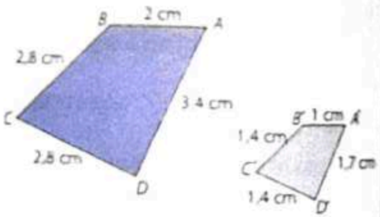
- Os ângulos internos correspondentes são geometricamente iguais.
- Os lados correspondentes são directamente proporcionais.

A razão de semelhança de dois polígonos semelhantes é a razão entre os comprimentos de dois lados correspondentes.

- Dois polígonos regulares, com o mesmo número de lados, são semelhantes.

Exercício resolvido

Observa os polígonos. Serão semelhantes? Justifica.



Resolução:

Com o transferidor, verificas que os ângulos correspondentes são geometricamente iguais:

$\hat{A} = \hat{A'} = 65°$ $\hat{C} = \hat{C'} = 70°$

$\hat{B} = \hat{B'} = 135°$ $\hat{D} = \hat{D'} = 90°$

Os lados correspondentes são directamente proporcionais:

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{1,4}{2,8} = 0,5$ $\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{1,4}{2,8} = 0,5$ $\frac{\overline{D'A'}}{\overline{DA}} = \frac{1,7}{3,4} = 0,5$

Como os ângulos correspondentes são geometricamente iguais e os comprimentos dos lados correspondentes são directamente proporcionais, então os polígonos são semelhantes.

Revisão de razão e proporção

A razão entre dois números inteiros, a e b, b não nulo, é o quociente entre eles, que se representa por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ (com $b \neq 0$) e lê-se «razão de a para b». a diz-se o antecedente e b o consequente. Duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são equivalentes se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Exemplo

Oito em cada dez condutores moçambicanos não respeitam o sinal de *stop*, ou seja, $\frac{8}{10}$ dos moçambicanos não respeita o sinal de *stop*. Neste caso, seria equivalente dizermos quatro em cada cinco, pois $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Uma igualdade entre duas razões, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (com $b \neq 0$ e $d \neq 0$), diz-se uma proporção e lê-se «a está para b, assim como c está para d». Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a e d designam-se por extremos e b e c por meios.

extremo ← 3 ; meio ← 2 ; 9 → meio ; 6 → extremo

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

Repara que multiplicando os extremos (3 × 6 = 18) obtemos o mesmo valor de quando multiplicamos os meios (2 × 9 = 18).

Propriedade fundamental das proporções: numa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja,

$$a \times d = b \times c$$

Exemplo

As garrafas de sumo concentrado *Super-Laranjinha* trazem a seguinte recomendação: «Misturar uma parte de sumo com duas partes de água.» Que quantidade de água devemos misturar com três litros de sumo concentrado?

A razão $\frac{\text{sumo}}{\text{água}}$ é $\frac{1}{2}$ (esta razão indica que a quantidade de água é duas vezes maior do que a quantidade de sumo concentrado). Queremos descobrir a quantidade de água que devemos misturar com três litros de sumo.

Uma forma de resolver o problema é usando uma proporção:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{a} \Leftrightarrow a \times 1 = 2 \times 3 \Leftrightarrow a = \frac{2 \times 3}{1} = 6$$

Logo, devemos misturar seis litros de água.

Outras propriedades

- A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o primeiro termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o terceiro termo, isto é:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \boxed{\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}} \text{ e } \boxed{\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}}$$

Vejamos: $\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$ $\quad \frac{5+4}{5}=\frac{10+8}{10} \Leftrightarrow \frac{9}{5}=\frac{18}{10} \qquad \frac{5-4}{5}=\frac{10-8}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{5}=\frac{2}{10}$

- A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o segundo termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o quarto termo, isto é:

$$\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}} \text{ e } \boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$$

Vejamos: $\frac{5+4}{4}=\frac{10+8}{8} \Leftrightarrow \frac{9}{4}=\frac{18}{8} \qquad \frac{5-4}{4}=\frac{10-8}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

- A soma (diferença) dos antecedentes está para a soma (diferença) dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, isto é:

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}} \text{ e } \boxed{\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}}$$

Vejamos: $\frac{5+10}{4+8}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{12}=\frac{5}{4} \qquad \frac{5+10}{4+8}=\frac{10}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{12}=\frac{10}{8}$

$\frac{5-10}{4-8}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{-5}{-4}=\frac{5}{4} \qquad \frac{5-10}{4-8}=\frac{10}{8} \Leftrightarrow \frac{-5}{-4}=\frac{10}{8}$

Proporcionalidade directa

Duas grandezas x e y são **directamente proporcionais** se a razão entre elas é constante e diferente de zero, ou seja, se

$$\boxed{\frac{y}{x}=k \quad x,k \neq 0,}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{y=k \cdot x.}$$

O número k designa-se por **constante de proporcionalidade**.

Exemplo

O Kensa e o pai querem fazer pela Páscoa, um bolo de chocolate que é famoso na família. Não tendo ainda a certeza se os seus avós os visitariam, o Kensa fez a seguinte tabela:

Ingredientes:

	Chocolate	Açúcar	Farinha	Ovos
Quantidade para quatro pessoas	75 g	300 g	250 g	6
Quantidade para seis pessoas	112,5 g	450 g	375 g	9

O Kensa calculou cuidadosamente as quantidades de ingredientes para seis pessoas, aumentando cada ingrediente proporcionalmente. Repara:

$$\frac{112{,}5}{75}=\frac{450}{300}=\frac{375}{250}=\frac{9}{6}=1{,}5$$

Quant. para quatro × 1,5 = Quant. para seis

Quant. para seis ÷ 1,5 = Quant. para quatro

Todas as razões são equivalentes. Na tabela acima é possível identificar a relação de proporcionalidade directa, verificando se a segunda linha da tabela pode ser obtida multiplicando o valor correspondente na primeira linha sempre pelo mesmo número. Assim se conclui que as duas grandezas são **directamente proporcionais** e a **constante de proporcionalidade** é 1,5.

Consideremos dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, cujas medidas são dadas, respectivamente, por 2 cm e 4 cm.

A______B, C____________D

Comparando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, estabelecemos uma razão entre as suas medidas.

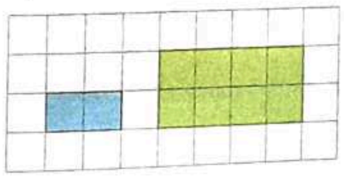
$$\frac{m(AB)}{m(CD)}=\frac{2}{4}$$

Podemos também afirmar que $\overline{AB}$ está para $\overline{CD}$ na razão de 1 para 2 ou que $\overline{CD}$ está para $\overline{AB}$ na razão de 2 para 1.

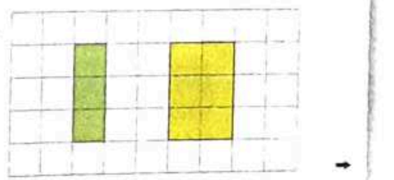
Exercício resolvido

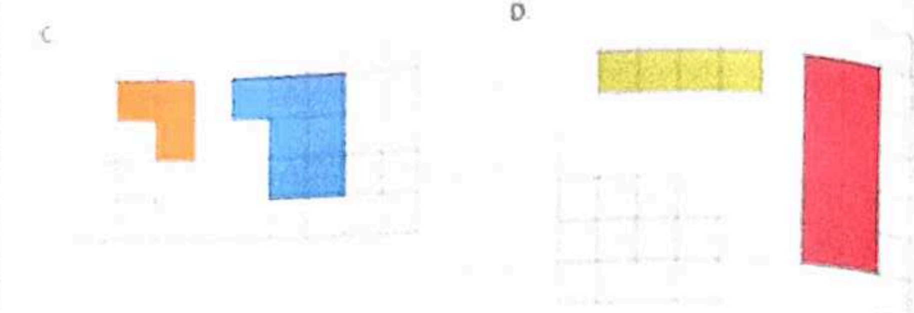
Observa as figuras abaixo em que o lado de uma quadrícula corresponde a uma unidade. Verifica, para cada um dos casos seguintes, se as medidas dos lados de cada par de polígonos são proporcionais. Apresenta todos os cálculos e justificações que achares necessários.

A.



B.





Resolução:

A. São proporcionais. A constante de proporcionalidade é 2.
B., **C.** e **D.** não são proporcionais, pois nem todos os lados aumentam na mesma proporção.

Aplicações práticas

Existem algumas razões especiais muito utilizadas no nosso quotidiano, entre as quais: velocidade média, escala, densidade demográfica e densidade de um corpo.

1. **Velocidade média**: em geral, é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida (expressa em quilómetros ou metros) e um tempo por ele gasto (expresso em horas, minutos ou segundos).

$v_{média}$ = distância percorrida / tempo gasto

Exemplo: suponhamos que um carro de corrida percorreu 328 km em 2 h. Qual foi a velocidade média do veículo nesse percurso?

A partir dos dados do problema, teremos:

$v_{média}$ = 328 km / 2 h = 164 km/h

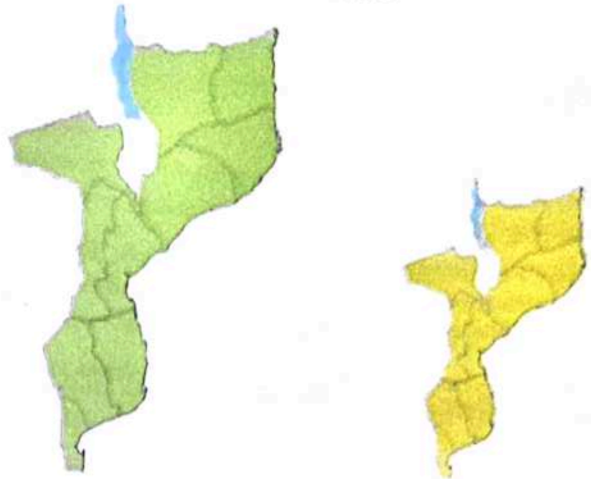
o que significa que a **velocidade média do veículo durante a corrida foi de 164 km/h**, ou seja, para cada hora percorrida o carro deslocou-se a 164 km.

2. **Escala**: uma das aplicações da razão entre duas grandezas encontra-se na escala de redução ou escala de ampliação, conhecidas simplesmente como escala. Chamamos de escala de um desenho à razão quando o comprimento considerado no desenho e o comprimento real correspondente, são ambos medidos na mesma unidade.

Escala = comprimento no desenho / comprimento real

Usamos a escala quando queremos representar um esboço gráfico de objectos como móveis, plantas de uma casa ou de uma cidade, fachadas de prédios, mapas, maquetes, etc.

O mapa de Moçambique está em duas escalas diferentes.



Os dois mapas possuem a mesma forma mas têm tamanhos diferentes. O mapa verde é uma ampliação do mapa amarelo ou o mapa amarelo é uma redução do mapa verde.

Densidade demográfica: também chamada de população relativa de uma região é considerada uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa a razão entre o número de habitantes e a área ocupada numa certa região.

A província de Nampula ocupa a área de 79 010 km^2. De acordo com o censo realizado em 2007, a província tem uma população aproximada de 3 985 285 habitantes. Assim:

densidade demográfica = 3 985 285 habitantes/79 010 km^2
densidade demográfica = 50,44 habitantes/km^2

Isto significa que para cada 1 km^2 existem aproximadamente 50 habitantes.

π(Pi): os egípcios trabalhavam muito com certas razões e descobriram que era constante a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. O nome desta razão é π o seu valor é aproximadamente,

$$\pi = 3{,}1415926535$$

Exemplos:

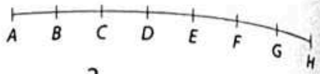
Se C é o comprimento da circunferência e D a medida do seu diâmetro, temos uma razão notável:

$C/D = \pi = 3{,}14159265358979323846264338327950...$

significando que,

$$C = \pi D$$

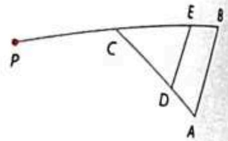
1. Considera a figura ao lado, que representa o segmento [AH], dividido em 7 partes iguais. Passa para o teu caderno e completa:



a) H_A, 5 (B) = ... b) H_F, –5 (G) = ... c) H_C, $\frac{2}{3}$ (F) = ...

d) H_E, –2 (G) = ... e) H_E, –0,5 (A) = ... f) H_B, 2 (......) = H

2. Observa a figura. Sabe-se que, em $H_{C,\frac{2}{3}}$, $A \rightarrow D$ e $B \rightarrow E$.



a) Os segmentos [AB] e [DE] são paralelos? Porquê?

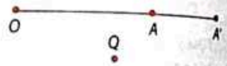
b) Sabendo que P é o transformado de B numa homotetia de centro C, explica como poderias construir a imagem de [AB] nessa homotetia, desconhecendo a sua razão.

3. Considera 3 pontos não colineares A, B, O. Determina o transformado do segmento [AB], [A'B'], na homotetia de centro O e razão:

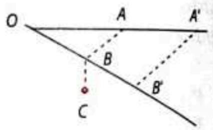
a) 3 b) $-\frac{1}{2}$

4. Traça um paralelogramo [ABCD]. Determina a imagem do paralelogramo na homotetia de centro A e razão –1.

5. Sendo O, A e A' três pontos colineares e Q um ponto não colinear com aqueles, constrói o transformado do segmento [AQ] na homotetia de centro O que aplica A em A'.



6. Considera a homotetia do plano tal que $A \rightarrow A'$ e $B \rightarrow B'$ (figura ao lado). Procura localizar, por construção geométrica, o ponto C', imagem de C por essa mesma homotetia.



7. Desenha um triângulo [ABC], sabendo que $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm e $\overline{AC} = 2$ cm. Em seguida, constrói a sua imagem pela homotetia de centro P (um ponto exterior ao triângulo, à tua escolha) e razão 1,5. Quais são os comprimentos dos lados do novo triângulo obtido?

8. Desenha um triângulo rectângulo [ABC] cujos catetos meçam 4 cm e 5 cm. Considera uma homotetia de centro A e razão – 2.

a) Calcula o comprimento dos catetos do triângulo imagem.

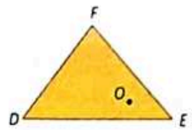
b) Determina a área de cada um dos triângulos e compara-as.

9. Desenha um trapézio rectângulo [ABCD], em que $\hat{A} = \hat{D} = 90°$, as bases [AB] e [DC] têm 9 cm e 6 cm de comprimento (respectivamente) e $AD = 4$ cm.

a) Constrói a imagem do trapézio pela homotetia de centro A e razão 1,5.

b) Determina o comprimento de cada um dos lados do novo trapézio.

10. Considera o triângulo [DEF] e um ponto O, pertencente ao triângulo, como a figura sugere. Determina, por construção geométrica, o transformado de [DEF] por meio de $H_{O,-2}$.



11. Considera uma circunferência de centro O e raio 3 cm e um ponto P, exterior à circunferência.

a) Determina o transformado da circunferência em $H_{P,2}$.

b) Qual seria a imagem da circunferência numa homotetia de centro O e razão 2,5?

c) E qual seria a imagem da circunferência numa homotetia de centro O e razão –2,5?

12. Desenha um rectângulo de 12 cm por 15 cm. Reduz este rectângulo na razão de 3 para 2.

13. Desenha um quadrado com 4 cm de lado. Utilizando homotetias positivas:

a) Redu-lo na razão de 4 para 1.

b) Aumenta-o na razão de 1 para $\frac{3}{2}$.

14. Numa fábrica, a razão entre o número de trabalhadores que são homens e que são mulheres é de 41 para 23.

a) Há mais mulheres ou homens na fábrica?

b) Quantos trabalhadores tem a fábrica, se tem menos de 100 trabalhadores?

15. Para cada uma das proporções: $\frac{0,5}{4} = \frac{1,5}{12}$ • $\frac{3}{5} = \frac{0,3}{0,5}$ • $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$. Indica:

a) Os meios. b) Os extremos. c) Os antecedentes. d) Os consequentes.

16. Copia e completa:

a) $\frac{5}{\ldots} = \frac{6}{3}$ b) $\frac{\ldots}{72} = \frac{2}{4}$ c) $\frac{2,5}{4} = \frac{10}{\ldots}$ d) $\frac{2,6}{13} = \frac{8}{\ldots}$

17. Um avião percorre 1 500 km em 1 h 30 m. Mantendo a mesma velocidade, quantos quilómetros percorre em 5 horas?

18. O número de quilogramas de carne é directamente proporcional ao número de refeições que se confeccionam numa cantina. Para 30 refeições são necessários 6 kg de carne.

a) Que quantidade de carne é necessária para preparar 102 refeições?

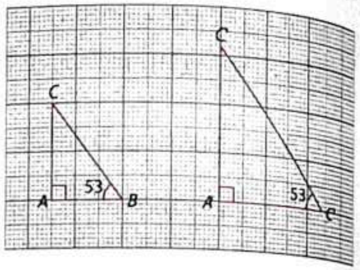
b) Qual é a constante de proporcionalidade e que significado tem?

Critérios de semelhança de triângulos

Às condições mínimas que garantem a semelhança de dois triângulos chamam-se critérios ou casos de semelhança de triângulos.

Vais construir alguns triângulos e concluir quais são essas condições mínimas.

1. Constrói dois triângulos em papel milimétrico, cada um deles com ângulos de 53° e 90°, como, por exemplo, os da figura seguinte.



Verifica que:

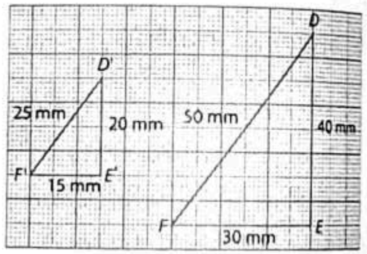
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}\text{, isto é, } \frac{24}{15} = \frac{40}{25} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

Os triângulos são semelhantes porque têm os três ângulos iguais e os lados correspondentes proporcionais.

Experimenta com outros triângulos que tenham dois ângulos iguais.

Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos iguais.

2. Constrói dois triângulos em papel milimétrico, cujos lados sejam proporcionais a 3 cm, 4 cm e 5 cm, como, por exemplo, os da figura seguinte.



Verifica que:

$$F\hat{D}E = F'\hat{D}'E' = 37°$$

$$D\hat{E}F = D'\hat{E}'F' = 90°$$

$$D\hat{F}E = D'\hat{F}'E' = 53°$$

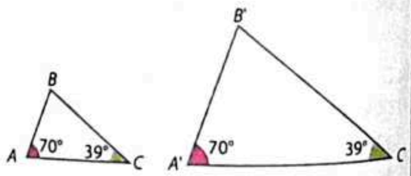
Os triângulos são semelhantes.

Experimenta com outros triângulos que não sejam rectângulos e que tenham os três lados proporcionais.

Dois triângulos são semelhantes se têm os três lados, de um, proporcionais aos três lados do outro.

Exercícios resolvidos

1. Os triângulos [ABC] e [A'B'C'] são semelhantes? Justifica a tua resposta.



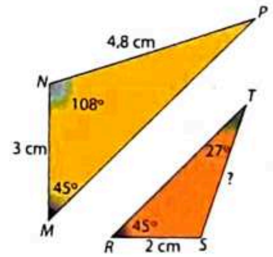
Resolução:

Os triângulos [ABC] e [A'B'C'] são semelhantes porque têm dois ângulos congruentes.

2. Observa os triângulos ao lado.

a) Mostra que os triângulos [MNP] e [RST] são semelhantes e indica os pares de lados correspondentes.

b) Calcula $\overline{ST}$.



Resolução:

a) A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim:

$$\hat{P} = 180° - (108° + 45°) = 27° \quad \text{logo} \quad \hat{P} = \hat{T} \quad \text{e sabemos que } \hat{M} = \hat{R}$$

então os triângulos são semelhantes, porque têm, de um para o outro, dois ângulos iguais.

Os lados correspondentes são os que se opõem a ângulos iguais.

Como $\hat{P} = \hat{T}$ então [MN] corresponde a [RS].

Como $\hat{M} = \hat{R}$ então [NP] corresponde a [ST].

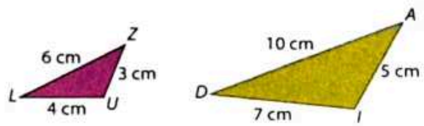
Como $\hat{N} = \hat{S}$ então [MP] corresponde a [RT].

b) Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são directamente proporcionais, logo:

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{MP}} \quad \text{assim} \quad \frac{2}{3} = \frac{\overline{ST}}{4{,}8} \quad \text{isto é } \overline{ST} = 3{,}2$$

Então, $\overline{ST}$ é 3,2 cm.

3. Averigua se os triângulos [LUZ] e [DIA] são semelhantes.



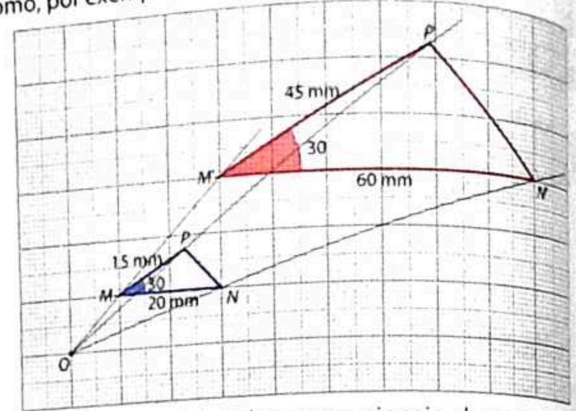
Resolução:

$$\frac{\overline{UZ}}{\overline{IA}} = \frac{3}{5} \quad \frac{\overline{LZ}}{\overline{DA}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \frac{\overline{LU}}{\overline{DI}} = \frac{4}{7} \qquad \text{logo} \quad \frac{\overline{UZ}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{LZ}}{\overline{DA}} \neq \frac{\overline{LU}}{\overline{DI}}$$

Como os lados correspondentes dos dois triângulos não são proporcionais, os triângulos não são semelhantes.

UNIDADE 8

3. Constrói dois triângulos em papel milimétrico. Um deles, com dois lados de 2 cm e 1,5 cm, e ângulo por eles formado de 30°; outro, com dois lados proporcionais a 2 cm e 1,5 cm, e ângulo por eles formado também de 30°, como, por exemplo, os da figura seguinte.



Verifica que:

- $M\hat{N}P = M'\hat{N}'P' = 48°$

  $\overline{NP} = 10$ mm

  $N\hat{P}M = N'\hat{P}'M' = 102°$

  $\overline{N'P'} = 30$ mm

- $\dfrac{\overline{M'P'}}{\overline{MP}} = \dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{N'P'}}{\overline{NP}} = 3$

Os triângulos são semelhantes.

Experimenta com outros triângulos que tenham dois lados proporcionais, de um para o outro, e cujo ângulo por eles formado seja igual.

Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

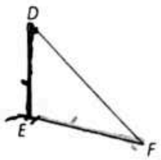
Critérios de semelhança de triângulos – resumo

- Dois triângulos são semelhantes se tiverem:

1. Dois ângulos iguais.
2. Os três lados, de um, proporcionais aos três lados do outro.
3. Dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

Exercício resolvido

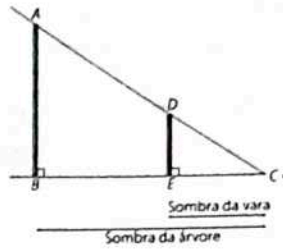
Uma árvore projecta uma sombra de 7 m e, no mesmo instante, uma vara com 1,8 m projecta uma sombra de 1,4 m. Qual é a altura da árvore?



Resolução:

É fácil calcular a altura da árvore, sabendo a altura da vara e os comprimentos das sombras da árvore e da vara (observa a figura).

Esquematizámos, na figura ao lado, os dois triângulos, em que:



$A\hat{B}C = D\hat{E}F = 90°$

$B\hat{C}A = E\hat{F}D$ Inclinação dos raios solares

- Como os dois triângulos têm, de um para o outro, dois ângulos geometricamente iguais, então são semelhantes.
- Como os triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são directamente proporcionais, logo:

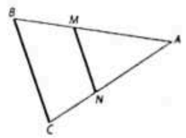
$$\frac{\text{Altura da árvore}}{\text{Altura da vara}} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} \quad \frac{\text{Comprimento da sombra da árvore}}{\text{Comprimento da sombra da vara}}$$

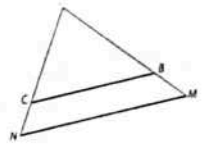
$$\frac{\overline{AB}}{1{,}8} = \frac{7}{1{,}4} \quad \text{logo } \overline{AB} = \frac{7 \times 1{,}8}{1{,}4} \quad \text{pelo que } \overline{AB} = 9$$

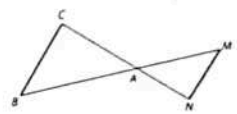
Logo, a árvore tem 9 m de altura.

Semelhança de triângulos e paralelismo

1. Observa as figuras seguintes onde [MN] // [BC].







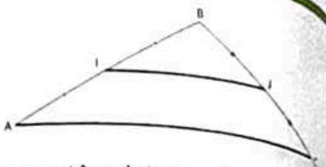
- O ângulo A é comum.
- $A\hat{B}C = A\hat{M}N$, são ângulos agudos de lados paralelos.

- $M\hat{A}N = C\hat{A}B$, são ângulos verticalmente opostos.
- $A\hat{B}C = A\hat{M}N$, são ângulos agudos de lados paralelos.

Em qualquer das situações, os triângulos [ABC] e [AMN] são semelhantes porque têm dois ângulos iguais e dizem-se «triângulos em posição de Thales».

$$\triangle[ABC] \sim \triangle[AMN] \quad \text{logo} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

2. Num triângulo [ABC], o segmento de recta que une os pontos médios de dois lados é sempre:



- Paralelo ao terceiro lado: $[IJ] // [AC]$
- Metade do terceiro lado: $\overline{IJ} = \frac{1}{2}\ \overline{AC}$

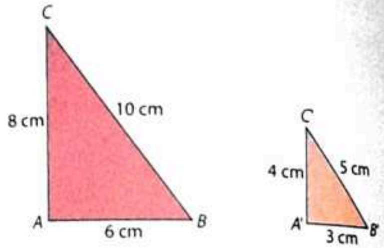
Triângulos em posição de Thales são sempre semelhantes porque têm dois ângulos iguais.

Teorema de Thales

Um feixe de rectas paralelas determina em duas transversais segmentos correspondentes proporcionais.

Relações entre perímetros e entre áreas de triângulos semelhantes

Os triângulos da figura são semelhantes.



Vamos determinar:

- A razão de semelhança.
- A razão dos perímetros.
- A razão das áreas.

$P = 8 + 10 + 6$ $\quad A = \frac{6 \times 8}{2}$ $\quad P' = 4 + 5 + 3$ $\quad A' = \frac{3 \times 4}{2}$

$P = 24$ cm $\quad A = 24$ cm^2 $\quad P' = 12$ cm $\quad A' = 6$ cm^2

Razão de semelhança	Razão dos perímetros	Razão das áreas
$r = \frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$	$\frac{P}{P'} = \frac{24}{12} = 2$	$\frac{A}{A'} = \frac{24}{6} = 4 = 2^2$

Compara para o par de triângulos semelhantes:

- A razão dos perímetros e a razão de semelhança.
- A razão das áreas e a razão de semelhança.

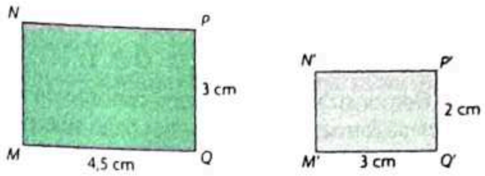
Experimenta com outros pares de triângulos semelhantes. Que concluíste?

$\frac{P}{P'} = r$ e $\frac{A}{A'} = r^2$

Se dois triângulos são semelhantes, a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança.

Se dois triângulos são semelhantes, a razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Os polígonos da figura são semelhantes.



Determina:

- A razão de semelhança.
- A razão dos perímetros.
- A razão das áreas.

$P = 2 \times 4{,}5 + 2 \times 3$ $\quad A = 4{,}5 \times 3$ $\quad P' = 2 \times 3 + 2 \times 2$ $\quad A' = 3 \times 2$

$P = 15$ cm $\quad A = 13{,}5$ cm^2 $\quad P' = 10$ cm $\quad A' = 6$ cm^2

Razão de semelhança	Razão dos perímetros	Razão das áreas
$r = \frac{4{,}5}{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{P}{P'} = \frac{15}{10} = 1{,}5$	$\frac{A}{A'} = \frac{135}{6} = 1{,}5^2$

Experimenta com outros polígonos semelhantes, escolhidos por ti. Que concluíste?

Se dois polígonos são semelhantes:

- A razão dos perímetros é igual à razão de semelhança:

$$\frac{P}{P'} = r$$

- A razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{A}{A'} = r^2$$

Exercício resolvido

A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é 12. Determina:

a) A razão entre dois lados correspondentes.

b) A razão entre as áreas.

Resolução:

a) $\frac{P}{P'} = \frac{l}{l'} = r$ logo $\frac{l}{l'} = 12$ $\qquad r \rightarrow$ razão de semelhança

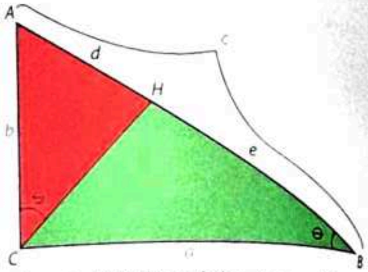
b) $\frac{A}{A'} = r^2$ logo $\frac{A}{A'} = 12^2 = 144$

UNIDADE 8

Demonstração do Teorema de Pitágoras pela semelhança de triângulos

Demonstração que utiliza o conceito de semelhança: os triângulos [ABC] [ACH] e [CBH] têm a mesma forma, diferindo apenas pelas suas posições e tamanhos.

Esta demonstração baseia-se na proporcionalidade dos lados de dois triângulos semelhantes, isto é, que a razão entre quaisquer dois lados correspondentes de triângulos semelhantes é a mesma, independentemente do tamanho dos triângulos.



Sendo [ABC] um triângulo rectângulo, com o ângulo recto localizado em C, como mostrado na figura. Desenha-se a altura com origem no ponto C, e chama-se H à sua intersecção com o lado [AB]. O ponto H divide o comprimento da hipotenusa, c, nas partes d e e. O novo triângulo, [ACH] é semelhante ao triângulo [ABC], pois ambos têm um ângulo recto, e compartilham o ângulo em A, significando que o terceiro ângulo é o mesmo em ambos os triângulos também, marcado como θ na figura. Seguindo-se um raciocínio parecido, percebe-se que o triângulo [CBH] também é semelhante a [ABC]. A semelhança dos triângulos leva à igualdade das razões dos lados correspondentes.

$$\frac{a}{c} = \frac{e}{a} \text{ e } \frac{b}{c} = \frac{d}{b}.$$

Estas relações podem ser escritas como:

$$a^2 = c \times e \quad \text{e} \quad b^2 = c \times d$$

Somando estas duas igualdades, obtém-se:

$a^2 + b^2 = c \times e + c \times d \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c \times (d + e)$,

que, rearranjada, é o Teorema de Pitágoras, pois $d + e = c^2$:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ou seja: o quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.

Exercícios resolvidos

1. Num triângulo rectângulo, um dos ângulos internos tem 47° de amplitude. Num outro triângulo, ainda rectângulo, existe também um ângulo interno com 47° de amplitude. Estes dados chegam para estarmos certos que os triângulos são semelhantes. Porquê?

Resolução:

Sim, pois têm dois ângulos iguais de um para o outro.

2. Como sabes, um triângulo cujos lados meçam (por exemplo, em centímetros) 3, 4 e 5 é um triângulo rectângulo. Sem utilizares o Teorema de Pitágoras e sem fazeres qualquer construção, verifica se é, ou não, rectângulo um triângulo em que as medidas dos lados sejam (em centímetros):

a) 9; 12; 15 b) 1; 2; 3 c) 4,5; 6; 7,5 d) 7; 8; 9 e) 7,5; 10; 12,5

Resolução:

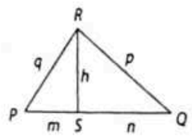
a) É, pois $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{5}$ b) Não c) Não d) É e) É

Num triângulo rectângulo:

- A altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que nela determina.
- Um cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção ortogonal sobre ela.

Exercícios resolvidos

1. Na figura, [RS] é a altura relativa à hipotenusa [PQ] do triângulo rectângulo [PQR]. Sendo $m = 8$ e $n = 18$ (em cm), determina h, p e q.



Resolução:

- $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$

$\frac{h}{8} = \frac{18}{h}$

$h^2 = \sqrt{144} \Leftrightarrow h = 12$

- $h^2 + m^2 = q^2$

$q = \sqrt{144 + 64}$

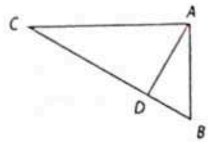
$q = \sqrt{208} \approx 14{,}4$

- $h^2 + n^2 = p^2$

$p = \sqrt{144 + 324}$

$p = \sqrt{468} \approx 21{,}6$

2. Na figura, o △ [ABC] é rectângulo em A, sendo $AD \perp BC$. Sabendo que $\overline{AB} = 10$ cm e $\overline{BD} = 4$ cm, determina $\overline{CD}$.



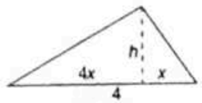
Resolução:

$\frac{4}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow (\overline{AD})^2 = 4\,\overline{CD}$ mas $(\overline{AD})^2 = 100 - 16$

Então $4\,\overline{CD} = 84 \rightarrow \overline{CD} = 21$ cm

3. Determina a área de um triângulo rectângulo, sabendo que a hipotenusa tem 4 cm de comprimento e que a altura em relação à hipotenusa a divide em dois segmentos, de tal forma que o comprimento de um deles é quádruplo do outro.

Resolução:

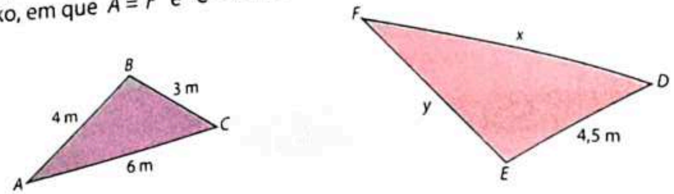


Sabe-se que $x + 4x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

Mas $\frac{4x}{h} = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h^2 = 4x^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{64}{25} \Leftrightarrow h = \frac{8}{5}$

$A = \frac{4 \times \frac{8}{5}}{2} = \frac{16}{5} = 3{,}2\ \text{cm}^2$

19. Na estrutura que suporta o telhado de uma casa há dois tipos de triângulos, que vês desenhados abaixo, em que $\hat{A} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{D}$. Determina o comprimento das barras x e y.

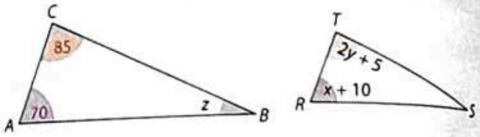


20. No $\triangle[BEM]$: $M\hat{B}E = 75°$, $\overline{BM} = 3$ cm e $\overline{BE} = 5$ cm. Noutro, $\triangle[TAL]$: $T\hat{A}L = 75°$, $\overline{AL} = 10$ cm e $\overline{TA} = 6$ cm. Os triângulos [BEM] e [TAL] são semelhantes? Justifica e indica os ângulos geometricamente iguais.

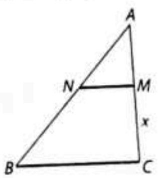
21. Sabe-se que:

$\triangle[ABC] \sim \triangle[RST]$

Calcula x, y e z.



22. a) Na figura:



[MN] // [BC]

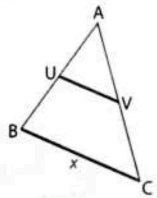
$\overline{AM} = 6$ cm

$\overline{NB} = 10$ cm

$\overline{AN} = 8$ cm

Calcula x.

b) Sabendo que:



$\overline{AU} = 8$ cm

$\overline{AB} = 16$ cm

$\overline{UV} = 10$ cm

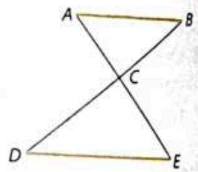
[UV] // [BC]

Calcula x.

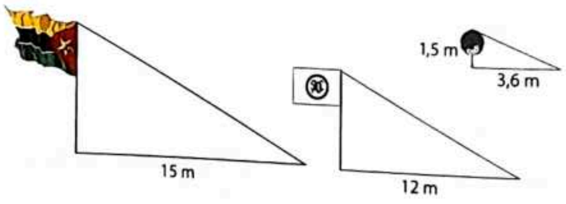
23. Na figura ao lado, [AB] // [DE].

a) Mostra que $\triangle[ABC] \sim \triangle[CDE]$.

b) Se $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 9$ cm e $\overline{DE} = 10,5$ cm, calcula $\overline{CE}$ e $\overline{CB}$.



24. À mesma hora, à porta de um hotel, mediram-se as sombras da árvore e dos mastros das duas bandeiras. Quais são as alturas dos mastros das bandeiras?



25. A razão de dois lados correspondentes, em dois polígonos semelhantes, é 4. Determina:

a) a razão entre os perímetros.

b) a razão entre as áreas.

26. A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é 64. Determina:

a) A razão entre os perímetros.

b) A razão da ampliação.

27. Num triângulo, os lados são 10,4 cm, 12 cm e 9,6 cm.
Determina o comprimento dos lados de um triângulo semelhante com 80 cm de perímetro.

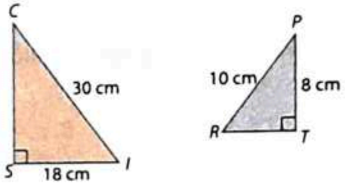
28. Sabe-se que as áreas de dois triângulos semelhantes são 25 cm^2 e 9 cm^2.
Qual é a razão de semelhança dos triângulos? E a dos perímetros?

29. Determina a área de um triângulo [ABC] semelhante a um triângulo [DEF] rectângulo, em que um cateto tem 21 cm e a hipotenusa 29 cm. O lado maior do triângulo [ABC] tem 72,5 cm.

30. Observa os dois triângulos ao lado.

a) Averigua se são semelhantes e, em caso afirmativo, indica a razão de semelhança.

b) Constrói um triângulo semelhante ao [RTP], maior, sendo a razão de semelhança $\frac{6}{5}$. Explica como procedeste.



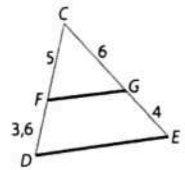
31. Constrói o triângulo [ABC], tal que:

$\overline{AB} = 6$ cm $\quad \overline{AC} = 9$ cm $\quad \overline{BC} = 8$ cm

a) Marca o ponto M, pertencente a [BC], tal que $\overline{CM} = \frac{1}{4}\overline{BC}$. Traça a paralela a [AC] que passa por M e corta [AB] em N.

b) Calcula $\overline{BN}$ e $\overline{MN}$.

32. Mostra que, na figura dada, [FG] não é paralelo a [DE].



33. Os lados de um triângulo [MNP] são 10 cm, 15 cm e 20 cm.
Determina o perímetro de um triângulo semelhante, cujo lado:

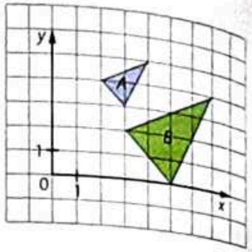
a) Menor é 8 cm.

b) Maior é 8 cm.

Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

Indica a resposta correcta: **A. B. C.** ou **D.**



1. Ampliou-se a figura *A* e obteve-se a figura *B*, usando o método do ponto e da constante (homotetia). As coordenadas do ponto e a constante são:

A. (6, 1) e 2 **B.** (1, 6) e $\frac{1}{2}$

C. (1, 6) e 2 **D.** (6, 1) e $\frac{1}{2}$

2. Dois polígonos semelhantes têm sempre:

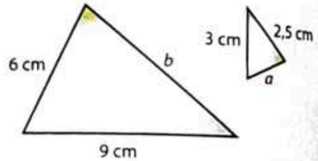
A. Lados correspondentes iguais.

B. A razão dos perímetros igual ao quadrado da razão de semelhança.

C. Lados correspondentes proporcionais.

D. A mesma área.

3. Sabendo que os dois triângulos são semelhantes (os ângulos assinalados à mesma cor são iguais), então:



A. $a = 7{,}5$ cm, $b = 2$ cm **B.** $a = 4{,}5$ cm, $b = 5$ cm

C. $a = 4{,}5$ cm, $b = 5$ cm **D.** $a = 2$ cm, $b = 7{,}5$ cm

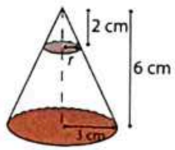
4. Dois triângulos isósceles semelhantes têm de perímetros 11 cm e 33 cm. Se a base do triângulo menor é 5 cm, então a base do triângulo maior é:

A. 15 cm **B.** 9 cm **C.** 45 cm **D.** 11 cm

5. Um triângulo rectângulo cujos lados têm 3, 4 e 5 centímetros de comprimento é transformado, por uma homotetia de razão 2, num outro triângulo; o perímetro e a área deste são:

A. $P = 12$ cm, $A = 12$ cm^2 **B.** $P = 24$ cm, $A = 12$ cm^2 **C.** $P = 24$ cm, $A = 24$ cm^2 **D.** $P = 12$ cm, $A = 24$ cm^2

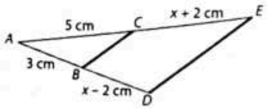
6. Na figura, *r*, em centímetros, é:



A. 6 **B.** 4

C. 1 **D.** 3

7. Se *BC* // *DE*, então *x* é:

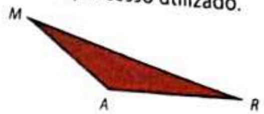


A. 1 cm **B.** 8 cm

C. 2 cm **D.** 4 cm

2.ª Parte

1. Usa material de desenho e constrói um triângulo semelhante, mas não geometricamente igual, ao triângulo [*MAR*]. Descreve o processo utilizado.

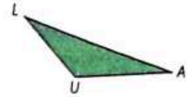


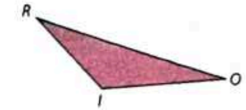
2. Sabe-se que os triângulos [*RIO*] e [*LUA*] são semelhantes.

a) Copia e completa:

a.1) $O\hat{R}I = \ldots$ $L\hat{A}U = \ldots$ $R\hat{I}O = \ldots$

a.2) $\dfrac{\overline{RI}}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{\overline{UA}} = \dfrac{\overline{RO}}{\ldots}$

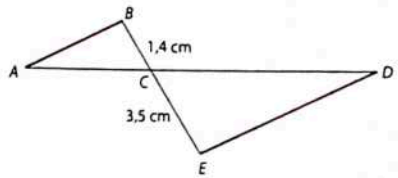




b) Sabe-se que no $\triangle[RIO]$: $\overline{RI} = 8$ cm, $\overline{IO} = 10$ cm e $\overline{RO} = 14$ cm.

Constrói, em verdadeira grandeza, o $\triangle[LUA]$, sendo $\overline{LU} = \frac{1}{4}\overline{RI}$.

3. Na figura, *AB* // *DE*.



a) Justifica as afirmações:

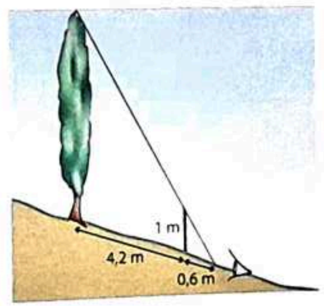
- $A\hat{C}B = D\hat{C}E$
- $A\hat{B}C = C\hat{E}D$
- $\triangle[ABC] \sim \triangle[CDE]$

b) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos [*ABC*] e [*CDE*]?

c) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos [*ABC*] e [*CDE*]?

4. Uma fotografia rectangular tem de comprimento 10 cm e uma sua ampliação tem 30 cm de comprimento e 1 125 cm^2 de área. Qual é a área da fotografia original?

5. Colocou-se uma vara verticalmente a 4,2 m do pé do eucalipto e a 60 cm do meu olho. Qual é a altura do eucalipto?



UNIDADE 9

Cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos

Págs. 188 a 209

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de

- Identificar e classificar poliedros.
- Aplicar a relação de Euler no calculo de número de faces, vértices e arestas.
- Identificar prismas, seus elementos e classificá-los.
- Calcular áreas e volumes de prismas.
- Identificar pirâmides.
- Identificar elementos de uma pirâmide.
- Classificar pirâmides.
- Calcular áreas e volumes de pirâmides.
- Resolver problemas práticos da vida que envolvem o cálculo de áreas e volumes sólidos geométricos.
- Identificar e caracterizar cilindros, cones e esferas.
- Calcular áreas e volumes de cilindros, cones e esferas.
- Resolver problemas práticos da vida que envolvem cálculo de áreas e volumes.

CONTEUDOS

Cálculo de áreas e de volume de sólidos geométricos

- Poliedro: conceito; classificação de poliedro
- Relação de Euler
- Prismas: conceito de prisma; elementos de um prisma e classificação
- Área de prismas; volume do prisma recto de base triangular e rectangular
- Pirâmide: definição; elementos de uma pirâmide e classificação
- Área e volume de pirâmide de base triangular e quadrangular
- Sólidos de revolução: cilindro, cone e esfera
- Área e volume de cilindro, cone e esfera
- Resolução de problemas que envolvem o cálculo de áreas e volumes

Poliedros

Actividade

Identifica os sólidos correspondentes aos objectos abaixo representados.

- Retira prismas e pirâmides da caixa de sólidos da tua escola e, em cada caso, indica o número de faces, o número de arestas, o número de vértices, o nome do polígono da base e o nome do sólido.

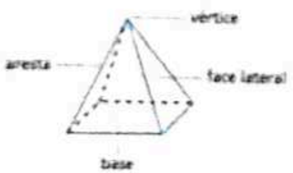
Os sólidos geométricos classificam-se em poliedros e não poliedros. Os poliedros são sólidos limitados apenas por superfícies planas.

Os prismas e as pirâmides são poliedros. Nos poliedros podemos observar: vértices, arestas e faces.

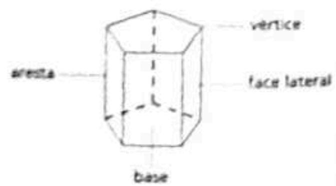
- Faces: são as superfícies planas que limitam os poliedros.
- Aresta: intersecção de duas faces consecutivas.
- Vértice: ponto comum a três ou mais arestas.

Exemplos

- A pirâmide quadrangular tem 5 vértices, 8 arestas e 5 faces.



- O prisma pentagonal tem 10 vértices, 15 arestas e 7 faces.



Formula de Euler

Em qualquer poliedro convexo, o numero de faces adicionado ao numero de vértices é igual ao numero de arestas mais 2.

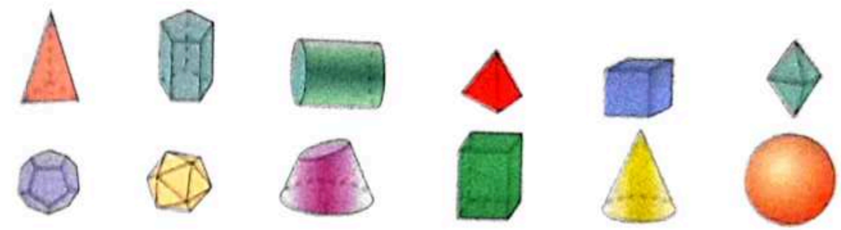
$$F + V = A + 2$$

Sólidos geométricos

Vamos analisar alguns sólidos geométricos.

Actividade

1. Observa os sólidos geométricos a seguir representados.

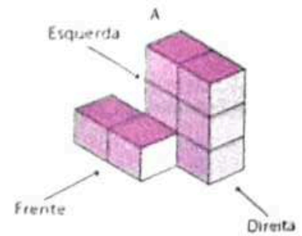


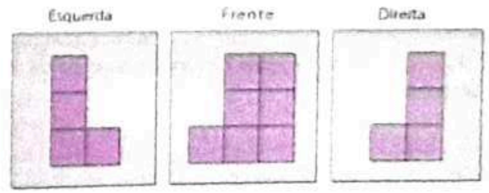
Indica:

- Os poliedros
- Os prismas
- Os poliedros regulares.
- Os não poliedros
- As pirâmides

Verifica a igualdade de Euler para alguns dos poliedros.

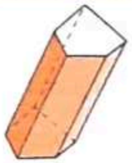
2. Associa cada desenho da direita, à vista correspondente do sólido A.





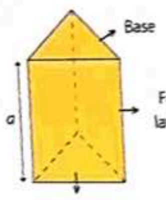
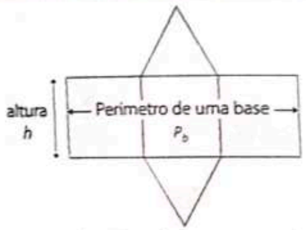
Prisma

Os prismas são poliedros com duas bases geometricamente iguais e paralelas. As suas faces laterais são paralelogramos.

Prisma recto	Prisma recto regular	Prisma oblíquo
		
As arestas laterais são perpendiculares às bases. As faces laterais são rectângulos.	As faces laterais são rectângulos. As bases são polígonos regulares.	As arestas laterais são oblíquas às bases.

Áreas e volumes de prismas

Na planificação seguinte observas que num prisma recto, as faces laterais são rectângulos. Esses rectângulos são todos geometricamente iguais se o prisma for regular.

Prisma	Planificação
	 Observa que a área lateral de um prisma é a soma das áreas das suas faces laterais.

A área lateral (A_L) é igual ao produto da medida do perímetro da base pela medida da altura do sólido, isto é:

$$A_L = P_b \times h$$

A área total (A_T) é igual à soma da medida da área lateral com o dobro da medida da área de uma base, isto é:

$$A_T = A_L + 2A_b$$

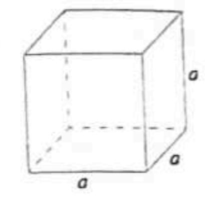
O volume de um prisma recto, é igual ao produto da medida da área de uma base pela medida da altura do sólido.

$$A = A_b \times h$$

Não te esqueças que o cubo e o paralelepípedo rectângulo são prismas.

Cubo

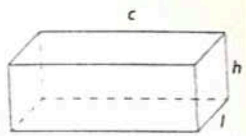
Um cubo é formado por 6 quadrados geometricamente iguais.

Cubo	Planificação
 a = aresta	

$A_b = l^2 = A_{\square}$
$A_L = 4 \times A_{\square}$
$A_T = 6 \times A_{\square}$ ou
$A_T = A_L + 2A_b$
$V = a^3$

Paralelepípedo

Dado o paralelepípedo com as dimensões c, l e h, verifica-se que:

Paralelepípedo	Planificação
 c = comprimento l = largura h = altura	

$A_b = c \times l$
$A_L = P_b \times h$
$A_T = A_L + 2A_b$
$V = c \cdot l \cdot h$

Exercícios resolvidos

1. Um cubo tem de aresta 1,5 dm. Calcula:
   a) Área lateral b) Área total c) O volume do cubo

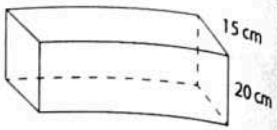
Resolução:

a) $A_L = 4 \times A_{\square}$
$A_L = 4 \times 1{,}5^2$
$A_L = 9\ dm^2$

b) $A_T = 6 \times A_{\square}$
$A_T = 6 \times 1{,}5^2$
$A_T = 13{,}5\ dm^2$

c) $V = a^3$
$A_T = 1{,}5^3$
$A_T = 3{,}375\ dm^3$

2. Uma caixa tem as dimensões indicadas na figura.
   a) Calcula a área de papel que é necessário para a embrulhar.
   b) Qual é a sua capacidade?



Resolução:

a) $A_L = P_b \times h$

$A_L = (2 \times 34 + 2 \times 15) \times 20$

$A_L = 98 \times 20$

$A_L = 1960\ cm^2$

R.: É necessário 1960 cm^2.

b) $V = c \times l \times h$

$V = 3{,}4 \times 1{,}5 \times 2$

$V = 10{,}2\ dm^3$

R.: A capacidade é de 10,2 litros.

3. Calcula a área total e o volume de uma tenda de campismo, do tipo canadiana.

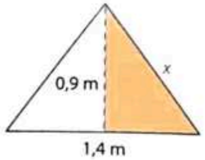
Resolução:

Trata-se de calcular a área total e o volume de um prisma recto triangular:

$A_T = A_L + 2A_b \qquad V = A_b \times h$

- Cálculo da área da base do prisma, que é um triângulo:

$A_\triangle = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{1{,}4 \times 0{,}9}{2} = 0{,}63\ m^2$



- Cálculo de x, pelo Teorema de Pitágoras:

$x^2 = 0{,}9^2 + 0{,}7^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1{,}14\ m$ (2 c.d.)

- Cálculo da A_L:

$A_L = P_b \times a$

$A_L = (1{,}14 + 1{,}14 + 1{,}40) \times 2$

$A_L = 3{,}68 \times 2$

$A_L = 7{,}36\ m^2$

- Cálculo da A_T:

$A_T = A_L + 2A_b$

$A_T = 7{,}36 + 2 \times 0{,}63$

$A_T = 8{,}62\ m^2$

- Cálculo do volume:

$V = A_b \times a$

$V = 0{,}63 \times 2$

$V = 1{,}26\ m^3$

R.: A área total da tenda é aproximadamente 8,62 m^2. O volume da tenda é 1,26 m^3.

4. Determina a área total de um prisma quadrangular que tem uma capacidade de 96 ml e 6 cm de altura.

Resolução:

Começamos por determinar a área da base a partir do volume e em seguida substituir os valores nas fórmulas. Sem esquecer que a base do prisma quadrangular é um quadrado.

$V = A_b \times h$

$96 = A_b \times 6$

$A_b = 96 \div 6$

$A_b = 16\ cm$

$A_L = P_b \times h$

$A_L = 16 \times 6$

$A_L = 96\ cm^2$

$A_T = A_L + 2A_b$

$A_T = 96 + 2 \times 16$

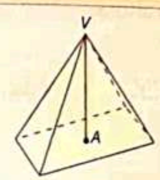
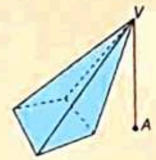
$A_T = 132\ cm^2$

R.: A área total é 132 cm^2.

- $1\ m^3 = 1\ kl$
- $1\ dm^3 = 1\ l$
- $1\ cm^3 = 1\ ml$

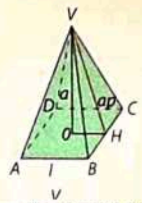
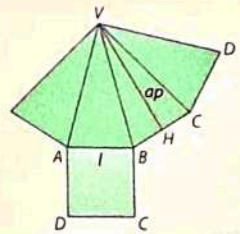
Pirâmide

As pirâmides são poliedros com uma só base poligonal. As suas faces laterais são triângulos.

Pirâmide recta	Pirâmide recta regular	Pirâmide oblíqua
		
As faces laterais são triângulos isósceles.	As faces laterais são triângulos isósceles. A base é um polígono regular.	As faces laterais não são triângulos isósceles.

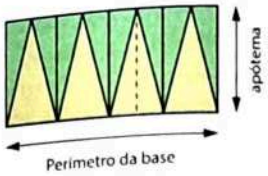
Áreas e volumes de pirâmide

Observa:

Pirâmide	Planificação
 Apótema da pirâmide é a altura de uma face lateral da pirâmide.	

A área lateral de uma pirâmide é a soma das medidas das áreas das suas faces laterais, isto é: $4 \times A_{face}$

Na figura vês que a área lateral é metade da medida da área do rectângulo cujo comprimento é o perímetro da base e cuja largura é a medida do apótema da pirâmide.



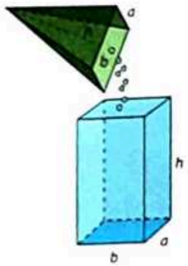
$$A_{lateral} = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{apótema da pirâmide}}{2}$$

ou seja,

$$\boxed{A_L = \frac{P_b}{2} \times ap}$$

A área total é igual à soma da medida da área lateral com a medida da área da base.

$$\boxed{A_T = A_L + A_b}$$



Já sabes, dos anos anteriores, que sólidos equivalentes têm o mesmo volume e também que:

- O volume de uma pirâmide é igual à terça parte do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

Então, o volume da pirâmide é a terça parte do volume de um prisma com a mesma base e a mesma altura.

O volume da pirâmide será então:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_{prisma} = \frac{A_{base} \times \text{altura}}{3} \qquad \boxed{V_{pirâmide} = \frac{A_b \times h}{3}}$$

Exercícios resolvidos

1. Uma pirâmide quadrangular tem 8 cm de apótema e 20 cm de perímetro da base. Calcula

a) Área lateral b) Área total c) O volume da pirâmide

Resolução:

a) $A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$

$A_L = \frac{20}{2} \times 8$

$A_L = 80\ cm^2$

b) $A_T = A_L + A_b$

$A_T = 80 + (20-4)^2$

$A_T = 80 + 5^2$

$A_T = 105\ cm^2$

c) $V = \frac{A_b \times h}{3}$; $A_b = 5 \times 5 = 25\ cm^2$

$h^2 = 8^2 - (2,5)^2$

$h^2 = 64 - 6,25$

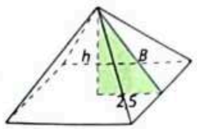
$h^2 = 57,75$

$h = \sqrt{57,75}$

$h \approx 7,6$

$V = \frac{25 \times 7,6}{3}$

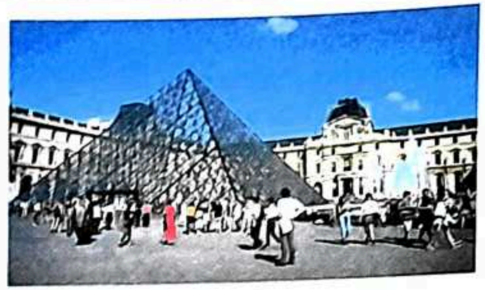
$V = 63,3\ cm^3$



2. Em Paris, à entrada do Museu do Louvre, existe uma pirâmide quadrangular regular em vidro. O lado da base mede 30 m e a altura 20 m.

a) Qual é a área das faces em vidro?

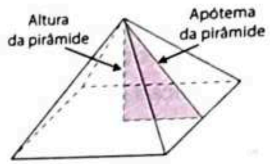
b) Qual é o volume da pirâmide?



Resolução:

a) Calcular a área das faces em vidro é calcular a área lateral da pirâmide: $A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$

- $P_b = 4 \times 30 = 120$ m
- Pelo Teorema de Pitágoras:



$ap^2 = 20^2 + 15^2$

$ap = 25$ m

$A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$

$A_L = \frac{120}{2} \times 25 = 1\,500\ m^2$

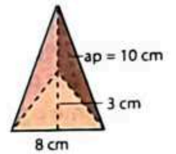
R.: A área das faces em vidro é 1 500 m^2.

b) $V = \frac{A_b \times h}{3}$ $\qquad A_b = 30^2 = 900\ m^2$

$V = \frac{900 \times 20}{3} = 6\,000\ m^3$

O volume da pirâmide do Louvre é 6 000 m^3.

3. Calcula a área lateral, total e o volume da seguinte pirâmide triangular com 9 cm de altura.



Resolução:

$A_L = \frac{P_b}{2} \times ap$

$P_L = 8 + 8 + 8 = 24$ cm

$A_L = \frac{24}{2} \times 10$

$A_L = 120\ cm^2$

$A_T = A_L + A_b$

$A_b = \frac{b \times h}{2}$

$A_b = \frac{8 \times 3}{2} = 12\ cm^2$

$A_T = 120 + 12$

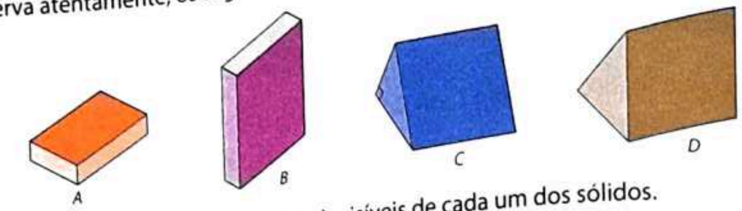
$A_T = 132\ cm^2$

$V = \frac{A_b \times h}{3}$

$V = \frac{12 \times 9}{3}$

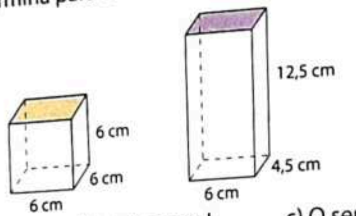
$V = 36\ cm^3$

1. Um prisma com seis faces laterais, quantos vértices tem? E quantas arestas?
2. Uma pirâmide com 10 arestas, quantos vértices tem? E quantas faces?
3. Um prisma tem 21 arestas.
   a) Quantos vértices tem? E quantas faces?
   b) Quantos vértices tem uma pirâmide com a base igual à do prisma referido?
4. Observa atentamente, os seguintes sólidos geométricos.



   a) Representa, a tracejado, as arestas invisíveis de cada um dos sólidos.
   b) Verifica a igualdade de Euler, para o sólido C.

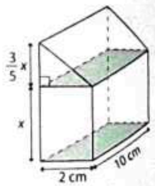
5. Observa os sólidos e determina para cada um:



   a) A área da face colorida b) A área total c) O seu volume

6. Uma caixa de farinha láctea para bebés tem a forma de um paralelepípedo rectângulo. As dimensões da base são 15 cm por 5 cm e a sua área lateral é 8 dm^2. Determina:
   a) A área total da caixa b) O volume da caixa

7. A figura representa um sólido formado por um paralelepípedo rectângulo sobre o qual se colocou um prisma triangular recto.



   a) Exprime o volume deste sólido em função de x.
   b) Calcula o volume do sólido para $x = 1$ cm e para $x = 3$ cm.
   c) Será o volume do sólido directamente proporcional a x?

8. Um prisma triangular regular tem 10 cm de altura e o lado da sua base é 13 cm. Calcula:
   a) A área lateral. b) O volume.

9. Se triplicarmos a aresta de um cubo, que acontece ao seu volume? E à sua área total?

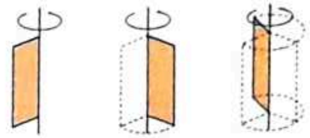
10. Calcula o volume de uma pirâmide quadrangular regular em que o lado da base é 12 cm e a altura é 8 cm.

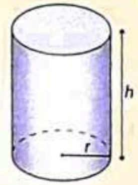
Sólidos de revolução

Cilindro

O cilindro é não poliedro.

O cilindro de revolução é o sólido gerado por um rectângulo que roda em torno de um dos seus lados até dar uma volta completa.



Cilindro	Planificação
	 Observa que a superfície lateral deste cilindro é um rectângulo, em que: • O comprimento é igual ao perímetro do círculo da base. • A largura é igual à altura do cilindro.

A área lateral (A_L) é igual ao produto da medida do perímetro da base pela medida da altura do sólido, isto é:

$P_b = 2\pi r$ $\qquad A_L = P_b \times h$

$$\boxed{A_L = 2\pi rh}$$

A área total (A_T) é igual à soma da medida da área lateral com o dobro da medida da área de uma base, isto é:

$A_b = \pi r^2$ $\qquad A_T = A_L + 2A_b$

$$\boxed{A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

O volume de um cilindro é igual ao produto da medida da área de uma base pela medida da altura do sólido.

$$V = A_b \times h$$

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

Exercícios resolvidos

1. Determina a área total e o volume de um cilindro com 6 cm de raio e 10 cm de altura.

Resolução:

$A_T = A_L + 2\,A_b$

$A_L = P_b \times h$

$A_L = 2 \times 3{,}14 \times 6$

$A_L = 37{,}68\ \text{cm}^2$

$A_b = \pi r^2$

$A_b = 3{,}14 \times 6^2$

$A_b = 113{,}04\ \text{cm}^2$

$A_T = 37{,}68 + 2 \times 113{,}04$

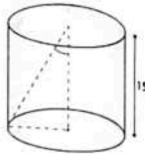
$A_T = 263{,}76\ \text{cm}^2$

$V = A_b \times h$

$V = 113{,}04 \times 10$

$V = 1130{,}4\ \text{cm}^3$

2. Pretende-se construir uma caixa em acrílico, como a que vês na figura. Qual é a área total e o volume da caixa, sabendo que o perímetro da base é 56,52 cm?



Resolução:

- Cálculo da área lateral:

$A_L = P_b \times h$

$A_L = 56{,}52 \times 15$

$A_L = 847{,}8\ \text{cm}^2$

- Cálculo do raio:

$P_b = 2\pi r$

$56{,}52 = 2 \times 3{,}14 \times r$

$r = \dfrac{56{,}52}{6{,}28}$

$r = 9\ \text{cm}$

- Cálculo da área total:

$A_b = \pi r^2$

$A_b = 3{,}14 \times 9^2$

$A_b = 254{,}34\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + 2A_b$

$A_T = 847{,}8 + 2 \times 254{,}34$

$A_T = 1356{,}48\ \text{cm}^2$

- Cálculo do volume:

$V = A_b \times h$

$V = 254{,}34 \times 15$

$V = 3815{,}1\ \text{cm}^3$

R.: A área total da caixa é aproximadamente 1356,48 cm². O volume da caixa é aproximadamente 3815,1 cm³.

3. Qual é a altura dum cilindro cujo volume é 75 cm³ e a área de base é 15 cm²?

Resolução:

$V = A_b \times h$

$h = 75 \div 15$

$h = 5\ \text{cm}$

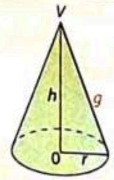
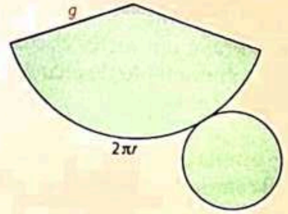
R.: A altura é 5 cm.

Cone

O cone é não poliedro.

O cone de revolução é o sólido gerado por um triângulo rectângulo que roda em torno de um dos seus catetos até dar uma volta completa.

Observa:

Cone	Planificação
 Geratriz do cone é um segmento de recta que une o vértice do cone com qualquer ponto da circunferência da base.	

A área lateral de um cone é metade do produto da medida do perímetro da base pela medida da geratriz, isto é:

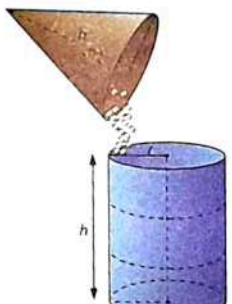
$$A_{\text{lateral}} = \frac{\text{perímetro da base} \times \text{geratriz}}{2}$$

ou seja,

$$\boxed{A_L = \frac{P_b}{2} \times g} \qquad \boxed{A_L = \pi\, r\, g}$$

A área total é igual à soma da medida da área lateral com a medida da área da base.

$$\boxed{A_T = A_L + A_b} \qquad \boxed{A_T = \pi\, r\, g + \pi\, r^2}$$



Já sabes, dos anos anteriores, que sólidos equivalentes têm o mesmo volume e também que:

O volume de um cone é a terça parte do volume de um cilindro com a mesma base e a mesma altura.

O volume do cone será então:

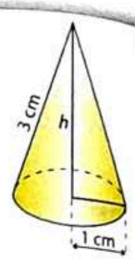
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}} = \frac{A_{\text{base}} \times \text{altura}}{3}$$

$$\boxed{V_{\text{cone}} = \frac{A_b \times h}{3}} \qquad \boxed{V_{\text{cone}} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}}$$

Exercícios resolvidos

1.a) Escreve um pequeno texto onde explicas como se desenha a planificação do cone da figura.

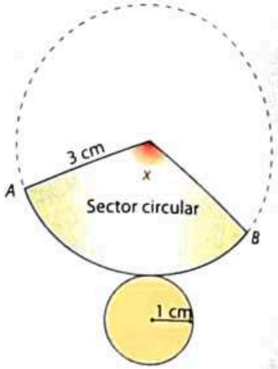
b) Calcula a área total e o volume.



Resolução:

a) A planificação deste cone é constituída por:

- Um círculo com 1 cm de raio.
- A superfície lateral é um sector circular com 3 cm de raio em que o comprimento do arco AB é igual ao perímetro da base do cone.



Para calcular a amplitude x do ângulo ao centro do sector circular, aplicam-se conhecimentos sobre proporcionalidade directa.

$360° \text{ ——— } 2\pi \times 3$
$x \text{ ——— } 2\pi \times 1$

$x = \frac{360° \times 2\pi}{2\pi \times 3} = 120°$

b) Cálculo da **área total** do cone:

$A_L = \frac{P_b}{2} \times g$

$A_L = \frac{2\pi \times 1}{2} \times 3$

$A_L = 9,42$ cm² (2 c.d.)

$A_b = \pi r^2$

$A_b = \pi \times 1$

$A_b = 3,14$ cm² (2 c.d.)

$A_T = A_L + A_b$

$A_T = 9,42 + 3,14$

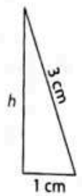
$A_T = 12,56$ cm²

Cálculo do **volume do cone:**

- Cálculo de h (altura):

Pelo Teorema de Pitágoras:

$3^2 = h^2 + 1^2$
$h^2 = 9 - 1$
$h = \sqrt{8}$ cm



- $V = \frac{A_b \times a}{3}$

$V = \frac{3,14 \times \sqrt{8}}{3} = 2,96$ cm³ (2 c.d.)

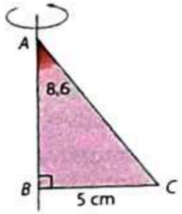
R.: A área total deste cone é aproximadamente 12,56 cm².
O volume do cone é aproximadamente 2,96 cm³.

2. Fez-se rodar o triângulo rectângulo da figura em torno de AB.
a) Que sólido se obteve? b) Calcula o seu volume. c) Calcula a sua área lateral.

Resolução:

a) Um cone de revolução

b) $V = \frac{A_b \times a}{3}$ $\qquad A_b = \pi r^2 = \pi \times 5^2$



Calculemos a altura, usando o Teorema de Pitágoras:

$h^2 + 5^2 = (8,6)^2$
$h^2 = 73,96 - 25$
$h^2 \simeq 49$
$h = 7$

$V \simeq \frac{\pi \times 5^2 \times 7}{3} = 183,2$ cm³ (1 c. d.)

R.: O volume é 183,2 cm³.

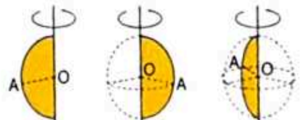
c) $A_L = \frac{P_b \times g}{2} \simeq \frac{2\pi 5 \times 8,6}{3} \simeq 90,01$ cm²

R.: A área lateral é aproximadamente 90 cm².

Esfera

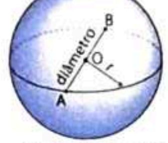
A esfera é não poliedro.

A esfera é o sólido gerado por um semicírculo que roda em torno do seu diâmetro até dar uma volta completa.



Também se diz que a esfera é a reunião de uma superfície esférica com o seu interior.

- A superfície esférica de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é igual a r.
- A esfera de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é inferior ou igual a r.



Os pontos A e B
são diametralmente opostos.

UNIDADE 9

Área da superfície esférica. Volume da esfera

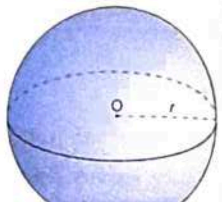
Actividade

Na experiência que se segue vais calcular a área da superfície esférica, sem usar uma fórmula.

1. Pega numa bola de ténis e com uma craveira mede o seu diâmetro.
2. Corta uma tira de cartolina com:
   - Largura = diâmetro da bola.
   - Comprimento suficiente para dar uma volta à bola (sem ultrapassar uma volta).
3. Mede a largura e comprimento deste rectângulo de cartolina. Calcula a sua área.

Acabaste de encontrar um valor aproximado da área da superfície da bola de ténis.

Foi Arquimedes quem primeiro determinou o volume da esfera e a área da superfície esférica correspondente.



A área de uma superfície esférica é dada por:

$$A = 4\pi r^2$$

O volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exercícios resolvidos

1. Calcula o volume de uma esfera com 8 cm de diâmetro.

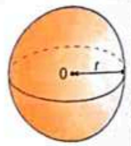
Resolução:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

mas, $r = \frac{8}{2} = 4$

logo, $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 4^3 \Leftrightarrow V \approx 268\ cm^3$

2. Calcula, em centímetros, o raio r de uma superfície esférica com 40 cm^2 de área.



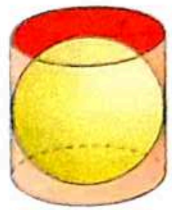
Resolução:

$4 \times \pi r^2 = 40$

$r^2 = \frac{40}{4\pi} \Leftrightarrow r^2 = \frac{10}{\pi}$

mas $r > 0$, $r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \Leftrightarrow r \approx 1{,}78$ cm

3. Uma bola encaixa à justa numa caixa cilíndrica de raio r.



a) Mostra que a razão entre a área da superfície esférica da bola e a área total do cilindro é $\frac{2}{3}$.

b) Mostra que a razão entre o volume da bola (esfera) e o volume do cilindro é $\frac{2}{3}$.

Resolução:

a) A razão é:

$$\frac{\text{Área da superfície esférica}}{\text{Área total do cilindro}} = \frac{4\pi r^2}{\underbrace{2\pi r \times 2r}_{A_l} + \underbrace{2 \times \pi r^2}_{A_b}} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Repara que a altura do cilindro é 2*r*.

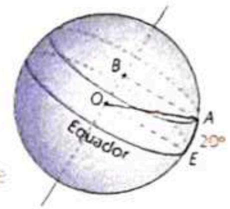
b) A razão entre os volumes é:

$$\frac{\text{Volume da esfera}}{\text{Volume do cilindro}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

4. Um paralelo está situado à latitude de 20°. Sabendo que o raio da Terra é 6 400 km e $\overline{OB}$ = 2 189 km calcula:

a) O comprimento desse paralelo.

b) A área do Hemisfério Norte.



[OE] // [BA]
OÂB = AÔE = 20°

Resolução:

a) [OAB] é um triângulo rectângulo. Recorrendo ao teorema de Pitágoras:

$6400^2 = \overline{AB}^2 + 2189^2$

$\overline{AB} \approx 6014$ km

O comprimento do paralelo é $P = 2\pi r$, sendo $r = \overline{AB}$.

$P = 2\pi \times 6014 \approx 37\ 768$ km

R.: Aproximadamente 37 787 km

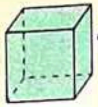
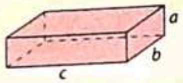
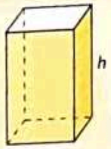
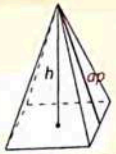
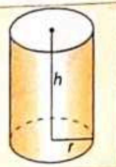
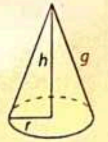
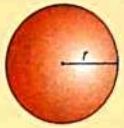
b) $A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi r^2$

logo, $A_{\text{hemisfério}} = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi \times 6400^2$

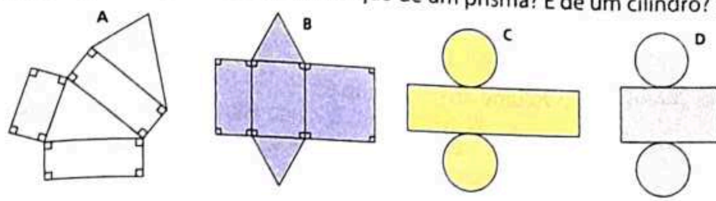
$\approx 257\ 359\ 270\ km^2$

R.: Aproximadamente 257 228 500 km^2

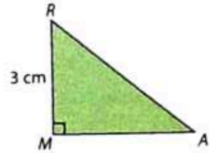
Áreas e volumes de sólidos

Sólido	Área lateral	Área total	Volume
Cubo 	$A_L = 4a^2$	$A_T = 6a^2$	$V = a^3$
Paralelepípedo 	$A_L = 2(ac + ab)$	$A_T = 2(ab + ac + bc)$	$V = abc$
Prisma 	$A_L = P_b \times h$	$A_T = A_L + 2A_b$	$V = A_b \times h$
Pirâmide 	$A_L = \frac{P_b \times \text{apótema}}{2}$	$A_T = A_L + A_b$	$V = \frac{A_b \times h}{3}$
Cilindro de revolução 	$A_L = P_b \times h = 2\pi rh$	$A_T = A_L + 2A_b = 2\pi rh + 2\pi r^2$	$V = A_b \times h = \pi r^2 h$
Cone de revolução 	$A_L = \frac{P_b}{2} \times \text{geratriz} = \pi rg$	$A_T = A_L + A_b = \pi rg + \pi r^2$	$V = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Esfera 		$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$	$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

11. Qual das figuras seguintes é a planificação de um prisma? E de um cilindro? Explica.



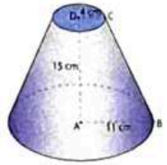
12. Calcula o volume e a área lateral de um cone que se obtém rodando o triângulo [MAR] em torno do cateto [MA].



13. A área lateral de um cone é 600π cm^2 e a sua geratriz mede 60 cm.
    a) Calcula a área total do cone.
    b) Calcula o seu volume.

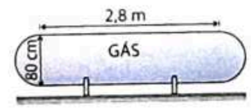
14. Constrói a planificação de um cone de sorvete, em forma de cone de revolução, de geratriz 12 cm, sendo o diâmetro da base metade da geratriz.
    Com 2 litros de sorvete, quantos cones podes encher?

15. Projecto: construção de um *abat-jour*.
    Fazer a planificação da superfície lateral de um tronco de cone, que vai servir para fazer um *abat-jour*, como o que vês na figura.

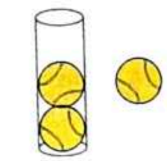


16. A área da superfície que limita uma bola de voleibol é 5534 cm^2.
    a) Qual é o seu diâmetro?
    b) Qual é o volume da bola?

17. Numa fábrica existe um reservatório de gás formado por um cilindro, tendo em cada extremo uma semi-esfera.
    a) Calcula o volume do reservatório.
    b) Pintou-se o reservatório com tinta especial, tendo-se gasto 2,5 l por m^2. Quantas latas de 5 l se gastaram?



18. Na caixa cilíndrica que vês na figura, cabem à justa 3 bolas de ténis. O volume da caixa cilíndrica é 5176 cm^3.
    a) Calcula o volume de uma bola.
    b) Calcula o volume não ocupado pelas bolas.
    c) Exprime o volume das 3 bolas e do cilindro em função do raio de uma bola. Calcula a razão entre o volume das 3 bolas e o volume da embalagem.



Exercícios de escolha múltipla

1.ª Parte

1. Se a aresta de um cubo triplica, o volume do novo cubo é:

A. dez vezes maior
B. o triplo
C. nove vezes maior
D. vinte e sete vezes maior

2. A medida do volume de uma esfera de raio r é:

A. $4\pi r^3$
B. $\frac{4}{3}\pi r^2$
C. $\frac{4}{3}\pi r^3$
D. $4\pi r^2$

3. A secção de uma pirâmide quadrangular regular obtida por um plano paralelo à base é um:

A. triângulo
B. quadrado
C. círculo
D. pentágono

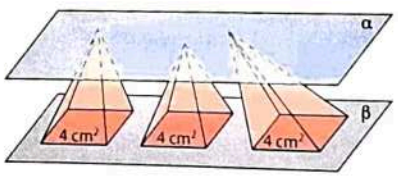
4. O valor exacto do volume de um cone, em cm^3, de raio 4 cm e altura 3 cm é:

A. 48π
B. 16π
C. $\frac{4}{3}\pi$
D. $\frac{3}{4}\pi$

5. Multiplicou-se o raio de uma esfera por 5. Então a sua área vem multiplicada por:

A. 25
B. 50
C. 100
D. 200

6. Os vértices das três pirâmides estão num plano α paralelo a β. Então os volumes V_A, V_B e V_C são:



A. iguais
B. $V_A < V_B < V_C$
C. $V_A > V_B > V_C$
D. $V_A = 2V_B = 2V_C$

2.ª Parte

1. Num jardim foi colocada uma escultura, com 2,5 m de altura, como a que vês na figura, constituída por:

- um prisma triangular regular com 1,5 m de aresta da base.
- uma semi-esfera com 0,5 m de diâmetro.

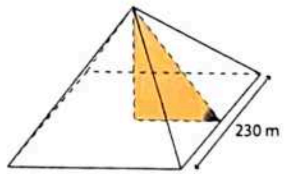
Decidiu-se pintar a escultura (excepto a base).

a) Calcula a área a pintar, arredondada à décima.

b) Sabe-se que uma lata de tinta dá para 2 m^2. Quantas latas se devem comprar?

c) Qual é o volume da escultura?

2. A pirâmide de Quéops é quadrangular regular e a aresta da base tem 230 m e a altura tem 147 m.
Observa a figura e calcula a área lateral da pirâmide e o seu volume.



3. A peça de porcelana é limitada por duas semi-esferas.

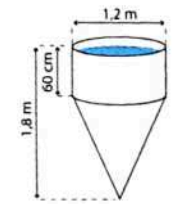
a) Calcula o volume da peça de cerâmica para $r = 8$ cm e $a = 2$ cm.

b) Para pintá-la nas cores indicadas, gastaste mais tinta azul ou amarela?

4. Um reservatório de água é constituído por uma parte cilíndrica e uma parte cónica, como vês na figura.

a) Levará 1 200 litros de água?

b) O reservatório foi construído em chapa metálica e não tem tampa. Quantos m^2 de chapa tem o reservatório?



Há números irracionais célebres?

π

π é a razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro. Ficou célebre, na História, pois desde tempos remotos se pensou que não era um número racional, e que não se podia representar como a razão entre dois números inteiros. Coube a Lambert, em 1800, provar que π não é um número racional. Qual é o valor de π ao longo dos tempos?

- Arquimedes, 250 a.C., enquadrou π por

$$3+\frac{10}{71} \quad \text{e} \quad 3+\frac{1}{7}$$

- Shanks, em 1873, calculou manualmente um valor de π com 707 casas decimais.
- No final do século XX, com dois computadores, calculou-se π com mais de um milhar de milhão de casas decimais.

ϕ

ϕ tem estado ligado, ao longo da História, a conceitos matemáticos, sendo usado na Arte e na Arquitectura, estudado na Geometria e observado na Natureza.

Está intimamente ligado ao Rectângulo de Ouro e à Sequência de Fibonacci.

Muitas construções actuais, como, por exemplo, o Edifício das Nações Unidas, em Nova Iorque, e até objectos do dia a dia, como o cartão de crédito, estão ligados ao Número de Ouro.

$$\phi = 1{,}61803398\ldots$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\sqrt{2}$

Para os gregos, da escola pitagórica, tudo se explicava com os números...

Contudo, ao quererem determinar a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado um, não conseguiram encontrar um número ao qual dessem a forma de fracção.

Este facto não foi divulgado para que não se descobrisse este facto «inexplicável».

Passaram-se muitos séculos para que $\sqrt{2}$ fosse aceite como número.

Foi Newton quem definiu, pela primeira vez, número racional e irracional.

Euclides (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.) deixou uma obra constituída por 13 livros chamada *Os Elementos*.

Os livros VII, VIII e IX são consagrados à Aritmética e neles surgem, por exemplo, múltiplos, divisores e números primos.

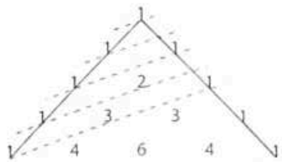
Monómios e polinómios

Triângulo de Pascal

B. Pascal

Blaise Pascal foi um matemático francês do século XVII.

O Triângulo de Pascal é uma sequência de números fácil de construir e que se revela muito útil, pois pode ser usado para calcular os coeficientes das potências de um binómio do tipo $(a+b)^n$, com n inteiro:



$(a+b)^0 = 1$

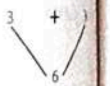
$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

Repara que:

- O primeiro e último número de cada linha é sempre 1.
- Cada número do triângulo obtém-se somando os dois números por cima dele.



- Se somares os números que se encontram nas rectas oblíquas, indicadas no triângulo de Pascal, obténs a sequência:

1 1 2 3 5 8 ...

sequência de Fibonacci

Equação quadrática

O. Khayyam

Omar Khayyam foi um poeta e matemático persa, que viveu entre 1047 e 1123; deve-se-lhe o estudo da resolução geométrica de equações do 2.º grau. Usando o método de Omar Khayyam, vamos resolver geometricamente a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Resolução:

$$x^2 = 5x - 6$$

A partir desta equação, vamos definir duas funções:

$$y = x^2 \text{ e } y = 5x - 6$$

Num mesmo referencial cartesiano, vamos representar os pontos (x, y) que obedeçam a cada uma das condições: $y = x^2$ e $y = 5x - 6$.

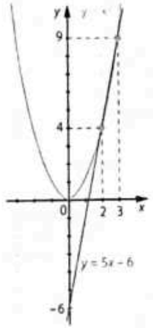
x	$y = x^2$
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$y = 5x - 6$
0	-6
1	-1
2	4

Estes pontos ficam situados sobre uma parábola.

As abcissas 2 e 3 dos pontos de intersecção da parábola com a recta, são as soluções da equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$



Resolve, por este processo, a equação:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Confirma o resultado, usando a fórmula resolvente.

Estes pontos ficam situados sobre uma recta.

... é fácil deduzir a fórmula resolvente?

Observa:

$$ax^2 + bx + c = 0\,,\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{caso notável}} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estatística

Foi no século XVIII que surgiu a palavra «estatística». Diz-se que teve origem na palavra «estado», do latim *status*. Inicialmente, a Estatística foi de grande interesse apenas para políticos e estados.

Pearson e Gauss foram matemáticos célebres que se dedicaram ao estudo da Estatística.

Pearson

Gauss

O inglês Karl Pearson viveu entre 1857 e 1936, e foi professor na Universidade de Londres. Foi este matemático quem, pela primeira vez, usou o termo «histograma» nas suas conferências sobre Estatística.

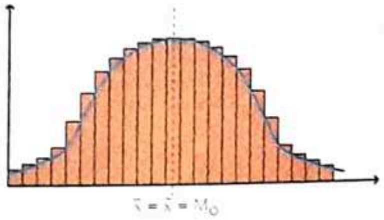
O alemão Carl Friedrich Gauss viveu entre 1777 e 1855, e foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Sabe-se que foi um menino prodígio e conta-se que, muito novo, conseguiu calcular rapidamente a soma dos cem primeiros números naturais:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$50 \times 101 = 5050$$

Gauss, em Estatística, concluiu que há muitas distribuições cujo gráfico é uma curva com a forma de campânula, contínua e simétrica em relação a um eixo vertical que passa por $\bar{x}$. A essas distribuições corresponde um gráfico chamado «curva de Gauss» ou «curva normal».



Existe em Moçambique um organismo – Instituto Nacional de Estatística (INE) –, que tem como objectivos principais, a produção de estatísticas económicas e sociais, bem como a difusão dessas informações.

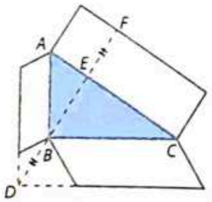
Semelhança de triângulos

Uma variante
do Teorema de Pitágoras

Deve-se a Pappus de Alexandria, matemático grego que viveu no século III a.C., uma variante interessante do teorema de Pitágoras.

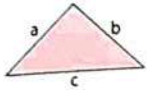
Nas condições da figura abaixo, Pappus concluiu:

«Num triângulo rectângulo, a área do paralelogramo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos paralelogramos construídos sobre os catetos.»



Heron, matemático e físico de Alexandria, viveu no primeiro século depois de Cristo, tendo descoberto uma fórmula para determinar a área de um triângulo, conhecidos apenas os comprimentos dos três lados (a, b e c).

Heron



$$Área_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

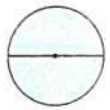
s — semiperímetro do triângulo

Thales, (c. 624 a.C. – c. 547 a.C.) matemático grego, utilizou a semelhança de triângulos para determinar a altura da grande pirâmide de Queóps no Egipto, sem ter de a subir.

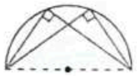
Em Geometria, atribuem-se-lhe descobertas, tais como:

Thales

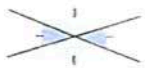
- O diâmetro de um círculo divide-o em duas partes geometricamente iguais.



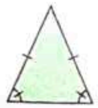
- Todo o ângulo inscrito num semicírculo, é recto.

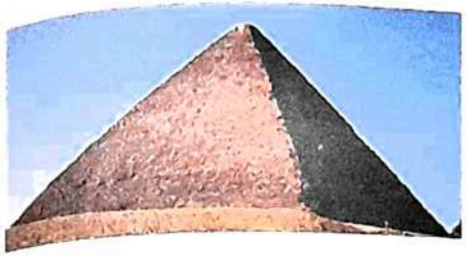


- Ângulos verticalmente opostos são geometricamente iguais.



- Num triângulo isósceles, os ângulos opostos aos dois lados iguais são geometricamente iguais.

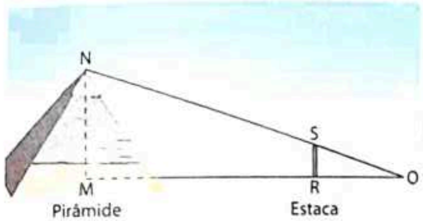




Conta ainda a História, que Thales viajou até ao Egipto, onde conseguiu calcular a altura da grande pirâmide de Queóps.

Num dia de sol, utilizando uma estaca e as sombras da pirâmide e da estaca, mediu [OM], [OR] e [SR] e calculou $\overline{MN}$, a altura da pirâmide, através da igualdade:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OR}} \rightarrow \text{propriedade de Thales.}$$



Cálculo de áreas e volumes de sólidos geométricos

Euclides

Não se sabe ao certo a altura em que a Geometria começou a ser estudada, mas sabe-se que em 3000 a.C., já os chineses e os habitantes da Babilónia possuíam conhecimentos de Geometria.

A palavra geometria deriva do grego e significa «medição da terra» (em grego geometrein, geo – terra + + metrein – medir).

Na verdade, é com os gregos, a partir de Thales de Mileto e Pitágoras que a Geometria passa a usar o método dedutivo.

Mais tarde, Euclides, matemático grego (300 a.C.) e professor em Alexandria, enunciou importantes axiomas e definições, tendo redigido uma obra importantíssima, *Os Elementos*, constituída por 13 volumes.

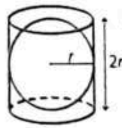
Sabias que...

«A razão entre a área da superfície de uma esfera e de um cilindro, no qual a esfera está inscrita, é igual a $\frac{2}{3}$ e é também igual à razão entre os seus volumes.»

Foi Arquimedes (287-212 a.C.), o maior matemático e físico da Antiguidade, que viveu em Siracusa, na Sicília, discípulo dos sucessores de Euclides, quem o demonstrou.

Arquimedes

Como se considerou que esta foi a sua mais brilhante descoberta, diz-se que a figura seguinte foi gravada no seu túmulo.



$$A_{esfera} = \frac{2}{3} A_{total\ do\ cilindro}$$

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} V_{cilindro}$$

Unidade 1: Números reais. Radiciação

Exercícios de consolidação pp. 19 e 20

1 . a 1) 1,4 finita a 2) 0,86602… infinita não periódica a 3) −1,(8) infinita periódica a 4) 0,8 finita a 5) 0,58(3) infinita periódica a 6) 9,8(3) infinita periódica a 7) 2,8(36) infinita periódica a 8) 1,(857142) infinita periódica

b) Racionais: $\frac{7}{5}$; $-\frac{17}{9}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{59}{6}$; $\frac{312}{110}$; $\frac{13}{7}$. Irracionais: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\frac{11}{9}$; $\frac{38}{11}$

3. Naturais: $\frac{42}{6}$; $\sqrt{144}$ / Inteiros: −103; $\frac{42}{6}$; 0; $\sqrt{144}$ / Racionais: −103; $\frac{42}{6}$; 0; $\sqrt{144}$; $-\frac{28}{5}$; 0,125; − 3,(2) / Irracionais: $\sqrt{11}$; 3π; −5,020020002… / Reais: todos.

4 • a) ∈ b) ∈ c) ∉ d) ∈ e) ∈ f) ∈ g) ∈ h) ∈ i) ∉ j) ∈ k) ∉ l) ∈ m) ∈ n) ∉ o) ∈ p) ∈

5 • A. V B. F C. V D. F E. V F. V G. V H. F

6 • a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ f) $\mathbb{R}$

7 • a) $\mathbb{Q}$; b) $\mathbb{Z}^-$; c) $\mathbb{Q}_0^-$; d) { }; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}$; g) {0}; h) $\mathbb{R}$

8 • A → $-2-\sqrt{2}$; B → −1,5; C → $\sqrt{2}$; D → $\sqrt{5}$; E → 3,2

9 • $-3 < -\frac{1}{3} < 1{,}25 < \frac{7}{5} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 5-\sqrt{2}$

10 • a) ≈ 10,58 b) ≈ 44,89 c) ≈ 119,88 d) ≈ 29,53 e) 113

11 • a) 25 b) 144 c) 12 321 d) 625

12 • P = 52 cm 13 • a) 4,24 cm b) 3,16 cm

Exercícios de consolidação p. 29

14. a) 3 b) Não existe c) 5

15. a) $8\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{2}{3}$

16. a) 2 b) Não existe c) −3 d) 4

17. a) $\sqrt{125}$ b) $\sqrt[5]{0{,}7^3}$ c) $\sqrt[5]{\frac{1}{7}}$ d) $\sqrt[4]{12^{13}}$ e) $\sqrt[4]{625}$

18. a) $\frac{3}{5}$ b) 1

19. a) 9 b) 2 c) 7 d) $\sqrt[4]{5}$

20. a) $\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt[3]{3}$

21. a) $\sqrt{15} < \sqrt{17}$ b) $\sqrt[5]{0{,}2} < \sqrt[5]{0{,}25}$

22. a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt[3]{3}$ c) $\frac{2x^2}{y}\sqrt[5]{\frac{2x}{y^2}}$

23. a) $4\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{3}\sqrt[3]{3}$ c) $9\sqrt[3]{7}$

24. a) 8 b) $2a^2$ c) $\sqrt[8]{2^7}$

25. a) 2 b) $\sqrt[8]{27}$ c) $\sqrt[8]{8}$

26. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ e) $\sqrt{2}-1$

Teste final pp. 30 e 31

1.ª Parte

1 • A. 2 • D. 3 • D. 4 • B. 5 • C. 6 • D. 7 • D. 8 • C.

2.ª Parte

1 • A. V B. F C. V D. V

2 • 32 3 • $-\frac{1}{2}$ 4 • 35 5 • 25

6 • $2b\sqrt[3]{b}$ 7 • A = 30 cm^2 8 • A = $12 + 6\sqrt{3}$ cm^2

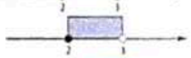
Unidade 2: Inequações e sistemas de inequações lineares com um variável

Exercícios de consolidação p. 42

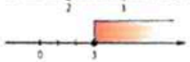
1 • a)] − 2, 0[b) $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ c)] 0, 4 [d)] − 1, 0 [e)] 0, $\sqrt{3}$ [f)] − 3, 0]

2 • a)

b)



c)



3 • a) e b) São solução. c) 2 é solução; − 4 e 0 não são solução.

4 • A. F B. F C. F D. V

5 • a) $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b)]−∞, 0]

c)]3; +∞[

6 • a)]−5; +∞[

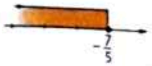
b)]−∞; −4[

c)]−∞, 6[

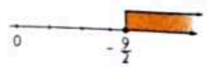
d)]−∞; −0,0625]

7 • a) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$ b)]−∞; 12[c) [4; +∞[

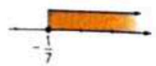
8 • a) $\left]-\infty; -\frac{7}{5}\right]$



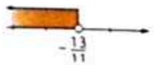
b) [4,5; +∞ [



c) $\left[-\frac{1}{7}; +\infty\right[$



d) $\left]-\infty; -\frac{13}{11}\right]$



9 • Por exemplo:

a) $6x > 11$ b) $4x \leq 7$ c) $x > 12$

10 • a) $n = -2$ b) $n = -3$ c) $n = -1$

Exercícios de consolidação p. 45

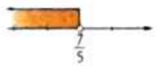
11 • a)]7,10[b) [−2,5; 2] c)]5, 13]

12 • a) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ b)]−∞; 15]

13 • {−1, 0, 1, 2, 3}

14 • a) $\left]-\infty; -\frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{21}{5}; +\infty\right[$ b) $\left]-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$

15 • a) $\left]-\infty; \frac{7}{5}\right[$



b)]2; +∞[

c) $\left]-\infty; -\frac{35}{63}\right]$

16 • a) São, porque somamos a ambos os membros o mesmo número 4.

b) São, porque somamos a ambos os membros o mesmo número, − 4.

c) São, porque multiplicamos ambos os membros por 5.

17 • Pelo menos 16.

18 • $8 < x < 20$ (cm) 19 • De 16 a 23 voltas.

Teste final pp. 46 e 47

1.ª parte

1 • B. 2 • A. 3 • C. 4 • C. 5 • A. 6 • C. 7 • B.

2.ª parte

1 • A. F B. F C. V

2 • a) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ b) {$\sqrt{2}$} c) {0} ∪ [6,5; +∞[

3 • 1,25 MT 4 • $[-1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$

5 • $0 < \ell \leq 16$ (m)

6 • a) Por exemplo $\frac{5}{8}$ porque $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ e $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$

b) $(4x-2)(4x-3) \in \mathbb{R}^-$

Unidade 3 – Noção de monómios e polinómios

Exercícios de consolidação pp. 55 a 57

1 • a) João: n; Joana: $3n$; Pedro: $n + 3$

b) n e $3n$. São expressões onde não figuram adição ou subtracção. c) 113

2 • a) $0{,}3a$; $4a^2$; $7a$; $1 + 2a$; $0{,}5 + 2a$

b) Monómios: $0{,}3a$; $4a^2$; $7a$

3 • a) 7; ab; $\frac{-3}{4}xy^2z$; $-\frac{1}{2}t$; $\frac{27}{25}x^2yz$; $-a^2b$;

Grau: 2; 4; 1; 4; 3

4 • b) e d)

5 • Por exemplo: a) $2x^3y$ b) ab^2c^3 c) $3ab$ d) $5a^3$

6 • a) São, têm a mesma parte literal e coeficientes simétricos.

b) Não, os coeficientes não são simétricos.

c) São, têm a mesma parte literal e coeficientes simétricos.

d) São, têm coeficientes simétricos. e) Não.

7 • a) $12x$ b) $4x + 13$

8 • a) $9{,}2x$ b) $-34y$ c) $-3{,}5y$ d) $-\frac{13}{4}x$ e) $\frac{1}{24}a$

9 • a) $5x$ b) $7y$ c) $9b$ d) $2x$

10 • a) $2a^2$ b) $-48a^2$ c) $5b^7$ d) 10^7a^4

11 • a) $6a^2b^2c$ b) $2x^2y$

12 • a) $A_A = 4x^2$; $A_B = \frac{5}{3}x^2$; $A_C = \frac{\pi x^2}{2}$; $A_D = 6x^2$

b) $A_A = 36\ m^2$; $A_B = 15\ m^2$; $A_C = \frac{9\pi}{2}\ m^2$; $A_D = 54\ m^2$

13. a) $5x^4$ b) $2x^3$ c) -10 d) $-4x^2$
e) $5y^4$ f) $-7x^4$ g) $-5x^7$ h) 1
i) $-7x$ j) $-2xy$ k) $-3x$ l) $7c$
m) $\frac{5}{2}x^2$ n) $\frac{4}{3}a^2$ o) $-\frac{5}{3}x$ p) $\frac{3}{5}x^2$
q) $-8y$

14. a) $2y$ b) $\frac{1}{2}x^2y$ c) z d) $-2m^2n$
e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{5}ab^2$ g) $\frac{3}{4}x^3y^2$ h) $-\frac{2}{5}x^4$

15. a) $9x^4$ b) $64x^8$ c) $8x^{15}$ d) $27y^6$
e) y^8 f) m^4n^4 g) $16x^4y^6$ h) $16x^4b^2$
i) $27y^6$ j) $36m^6$ k) $81x^{12}y^{16}$ l) $8x^6m^9$

16. a) $\frac{x^6}{8}$ b) $\left(\frac{x^4}{16}\right)^2$ c) $\frac{1}{4}y^2$ d) $\frac{8}{27}x^3$
e) $\frac{9}{16}m^2$ f) $\frac{25}{36}m^6$

Exercícios de consolidação p. 60

17 • Por exemplo:
5; x;
$x + 2x^2$; $5 + y$; $x^2 + x + 1$; $y^3 - y + 2$

18 • a) 4 b) 6 c) 2

19 • a) $-7y^4 + -7y^3 + 2y^2 + 2$ grau 4
b) $-x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x + 9$ grau 3
c) $2a^4 + a^3 + a^2$; grau 4 d) $-4y^4 + 10y^3 - 2$; grau 4

20 • a) 0 b) -3

21 • a) $x^4 + x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{4}$;
$x^4 + x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}$; $-x^4 + x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{11}{4}$
b) 0,5

22 • $6x - 3$

23 • a) $8x - 3$ b) $-4x + 11$ c) $\frac{11}{4}x - 1$
d) $4y^2 - 7y + 7$ e) $2a - 3$ f) $-x - \frac{5}{2}$

24 • a) $2x + 2y + 2$ b) $6a + 2b + 6$ c) $2x - 2y + 2t$

Exercício de consolidação p. 65

25 • a) $7x + 21$ b) $2x^2 + xy$ c) $\frac{3x - 3}{2}$

26 • a) $-18x + 9$ b) $-\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{11}{10}x + y - 1$

c) $-2y^2 - y$ d) $x^2 + 2x$
e) $5x^2 - 5xy + 8x - 3y + 3$ f) $-1 - \frac{5}{2}y$

27 • a) $\frac{31}{8}x + 3$ b) $\frac{x^2}{2} + 2x - 25$ c) $\frac{x}{5}$ d) $\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}$

28 • a) I. $3x^2$; II. $2x$; III. $15x$; IV. 10 $3x^2 + 17x + 10$
b) $3x^2 + 17x + 10$

29 • a) $x^2 - xy + 7x - 3y + 12$ b) $x^2 - 14x + 13$
c) $x^2 + xy + 14x + y + 13$ d) $6x^2 - 11x - 3xy - 2y - 10$

30 • a) $ab + b^2$ b) $a^2 - ab$ c) $a^2 - b^2$

31 • a) $100 + 20 + 1 = 121$
b) $400 + 40 + 1 = 441$; $400 - 40 + 1 = 361$

Exercícios de consolidação pp. 73 a 75

32 • a) $x^2 + 6x + 9$ b) $y^2 + 4y + 4$
c) $d^2 - 2d + 1$ d) $n^2 - 8n + 16$
e) $4x^2 + 8x + 4$ f) $9 + 12t + 4t^2$

33 • a) $4x^2 + 20x + 25$ b) $16x^2 - 40x + 25$
c) $4 - 4x + x^2$ d) $y^2 + 16y + 64$
e) $a^2 + a + 0{,}25$ f) $\frac{1}{4}x^2 + 5x + 25$
g) $\frac{25}{16}a^2 - 10a + 16$ h) $\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{15} + \frac{1}{25}$

34 • $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)^2$

35 • a) $x^2 - 8x + 16$ b) $9a^2 + 12ab + 4b^2$
c) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$ d) $(a^2 - 3b)^2$
e) $(a^2 - 4b)^2$ f) $\left(4x - \frac{3}{2}y\right)^2$

36 • a) 16 b) 20 c) 9

37 • a) $x^2 - 1$ b) $4 - a^2$ c) $\frac{1}{4} - y^2$ d) $x^4 - 4$

38 • a) $8a^3 - 48a^2 + 72a$
b) $20y^3 - 20y^2 + 5y$ c) $7a^3 - 175a$

39 • a) $15(x - 2)$ b) $7(a - 4)$
c) $x(x - 1)$ d) $y^2(y - 1)$

40 • a) $2x(x - 3)$ b) $4x(x^2 + 6x - 4)$
c) $a^2(a^2 - 3a - 2)$

41. a) $4t(s + 3)$ b) $6a(a - 2b)$ c) $5x(3x + 1 + 4x^2)$

42 • a) $(a - 1)(5 + a)$ b) $a(a - 1)$
c) $(5x - 1)(5x + 6)$ d) $(y - 1)(y - 2)(y - 3)$
e) $\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right)$ f) $5(c - 1)(c + 1)$
g) $-(x + 1)$ h) $(y - 1)(y + 2)$

43 • a) $(x + 1)(x + 1)$ b) $(y - 2)(y - 2)$
c) $(3x + 1)(3x + 1)$ d) $9(x + 1)(x + 1)$
e) $(2t + 5)(2t + 5)$ f) $(6a - 7)(6a - 7)$
g) $\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right)$

44 • a) $(y - 1)(y + 1)$ b) $(5 - a)(5 + a)$
c) $\left(\frac{3}{5} - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{x}{2}\right)$ d) $4(x - 5)(x + 1)$
e) $(11x + 1)(15x - 1)$ f) $(x - 7)(3x + 1)$
g) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ h) $\left(\frac{5}{2} + a\right)\left(-\frac{3}{2} - a\right)$

45 • a) $2(y - 2)(y + 2)$ b) $3(x - 4)(x + 4)$
c) $2(x + 6)(x + 6)$ d) $4(1 - 2y)(1 - 2y)$

46 • a) $2(2x - 1)(2x + 1)$ b) $(4 - x)(3x + 2)$
c) $(3 - x)(5 + x)$ d) $2(x - 1)(x - 1)$
e) $2(a - 1)(a + 1)$ f) $(2y + 1)(2y - 1)(2y + 3)$

47 • a) $\frac{1}{a+b}$ sendo $a + b \neq 0$ b) $\frac{1}{a+b}$ sendo $a - b \neq 0$
c) $\frac{2-x}{x}$ sendo $x + 2 \neq 0$ d) $\frac{a+b}{3a}$ sendo $a + b \neq 0$
e) $-\frac{1}{y+1}$ sendo $y - 1 \neq 0$ f) $\frac{2}{x}$ sendo $x + 1 \neq 0$

48 • a) $10x^2 + 10{,}5x + 2$ b) $63\ cm^2$

Teste final pp. 76 e 77

1.ª Parte

1. C. 2. C. 3. A. 4. C. 5. A. 6. A.
7. B. 8. C. 9. A. 10. C.

2.ª Parte

1. a) +; + b) ×; × c) ×; −; −

3. C. 4. 2

5 • $4m + 2p + 6$ 6. $\frac{4a + 4 - a^2}{2(a^2 - 4)}$

7. $5x^2 + 4x - 1$ 8. $(1 + z)(3x - 2y)$

Unidade 4: Equação quadrática

Exercícios de consolidação pp. 87 e 88

1 • a) Porque o primeiro membro é um produto de factores e o segundo membro é zero. b) -3 c) -3; 1

2 • a) 0; -1 b) -2 c) 0; 3

3 • a) $x = 2 \vee x = \frac{5}{2}$ b) $x = 1 \vee x = 2$
c) $y = 5 \vee y = 4$ d) $x = -\frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$

4 • a) $x(x - 1) = 0$ (p.e.) b) $(x + 1)(x - 1) = 0$ (p.e.)

5 • $9x^2 = -3x + 5$ e $3x(x + 1) = 9$, pois o coeficiente x^2 é diferente de zero.

6 • a) $2x^2 + x - 3 = 0$; $a = 2$; $b = 1$; $c = -3$

7 • $x^2 - 2x + 5 = 0$; $a = 1$; $b = -2$; $c = 5$
$3x^2 + 3x = 0$; $a = 3$; $b = 3$; $c = 0$
$7x^2 - 36 = 0$; $a = 7$; $b = 0$; $c = -36$
$x^2 - 1 = 0$; $a = 1$; $b = 0$; $c = -1$
$5x^2 = 0$; $a = 5$; $b = 0$; $c = 0$

8 • a) $x^2 + 2x = 3$ b) $x - x^2 = 0$
c) $x(x + 1) = 2$ d) $(x - 2)^2 = 9$

9 • a) Por exemplo: $3x^2 - 2x + 1 = 0$
b) Por exemplo: $x^2 - x = 0$
c) Por exemplo: $5x^2 - 5 = 0$

10 • a) $9x(x + 3)$ b) $\frac{x}{8}(5x - 3)$ c) $5y(y - 2)$

11 • a) $(x + 1)(x + 1)$ b) $(4x - 5)(4x + 5)$
c) $\left(\frac{9}{11}y - \frac{2}{9}\right)\left(\frac{9}{11} + \frac{2}{9}\right)$ d) $(8x - 7)(8x - 7)$
e) $\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{7}{6} - x\right)\left(\frac{7}{6} - x\right)$

12 • a) $(3x - 6)(3x + 4)$ b) $(4x - 1)(6x + 1)$
c) $\left(\frac{1}{2}y - 3\right)\left(\frac{5}{2}y + 3\right)$

13 • a) $S = \left\{1, -\frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \{-2, 4\}$
c) $S = \{0, -1, -7\}$ d) $S = \{2, -9\}$

15 • a) $l \approx 8.9$ cm b) $P = 48\sqrt{5}$ cm

Exercícios de consolidação pp. 97 a 99

16 • a) $S = \{-3, 3\}$ b) $S = \{-1, 1\}$ c) $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

17 • a) $S = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ b) $S = \{-3, 3\}$
c) $S = \{-1, 1\}$ d) $S = \{-4, 4\}$

18 • 11 m; 22 m e 55 m 19 • $\frac{3}{4}$

20 • a) $S = \{0, 5\}$ b) $S = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$
c) $S = \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ d) $S = \{0, 9\}$ e) $S = \left\{0, \frac{35}{13}\right\}$

21 • a) $S = \left\{0, -\frac{4}{9}\right\}$ b) $S = \{0, 4\}$
c) $S = \{0, 7\}$ d) $S = \{+\sqrt{11}, -\sqrt{11}\}$

22 • 1,25 cm

23 • a) $S = \{3\}$ b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

d) $S = \{-1\}$ e) $S = \{6\}$ f) $S = \left\{\frac{3}{7}\right\}$

24 • a) $S = \left\{\frac{2}{5}, 1\right\}$ b) $S = \{1, 4\}$ c) $S = \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$

d) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ e) $S = \{\ \}$

25 • a) Duas b) Nenhuma c) Uma

26 • a) $S = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$ b) $S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ c) $S = \{-2, 1\}$

27 • a) $x^2 + 3x - 4$ b) $(x-1)(x+4)$ c) $S = \{1, -4\}$

28 • a) $S = 5$ $P = 1$ b) $S = 3$ $P = -12$

c) $S = -5$ $P = -1$

29 • a) $(x-2)(x+3)$ b) $3(x-4)(x \times 3)$

c) $3(x-4)(x+7)$

30 • 3 m 31 • 10 cm × 5 cm × 8 cm

32 • a) $x^2 + 5x + 12 = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $3x^2 - 2x - 4 = 0$

33 • $x^2 + 3x - 4 = 0$, por exemplo

34 • a) $k = 9$ b) $k = 5$

Teste final pp. 100 e 101

1.ª parte

1 • C. 2 • B. 3 • D. 4 • B.
5 • A. 6 • C. 7 • D. 8 • B.

2.ª parte

1 • a) $(x-3)(x+2) = -6$ b) $(x+1)^2 = -2x$

c) $(2x-1)^2 = (3x+1)^2$

2 • a) $(2x-1)(x+1)$ b) $S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$

3 • 12 anos.

4 • a) $S = \{0, 5\}$ b) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{5}{3}, 1\right\}$

5 • a) $12^2 - 2x^2$ b) $x = 3$ m

6 • base = 5 dm; altura = 4 dm

7 • $b^2 - 4ac = -4$, logo menor que zero. A equação é impossível.

Unidade 5: Função quadrática

Exercícios de consolidação pp. 119 a 121

1.a) D. b) B. c) C. d) C.

2.a) $r(x) = x^2 - 2x$; $t(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$

b) $D'_r = [-1, +\infty[$; $D'_t = \mathbb{R}_0^+$

c) r: mín. rel. = -1 para $x = 1$

t: mín. rel. = 0 para $x = 2$

3. Deves dispô-los em quadrado com 100 pés de cada lado.

4. a) 3 metros b) 3 segundos

c) A variável independente é o tempo e a dependente a altura.

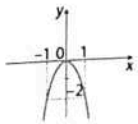
5. Deve ser quadrada de 15 m de lado.

6. a) 40 m b) 4 m

7. a) $h(2) = 60$ m; b) $t = 8$ s

c) 16 m d) 2 s

8. a)



b) Zeros: $x = 0$; $D' = \mathbb{R}_0^+$;

c.1) h resulta de uma translação vertical de g, de modo que o vértice da parábola seja o ponto $(0, 1)$.

c.2) j resulta de g, por uma translação vertical de modo que o vértice da parábola seja o ponto $(0, -1)$.

d) $(0, -1)$ e) $D'_h =]-\infty, 1]$

f) Nenhuma é injectiva, porque para quaisquer dois valores simétricos de x têm a mesma imagem.

9.a) $y = 5(x-7)^2$; $y = \frac{1}{32}(x+3)^2$

10.a) $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$; $D'_f = D'_g = \mathbb{R}_0^+$; $D'_h = \mathbb{R}_0^-$;
Zeros de f: $= x = -1$; de g: $x = 2$; de h: $x = -2$.

b) Os gráficos de f e g têm a concavidade voltada para cima e o de h para baixo; $V_f \smile (-1, 0)$; $V_g \smile (2, 0)$; $V_h \smile (-2, 0)$; eixos de simetria de f: $x = -1$; de g: $x = 2$; de h: $x = -2$;

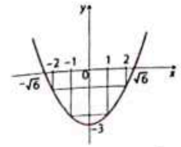
c) f é crescente em $[-1, +\infty[$; f é decrescente em $]-\infty, -1]$; g é crescente em $[2, +\infty[$; é decrescente em $[-\infty, 2]$; h é crescente em $]-\infty, -2]$ e decrescente em $[-2, +\infty[$.

Soluções

11. a)

x	-2	-1	0	1	2	$-\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
$\frac{1}{2}x^2 - 3$	-1	$-\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-1	0	0

b)



c) O gráfico de m resulta do de f por uma translação vertical, que transforma o vértice no ponto (0,6).

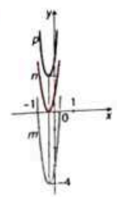
d.1) $V_f(0, -3)$; $V_m(0, 3)$

d.2) $D'_f = [-3, +\infty[$; $D'_m = [-3, +\infty[$

d.3) f é decrescente se $x \in -\infty, 0]$
m é crescente se $x \in \mathbb{R}_0^+$

d.4) $]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$

12.



$V_m \smile \left(-\frac{1}{3}, -4\right)$;

$V_n \smile \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$;

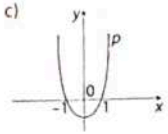
$V_P \smile \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$;

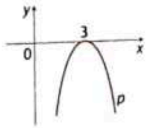
13.a) 12,5 s; b) 156,25 m.

14. O rectângulo deve ser um quadrado de 24 m de lado.

15. a) p: -1 e 2; q: $3h$; b) $V_p \smile (0, -1)$; $V_q \smile (3, 0)$

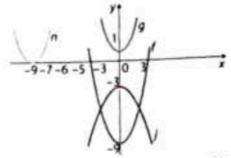
c)





d) p é positiva $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;
p é negativa $\Leftrightarrow x \in]-1, 1[$;
q é negativa $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

16. a)



b) f é positiva $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$;
f é negativa $\Leftrightarrow x \in]-3, 3[$; g é positiva $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$;
j é negativa $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Teste final pp. 122 e 123

1.ª Parte

1. C. 2. B. 3. A. 4. C. 5. D. 6. A.

2.ª Parte

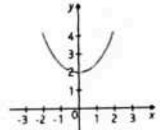
1.a) Zeros $f = \{0\}$
Zeros $g = \{-2, 2\}$
Zeros $h = \{-3, 1\}$

b) Eixo de simetria f: $x = 0$
Eixo de simetria g: $x = 0$
Eixo de simetria h: $x = -1$

c) Vértice f: $(0, 0)$
Vértice g: $(0, -1)$
Vértice h: $(-1, -2)$

d) f Crescente: $]-\infty, 0[$
Decrescente: $]0, +\infty[$
g Crescente: $]0, +\infty[$
Decrescente: $]-\infty, 0[$
h Crescente: $]-1, +\infty[$
Decrescente: $]-\infty, -1[$

2.



3.a) Zeros: não tem; Vértice: (2, 2)
b) Concavidade para cima
c) Domínio: $\mathbb{R}$
Contradomínio: $[2, +\infty[$
Decrescente: $]-\infty, 2[$
Crescente: $]2, +\infty[$
Sempre positiva.
d) Eixo de simetria: $x = 2$
e) Mínimo absoluto: 2 para $x = 2$

4.a) $E_c = 600\,v^2$
b) $E_c = 37{,}5 \times 10^4$ V

Unidade 6 – Quadriláteros

Exercícios de consolidação pp. 138 e 139

1. A, C e E.

2.a) O e P. b) I, J, L, M e N.

3.a) A; D; E; F; H b) A; E

4.a) $\hat{x} = 49°$ b) $\hat{x} = 95°$
c) $\hat{x} = 147°$ d) $\hat{x} = 114°$

5. Não; porque os diagonais não se cortam ao meio.

6. $\overline{DB} = 10$ cm; $C\hat{A}B = 20°$;
$A\hat{O}B = 140°$; $D\hat{O}C = 140°$

$\overline{ST} = 4$ cm ; $U\hat{R}S = 60^\circ$; $R\hat{T}U = 30^\circ$;
$U\hat{O}T = 90^\circ$

7.a) B e D. b) A e D.
c) A – losango; B – rectângulo; C – paralelogramo obliquângulo; D – quadrado.

8.a) $\overline{DC} = 3{,}5$ cm; os lados opostos são iguais.
$\overline{BC} = 2{,}5$ cm; os lados opostos são iguais.
$D\hat{C}B = 70^\circ$; ângulos opostos são iguais;
$A\hat{D}C = 110^\circ$; $A\hat{B}C = 110^\circ$

b) $R\hat{S}T = 135^\circ$; $U\hat{S}T = 35^\circ$; $U\hat{T}S = 45^\circ$;
$R\hat{U}S = 35^\circ$; $\overline{RU} = 4$ cm
A diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos geometricamente iguais.
A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Os ângulos opostos.

12.a) $\overline{CD} = 4{,}5$ cm b) $\overline{AO} = 3$ cm c) $\overline{BD} = 7$ cm

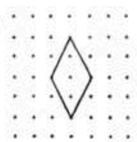
Teste final pp. 140 e 141

1.ª Parte

1. B. 2. A. 3. C. 4. B.
5. D. 6. B 7. C. 8. C.

2.ª Parte

1. A. Verdadeiro. B. Falso. C. Verdadeiro. D. Verdadeiro. E. Verdadeiro.

2.


3. As diagonais são perpendiculares.
4. Tem os lados opostos paralelos, os quatro lados geometricamente iguais, duas diagonais perpendiculares e diferentes.
5. $\overline{IS} = 2$ cm; $\overline{IO} = 2{,}5$ cm; $\overline{SO} = 4{,}3$ cm
A. Falso, porque há trapézios que não são paralelogramos, por exemplo, o trapézio rectângulo.
B. Verdadeiro, porque o quadrado tem 4 ângulos rectos.

Unidade 7: Noções básicas de estatística

Exercícios de consolidação p. 149

1 • a)

N.	8	9	10	13	15	18	19
fa	1	3	4	6	5	4	2
Fa	1	4	8	14	19	23	25
fr	4%	12%	16%	24%	20%	16%	8%
Fr	4%	16%	32%	56%	76%	92%	100%

b) 16% c) 17%

2.a) 7 b) 10% c) Séries e musicais
d) Filmes; têm maior audiência.

3. fa = 15 fr: 8%; 22%; 20%; 16%; 14%

4.a) Não, só 25% acham que o ambiente vai melhorar.
b) Sim, 25% corresponde a $\frac{1}{4}$. c) 88

Exercícios de consolidação pp. 154 e 155

5. a) $\bar{x} \approx 22{,}2$; $\tilde{x} = 17{,}5$. b) A mediana, porque o valor 78 faz com que a média seja superior a 12 dos 14 dados.

6.a) $\bar{x} = 2{,}7$ (1.c.d.) b) $\bar{x} = 3{,}9$ (1.c.d.)
c) $\bar{x} = 219{,}7$ (1.c.d.) d) $\bar{x} = 20{,}6$ (1.c.d.)

7.a)

Número de passageiros	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	32	64%
2	12	24%
3	4	8%
4	2	4%

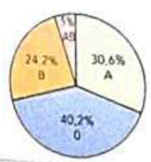
b) 1,52 pessoas por automóvel

8.a) 32 b) 5 c) 15 d) 15

9. 11 10. 4 11. Foi superior a 9,5.

12.a) 39 b) Amodal c) 285 e 287 d) Azul

13. Uma distribuição (não quantitativa), por exemplo, a cor

14 • a)


15.a) 40% b) 4 321,95 milhões de toneladas
c) 144°; 36°; 27,7°; 15,5°; 10,8°; 9°; 27°; 90°.
d) 6915,12 milhões de toneladas
e) 1296,58 milhões 4 toneladas EUA e UE contribuem com 65%, ou seja, 11 237,1 milhões de toneladas. Significa que os países mais industrializados deveriam preocupar-se mais com o Planeta e pagar taxas maiores pois são os que mais poluem.

16 • a) $\bar{x} = 2{,}2$; $\tilde{x} = 1$; $M_o = 1$

b)

fr	55%	0%	27%	9%	4%
fa	6	6	9	10	11
Fr	55%	55%	82%	91%	100%

17.a) e b) 25% c) 5

Teste final pp. 156 e 157

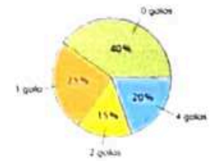
1.ª parte

1.a) C 1.b) C 1.c) C 1.d) A 1.e) A
2.a) B 2.b) A 2.c) A 3. D

2.ª parte

1.a)

Golos	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. absoluta acumulada
0	8	40%	8
1	5	25%	13
2	3	15%	16
3	4	20%	20

b) Moda: 0 golos; média: 1,15 golos. c) 35%
d)


2.a) Barragem de Cahora Bassa
b) Barragem de Cahora Bassa: 1 500
Arquipélago do Bazaruto: 1 000
Lago Niassa: 500
Ilha de Moçambique: 400
Parque Nacional de Gorongosa: 600
c) Lago Niassa.

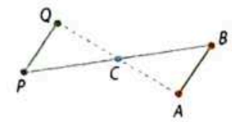
3.a) Teste A – moda: 11; média: 12,4; mediana: 12.
Teste B – moda: 12; média: 12,5; mediana: 12,5.
b) Na versão B houve melhor aproveitamento.

4. 11,3

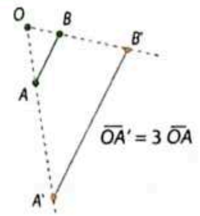
Unidade 8: Semelhança de triângulos

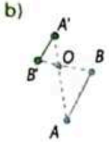
Exercícios de consolidação pp. 174 e 175

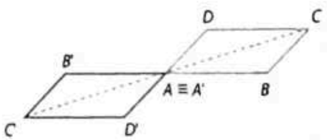
1. a) $H_{A,5}(B) = F$ b) $H_{F,-5}(G) = A$
c) $H_{C,\frac{1}{3}}(F) = E$ d) $H_{E,-2}(G) = A$
e) $H_{E,-0,5}(A) = G$ f) $H_{B,2}(x) = H$
Como $\overline{BH} = 6$ e $\overline{BE} = 3$
$x = E$ e podemos dizer que $H_{B,2}(E) = H$

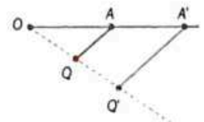
2.a) [AB] e [DE] são paralelos por [DE] ser transformado de [AB] por uma homotetia.
b)


Unir A com C e prolongar; por P tirar uma paralela [AB], obtendo-se o segmento pedido [PQ].

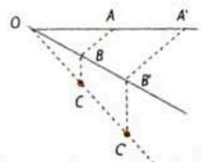
3.a)


b)


4.


5.


Une-se O com Q e por A' tira-se uma paralela a [AQ], obtendo-se o segmento [A'Q'].

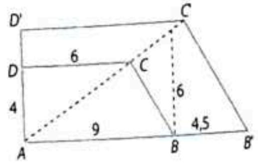
6.


7. $\overline{A'B'} = 4{,}5$ cm $\overline{B'C'} = 6$ cm $\overline{A'C'} = 3$ cm

8. a) 8 cm e 10 cm.

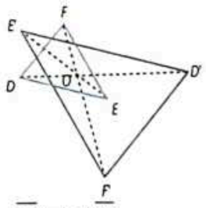
b) Área do $\triangle$ [ABC] – 20 cm^2
Área do $\triangle$ [A'B'C'] – 80 cm^2
A relação entre as áreas é de 1 para 4, ou seja, a área do triângulo à imagem é quádrupla da do triângulo objecto.

9. a)



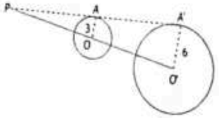
b) $\overline{AB'} = 13{,}5$ cm; $\overline{D'C'} = 9$ cm
$\overline{AD'} = 6$ cm;
$\overline{B'C'} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2} = 7{,}5$ cm

10.



$\overline{OD'} = |-2|\,\overline{OD}$

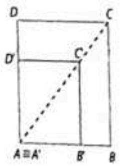
11. a) $\overline{PO'} = 2 \cdot \overline{PO}$
$\overline{PA'} = 2 \cdot \overline{PA}$
$\overline{O'A'} = 2 \cdot \overline{OA}$



b) Uma circunferência concêntrica (com a original) e raio 7,5 cm.

c) Uma circunferência coincidente com a da alínea anterior.

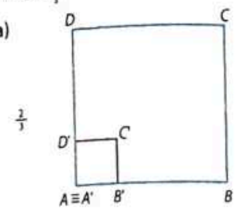
12. b)



$H_{A,\frac{2}{3}}$ [ABCD] = [A'B'C'D']

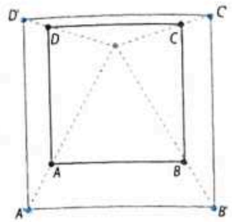
b) $H_{A,-\frac{2}{3}}$ [ABCD] = [A'B'C'D']

13. a)



Utilizou-se a homotetia $H_{A,\frac{1}{4}}$

b)



Utilizou-se a homotetia $H_{O,\frac{2}{?}}$.

14. a) Há mais homens. b) 64

15. a) 4 e 1,5; 5 e 0,3; 8 e 21
b) 0,5 e 12; 3 e 0,5; 7 e 24
c) 0,5 e 1,5; 3 e 0,3; 7 e 21
d) 4 e 12; 5 e 0,5; 8 e 24

16. a) 2,5 b) 16 c) 36 d) 40

17. 5 000 km

18. a) 20,4 kg
b) 5 → Em cada refeição, gasta-se 0,2 kg de carne.

Exercícios de consolidação pp. 184 e 185

19 • $x = 9$ m; $y = 6$ m

20 • São, porque têm dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

21 • $\hat{x} = 60°$; $\hat{y} = 40°$; $\hat{z} = 25°$

22 • a) $x = 7{,}5$ cm b) $x = 20$ cm

23 • a) Porque $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ são ângulos verticalmente opostos. $B\hat{A}C = C\hat{E}D$ são ângulos agudos de lados paralelos. Logo, os triângulos têm dois ângulos iguais.

b) $\overline{CE} = 6$ cm; $\overline{CB} = 6$ cm

24 • 6,25 m; 5 m

25 • a) 4 b) 16

26 • a) 8 b) 8

27 • 26 cm; 24 cm; 30 cm

28 • $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{3}$

29 • A = 1312,5 cm^2

30 • a) São: $\frac{10}{30} = \frac{6}{18} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$
b) O triângulo deve ter lados, em centímetros: 12; 9,6; 7,2

31 • b) $\overline{BN} = 4{,}5$ cm; $\overline{MN} = 6{,}75$ cm

32 • Porque $\frac{5}{8{,}6}$ $\frac{6}{10}$

33 • a) 36 cm b) 18 cm

Teste final pp. 186 e 187

1.ª Parte

1 • C. 2 • C. 3 • D. 4 • A. 5 • B. 6 • C. 7 • B.

2.ª Parte

1 • Por exemplo: um triângulo com as amplitudes dos ângulos iguais às amplitudes dos ângulos do $\triangle$[MAR] e cujos lados meçam o dobro dos do $\triangle$[MAR].

2 • a.1) $A\hat{L}U$; $R\hat{O}I$; $L\hat{U}A$ a.2) $\overline{LU}$; $\overline{IO}$; $\overline{LA}$
b) $\overline{LU} = 2$ cm; $\overline{UA} = 2{,}5$ cm; $\overline{LA} = 3{,}5$ cm

3 • a) Porque são ângulos verticalmente opostos. Porque são ângulos agudos de lados paralelos. Porque têm dois ângulos iguais.
b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{25}$

4 • 125 cm^2 5 • 8

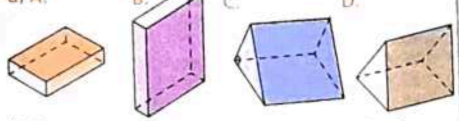
Unidade 9 – Cálculo de áreas e de volume de sólidos geométricos

Exercícios de consolidação p. 198

1. 12 vértices; 18 arestas 2. 6 vértices; 6 faces

3. a) 14 vértices; 9 faces b) 8 vértices

4 • a) A. B. C. D.



b) F = 5; V = G; A = 9; 5 + 6 = 9 + 2

5 • a) $A_{\square} = 36$ cm^2
$A_{\square} = 27$ cm^2
b) $A_{cubo} = 216$ cm^2
$A_{paralelepípedo} = 316{,}5$ cm^2
c) $V_{cubo} = 216$ cm^3
$V_{paralelepípedo} = 337{,}5$ cm^3

6 • a) $A_T = 950$ cm^2 b) $V = 1500$ cm^3

7 • a) 26 x b) 26 cm^3; 78 cm^3 c) É.

8 • a) 390 cm^2 b) 731,8 cm^3

9 • É 27 vezes maior; é 9 vezes maior.

10 • $V = 384$ cm^3

Exercícios de consolidação p. 207

11. A. Planificação de um prisma triangular.
B. Não é porque os segmentos indicados ao lado não têm igual comprimento.
C. Planificação de um cilindro.
D. Não é porque o perímetro da base é diferente do comprimento do rectângulo.

12 • $V = 50{,}2$ cm^3 (1 c.d.)
$A_L = 62{,}8$ cm^2 (1 c.d.)

13 • a) 700π cm^2 b) $V = 6195{,}3$ cm^3 (1 c.d.)

14 • Superfície lateral do cone com ângulo de 90° e geratriz 12 cm; 18 cones.

15 • $\overline{ED} = \frac{60}{7}$ cm; $\overline{EC} = 9{,}46$ cm;
$\overline{EB} = 26$ cm; 152°

16 • a) $d \approx 42$ cm b) $V \approx 38\,792$ cm^3

17 • a) 1675,5 dm^3 b) 5 latas

18 • a) 150 cm^3 b) 1725 cm^3 c) $\frac{2}{3}$

Teste final pp. 208 e 209

1.ª Parte

1 • D. 2 • C. 3 • B. 4 • B. 5 • A. 6 • A.

2.ª Parte

1 • a) 12,4 m^2 b) 7 latas c) 2,47 m^3 (2 c.d.)

2 • $A_L = 85\,836$ m^2
$V = 2\,592\,100$ m^3

3 • a) 1022 cm^3 b) Mais tinta azul

4 • a) Não, leva 1 131 l b) 4,79 m^2 (2 c.d.)

Tabelas de n; n^2; n^3; $\sqrt{n}$; $\sqrt[3]{n}$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000
2	4	8	1,4142	1,2599
3	9	27	1,7321	1,4422
4	16	64	2,0000	1,5874
5	25	125	2,2361	1,7100
6	36	216	2,4495	1,8171
7	49	343	2,6458	1,9129
8	64	512	2,8284	2,0000
9	81	729	3,0000	2,0801
10	100	1000	3,1623	2,1544
11	121	1331	3,3166	2,2240
12	144	1728	3,4641	2,2894
13	169	2197	3,6056	2,3513
14	196	2744	3,7417	2,4101
15	225	3375	3,8730	2,4662
16	256	4096	4,0000	2,5198
17	289	4913	4,1231	2,5713
18	324	5832	4,2426	2,6207
19	361	6859	4,3589	2,6684
20	400	8000	4,4721	2,7144
21	441	9261	4,5826	2,7589
22	484	10648	4,6904	2,8020
23	529	12167	4,7958	2,8439
24	576	13824	4,8990	2,8845
25	625	15625	5,0000	2,9240
26	676	17576	5,0990	2,9625
27	729	19683	5,1962	3,0000
28	784	21952	5,2915	3,0366
29	841	24389	5,3852	3,0723
30	900	27000	5,4772	3,1072
31	961	29791	5,5678	3,1414
32	1024	32768	5,6569	3,1748
33	1089	35937	5,7446	3,2075
34	1156	39304	5,8310	3,2396
35	1225	42875	5,9161	3,2711
36	1296	46656	6,0000	3,3019
37	1369	50653	6,0828	3,3322
38	1444	54872	6,1644	3,3620
39	1521	59319	6,2450	3,3912
40	1600	64000	6,3246	3,4200
41	1681	68921	6,4031	3,4482
42	1764	74088	6,4807	3,4760
43	1849	79507	6,5574	3,5034
44	1936	85184	6,6332	3,5303
45	2025	91125	6,7082	3,5569
46	2116	97336	6,7823	3,5830
47	2209	103823	6,8557	3,6088
48	2304	110592	6,9282	3,6342
49	2401	117649	7,0000	3,6593
50	2500	125000	7,0711	3,6840

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
51	2601	132651	7,1414	3,7084
52	2704	140608	7,2111	3,7325
53	2809	148877	7,2801	3,7563
54	2916	157464	7,3485	3,7798
55	3025	166375	7,4162	3,8030
56	3136	175616	7,4833	3,8259
57	3249	185193	7,5498	3,8485
58	3364	195112	7,6158	3,8709
59	3481	205379	7,6811	3,8930
60	3600	216000	7,7460	3,9149
61	3721	226981	7,8102	3,9365
62	3844	238328	7,8740	3,9579
63	3969	250047	7,9373	3,9791
64	4096	262144	8,0000	4,0000
65	4225	274625	8,0623	4,0207
66	4356	287496	8,1240	4,0412
67	4489	300763	8,1854	4,0615
68	4624	314432	8,2462	4,0817
69	4761	328509	8,3066	4,1016
70	4900	343000	8,3666	4,1213
71	5041	357911	8,4261	4,1408
72	5184	373248	8,4853	4,1602
73	5329	389017	8,5440	4,1793
74	5476	405224	8,6023	4,1983
75	5625	421875	8,6603	4,2172
76	5776	438976	8,7178	4,2358
77	5929	456533	8,7750	4,2543
78	6084	474552	8,8318	4,2727
79	6241	493039	8,8882	4,2908
80	6400	512000	8,9443	4,3089
81	6561	531441	9,0000	4,3267
82	6724	551368	9,0554	4,3445
83	6889	571787	9,1104	4,3621
84	7056	592704	9,1652	4,3795
85	7225	614125	9,2195	4,3968
86	7396	636056	9,2736	4,4140
87	7569	658503	9,3274	4,4310
88	7744	681472	9,3808	4,4480
89	7921	704969	9,4340	4,4647
90	8100	729000	9,4868	4,4814
91	8281	753571	9,5394	4,4979
92	8464	778688	9,5917	4,5144
93	8649	804357	9,6437	4,5307
94	8836	830584	9,6954	4,5468
95	9025	857375	9,7468	4,5629
96	9216	884736	9,7980	4,5789
97	9409	912673	9,8489	4,5947
98	9604	941192	9,8995	4,6104
99	9801	970299	9,9499	4,6261
100	10000	1000000	10,0000	4,6416

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
101	10201	1030301	10,0499	4,6570
102	10404	1061208	10,0995	4,6723
103	10609	1092727	10,1489	4,6875
104	10816	1124864	10,1980	4,7027
105	11025	1157625	10,2470	4,7177
106	11236	1191016	10,2956	4,7326
107	11449	1225043	10,3441	4,7475
108	11664	1259712	10,3923	4,7622
109	11881	1295029	10,4403	4,7769
110	12100	1331000	10,4881	4,7914
111	12321	1367631	10,5357	4,8059
112	12544	1404928	10,5830	4,8203
113	12769	1442897	10,6301	4,8346
114	12996	1481544	10,6771	4,8488
115	13225	1520875	10,7238	4,8629
116	13456	1560896	10,7703	4,8770
117	13689	1601613	10,8167	4,8910
118	13924	1643032	10,8628	4,9049
119	14161	1685159	10,9087	4,9187
120	14400	1728000	10,9545	4,9324
121	14641	1771561	11,0000	4,9461
122	14884	1815848	11,0454	4,9597
123	15129	1860867	11,0905	4,9732
124	15376	1906624	11,1355	4,9866
125	15625	1953125	11,1803	5,0000
126	15876	2000376	11,2250	5,0133
127	16129	2048383	11,2694	5,0265
128	16384	2097152	11,3137	5,0397
129	16641	2146689	11,3578	5,0528
130	16900	2197000	11,4018	5,0658
131	17161	2248091	11,4455	5,0788
132	17424	2299968	11,4891	5,0916
133	17689	2352637	11,5326	5,1045
134	17956	2406104	11,5758	5,1172
135	18225	2460375	11,6190	5,1299
136	18496	2515456	11,6619	5,1426
137	18769	2571353	11,7047	5,1551
138	19044	2628072	11,7473	5,1676
139	19321	2685619	11,7898	5,1801
140	19600	2744000	11,8322	5,1925
141	19881	2803221	11,8743	5,2048
142	20164	2863288	11,9164	5,2171
143	20449	2924207	11,9583	5,2293
144	20736	2985984	12,0000	5,2415
145	21025	3048625	12,0416	5,2536
146	21316	3112136	12,0830	5,2656
147	21609	3176523	12,1244	5,2776
148	21904	3241792	12,1655	5,2896
149	22201	3307949	12,2066	5,3015
150	22500	3375000	12,2474	5,3133

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
151	22801	3442951	12,2882	5,3251
152	23104	3511808	12,3288	5,3368
153	23409	3581577	12,3693	5,3485
154	23716	3652264	12,4097	5,3601
155	24025	3723875	12,4499	5,3717
156	24336	3796416	12,4900	5,3832
157	24649	3869893	12,5300	5,3947
158	24964	3944312	12,5698	5,4061
159	25281	4019679	12,6095	5,4175
160	25600	4096000	12,6491	5,4288
161	25921	4173281	12,6886	5,4401
162	26244	4251528	12,7279	5,4514
163	26569	4330747	12,7671	5,4626
164	26896	4410944	12,8062	5,4737
165	27225	4492125	12,8452	5,4848
166	27556	4574296	12,8841	5,4959
167	27889	4657463	12,9228	5,5069
168	28224	4741632	12,9615	5,5178
169	28561	4826809	13,0000	5,5288
170	28900	4913000	13,0384	5,5397
171	29241	5000211	13,0767	5,5505
172	29584	5088448	13,1149	5,5613
173	29929	5177717	13,1529	5,5721
174	30276	5268024	13,1909	5,5828
175	30625	5359375	13,2288	5,5934
176	30976	5451776	13,2665	5,6041
177	31329	5545233	13,3041	5,6147
178	31684	5639752	13,3417	5,6252
179	32041	5735339	13,3791	5,6357
180	32400	5832000	13,4164	5,6462
181	32761	5929741	13,4536	5,6567
182	33124	6028568	13,4907	5,6671
183	33489	6128487	13,5277	5,6774
184	33856	6229504	13,5647	5,6877
185	34225	6331625	13,6015	5,6980
186	34596	6434856	13,6382	5,7083
187	34969	6539203	13,6748	5,7185
188	35344	6644672	13,7113	5,7287
189	35721	6751269	13,7477	5,7388
190	36100	6859000	13,7840	5,7489
191	36481	6967871	13,8203	5,7590
192	36864	7077888	13,8564	5,7690
193	37249	7189057	13,8924	5,7790
194	37636	7301384	13,9284	5,7890
195	38025	7414875	13,9642	5,7989
196	38416	7529536	14,0000	5,8088
197	38809	7645373	14,0357	5,8186
198	39204	7762392	14,0712	5,8285
199	39601	7880599	14,1067	5,8383
200	40000	8000000	14,1421	5,8480

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
201	40401	8120601	4,1774	5,8578
202	40804	8242408	4,2127	5,8675
203	41209	8365427	4,2478	5,8771
204	41616	8489664	4,2829	5,8868
205	42025	8615125	4,3178	5,8964
206	42436	8741816	4,3527	5,9059
207	42849	8869743	4,3875	5,9155
208	43264	8998912	4,4222	5,9250
209	43681	9129329	4,4568	5,9345
210	44100	9261000	4,4914	5,9439
211	44521	9393931	4,5258	5,9533
212	44944	9528128	4,5602	5,9627
213	45369	9663597	4,5945	5,9721
214	45796	9800344	4,6287	5,9814
215	46225	9938375	4,6629	5,9907
216	46656	10077696	4,6969	6,0000
217	47089	10218313	4,7309	6,0092
218	47524	10360232	4,7648	6,0185
219	47961	10503459	4,7986	6,0277
220	48400	10648000	4,8324	6,0368
221	48841	10793861	4,8661	6,0459
222	49284	10941048	4,8997	6,0550
223	49729	11089567	4,9332	6,0641
224	50176	11239424	4,9666	6,0732
225	50625	11390625	5,0000	6,0822
226	51076	11543176	5,0333	6,0912
227	51529	11697083	5,0665	6,1002
228	51984	11852352	5,0997	6,1091
229	52441	12008989	5,1327	6,1180
230	52900	12167000	5,1658	6,1269
231	53361	12326391	5,1987	6,1358
232	53824	12487168	5,2315	6,1446
233	54289	12649337	5,2643	6,1534
234	54756	12812904	5,2971	6,1622
235	55225	12977875	5,3297	6,1710
236	55696	13144256	5,3623	6,1797
237	56169	13312053	5,3948	6,1885
238	56644	13481272	5,4272	6,1972
239	57121	13651919	5,4596	6,2058
240	57600	13824000	5,4919	6,2145
241	58081	13997521	5,5242	6,2231
242	58564	14172488	5,5563	6,2317
243	59049	14348907	5,5885	6,2403
244	59536	14526784	5,6205	6,2488
245	60025	14706125	5,6525	6,2573
246	60516	14886936	5,6844	6,2658
247	61009	15069223	5,7162	6,2743
248	61504	15252992	5,7480	6,2828
249	62001	15438249	5,7797	6,2912
250	62500	15625000	5,8114	6,2996

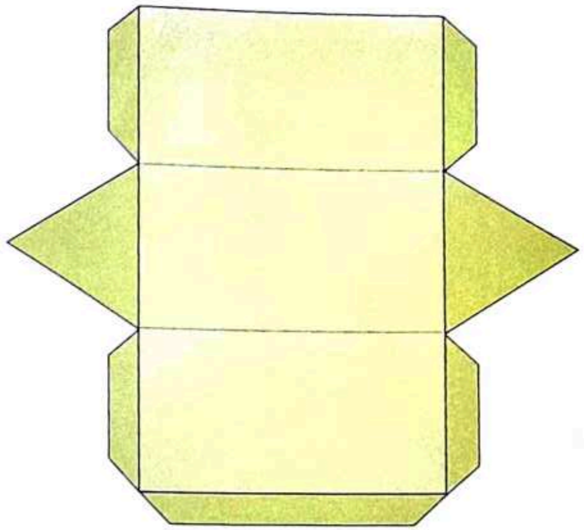
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
251	63001	15813251	15,8430	6,3080
252	63504	16003008	15,8745	6,3164
253	64009	16194277	15,9060	6,3247
254	64516	16387064	15,9374	6,3330
255	65025	16581375	15,9687	6,3413
256	65536	16777216	16,0000	6,3496
257	66049	16974593	16,0312	6,3579
258	66564	17173512	16,0624	6,3661
259	67081	17373979	16,0935	6,3743
260	67600	17576000	16,1245	6,3825
261	68121	17779581	16,1555	6,3907
262	68644	17984728	16,1864	6,3988
263	69169	18191447	16,2173	6,4070
264	69696	18399744	16,2481	6,4151
265	70225	18609625	16,2788	6,4232
266	70756	18821096	16,3095	6,4312
267	71289	19034163	16,3401	6,4393
268	71824	19248832	16,3707	6,4473
269	72361	19465109	16,4012	6,4553
270	72900	19683000	16,4317	6,4633
271	73441	19902511	16,4621	6,4713
272	73984	20123648	16,4924	6,4792
273	74529	20346417	16,5227	6,4872
274	75076	20570824	16,5529	6,4951
275	75625	20796875	16,5831	6,5030
276	76176	21024576	16,6132	6,5108
277	76729	21253933	16,6433	6,5187
278	77284	21484952	16,6733	6,5265
279	77841	21717639	16,7033	6,5343
280	78400	21952000	16,7332	6,5421
281	78961	22188041	16,7631	6,5499
282	79524	22425768	16,7929	6,5577
283	80089	22665187	16,8226	6,5654
284	80656	22906304	16,8523	6,5731
285	81225	23149125	16,8819	6,5808
286	81796	23393656	16,9115	6,5885
287	82369	23639903	16,9411	6,5962
288	82944	23887872	16,9706	6,6039
289	83521	24137569	17,0000	6,6115
290	84100	24389000	17,0294	6,6191
291	84681	24642171	17,0587	6,6267
292	85264	24897088	17,0880	6,6343
293	85849	25153757	17,1172	6,6419
294	86436	25412184	17,1464	6,6494
295	87025	25672375	17,1756	6,6569
296	87616	25934336	17,2047	6,6644
297	88209	26198073	17,2337	6,6719
298	88804	26463592	17,2627	6,6794
299	89401	26730899	17,2916	6,6869
300	90000	27000000	17,3205	6,6943

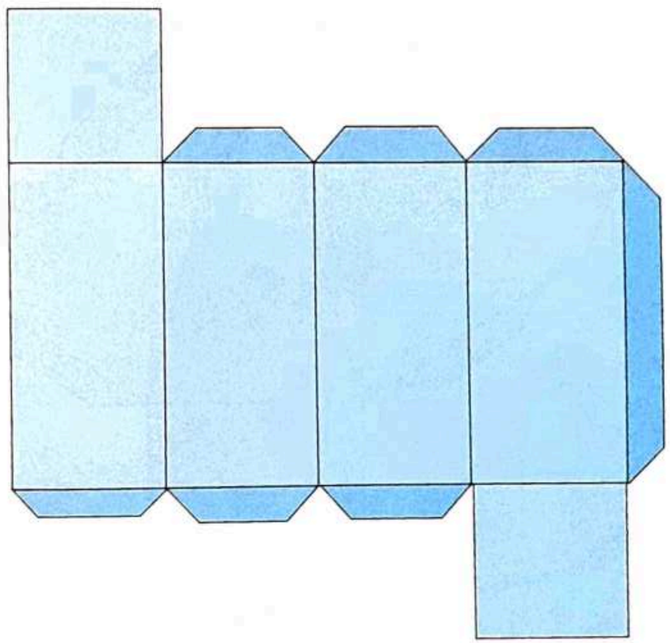
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
401	160801	64481201	20,0250	7,3742
402	161604	64964808	20,0499	7,3803
403	162409	65450827	20,0749	7,3864
404	163216	65939264	20,0998	7,3925
405	164025	66430125	20,1246	7,3986
406	164836	66923416	20,1494	7,4047
407	165649	67419143	20,1742	7,4108
408	166464	67917312	20,1990	7,4169
409	167281	68417929	20,2237	7,4229
410	168100	68921000	20,2485	7,4290
411	168921	69426531	20,2731	7,4350
412	169744	69934528	20,2978	7,4410
413	170569	70444997	20,3224	7,4470
414	171396	70957944	20,3470	7,4530
415	172225	71473375	20,3715	7,4590
416	173056	71991296	20,3961	7,4650
417	173889	72511713	20,4206	7,4710
418	174724	73034632	20,4450	7,4770
419	175561	73560059	20,4695	7,4829
420	176400	74088000	20,4939	7,4889
421	177241	74618461	20,5183	7,4948
422	178084	75151448	20,5426	7,5007
423	178929	75686967	20,5670	7,5067
424	179776	76225024	20,5913	7,5126
425	180625	76765625	20,6155	7,5185
426	181476	77308776	20,6398	7,5244
427	182329	77854483	20,6640	7,5302
428	183184	78402752	20,6882	7,5361
429	184041	78953589	20,7123	7,5420
430	184900	79507000	20,7364	7,5478
431	185761	80062991	20,7605	7,5537
432	186624	80621568	20,7846	7,5595
433	187489	81182737	20,8087	7,5654
434	188356	81746504	20,8327	7,5712
435	189225	82312875	20,8567	7,5770
436	190096	82881856	20,8806	7,5828
437	190969	83453453	20,9045	7,5886
438	191844	84027672	20,9284	7,5944
439	192721	84604519	20,9523	7,6001
440	193600	85184000	20,9762	7,6059
441	194481	85766121	21,0000	7,6117
442	195364	86350888	21,0238	7,6174
443	196249	86938307	21,0476	7,6232
444	197136	87528384	21,0713	7,6289
445	198025	88121125	21,0950	7,6346
446	198916	88716536	21,1187	7,6403
447	199809	89314623	21,1424	7,6460
448	200704	89915392	21,1660	7,6517
449	201601	90518849	21,1896	7,6574
450	202500	91125000	21,2132	7,6631

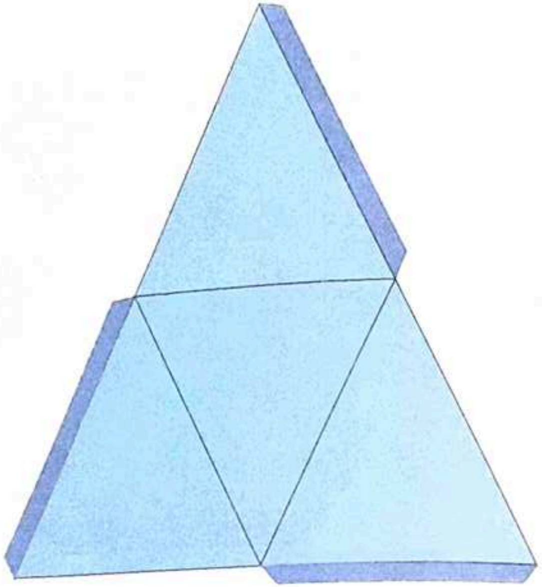
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
451	203401	91733851	21,2368	7,6688
452	204304	92345408	21,2603	7,6744
453	205209	92959677	21,2838	7,6801
454	206116	93576664	21,3073	7,6857
455	207025	94196375	21,3307	7,6914
456	207936	94818816	21,3542	7,6970
457	208849	95443993	21,3776	7,7026
458	209764	96071912	21,4009	7,7082
459	210681	96702579	21,4243	7,7138
460	211600	97336000	21,4476	7,7194
461	212521	97972181	21,4709	7,7250
462	213444	98611128	21,4942	7,7306
463	214369	99252847	21,5174	7,7362
464	215296	99897344	21,5407	7,7418
465	216225	100544625	21,5639	7,7473
466	217156	101194696	21,5870	7,7529
467	218089	101847563	21,6102	7,7584
468	219024	102503232	21,6333	7,7639
469	219961	103161709	21,6564	7,7695
470	220900	103823000	21,6795	7,7750
471	221841	104487111	21,7025	7,7805
472	222784	105154048	21,7256	7,7860
473	223729	105823817	21,7486	7,7915
474	224676	106496424	21,7715	7,7970
475	225625	107171875	21,7945	7,8025
476	226576	107850176	21,8174	7,8079
477	227529	108531333	21,8403	7,8134
478	228484	109215352	21,8632	7,8188
479	229441	109902239	21,8861	7,8243
480	230400	110592000	21,9089	7,8297
481	231361	111284641	21,9317	7,8352
482	232324	111980168	21,9545	7,8406
483	233289	112678587	21,9773	7,8460
484	234256	113379904	22,0000	7,8514
485	235225	114084125	22,0227	7,8568
486	236196	114791256	22,0454	7,8622
487	237169	115501303	22,0681	7,8676
488	238144	116214272	22,0907	7,8730
489	239121	116930169	22,1133	7,8784
490	240100	117649000	22,1359	7,8837
491	241081	118370771	22,1585	7,8891
492	242064	119095488	22,1811	7,8944
493	243049	119823157	22,2036	7,8998
494	244036	120553784	22,2261	7,9051
495	245025	121287375	22,2486	7,9105
496	246016	122023936	22,2711	7,9158
497	247009	122763473	22,2935	7,9211
498	248004	123505992	22,3159	7,9264
499	249001	124251499	22,3383	7,9317
500	250000	125000000	22,3607	7,9370

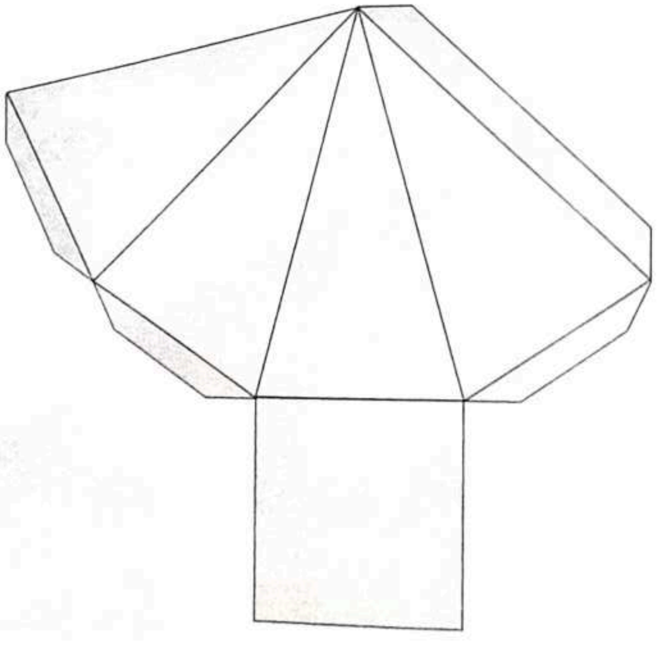
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
301	90601	27270901	17,3494	6,7018
302	91204	27543608	17,3781	6,7092
303	91809	27818127	17,4069	6,7166
304	92416	28094464	17,4356	6,7240
305	93025	28372625	17,4642	6,7313
306	93636	28652616	17,4929	6,7387
307	94249	28934443	17,5214	6,7460
308	94864	29218112	17,5499	6,7533
309	95481	29503629	17,5784	6,7606
310	96100	29791000	17,6068	6,7679
311	96721	30080231	17,6352	6,7752
312	97344	30371328	17,6635	6,7824
313	97969	30664297	17,6918	6,7897
314	98596	30959144	17,7200	6,7969
315	99225	31255875	17,7482	6,8041
316	99856	31554496	17,7764	6,8113
317	100489	31855013	17,8045	6,8185
318	101124	32157432	17,8326	6,8256
319	101761	32461759	17,8606	6,8328
320	102400	32768000	17,8885	6,8399
321	103041	33076161	17,9165	6,8470
322	103684	33386248	17,9444	6,8541
323	104329	33698267	17,9722	6,8612
324	104976	34012224	18,0000	6,8683
325	105625	34328125	18,0278	6,8753
326	106276	34645976	18,0555	6,8824
327	106929	34965783	18,0831	6,8894
328	107584	35287552	18,1108	6,8964
329	108241	35611289	18,1384	6,9034
330	108900	35937000	18,1659	6,9104
331	109561	36264691	18,1934	6,9174
332	110224	36594368	18,2209	6,9244
333	110889	36926037	18,2483	6,9313
334	111556	37259704	18,2757	6,9382
335	112225	37595375	18,3030	6,9451
336	112896	37933056	18,3303	6,9521
337	113569	38272753	18,3576	6,9589
338	114244	38614472	18,3848	6,9658
339	114921	38958219	18,4120	6,9727
340	115600	39304000	18,4391	6,9795
341	116281	39651821	18,4662	6,9864
342	116964	40001688	18,4932	6,9932
343	117649	40353607	18,5203	7,0000
344	118336	40707584	18,5472	7,0068
345	119025	41063625	18,5742	7,0136
346	119716	41421736	18,6011	7,0203
347	120409	41781923	18,6279	7,0271
348	121104	42144192	18,6548	7,0338
349	121801	42508549	18,6815	7,0406
350	122500	42875000	18,7083	7,0473

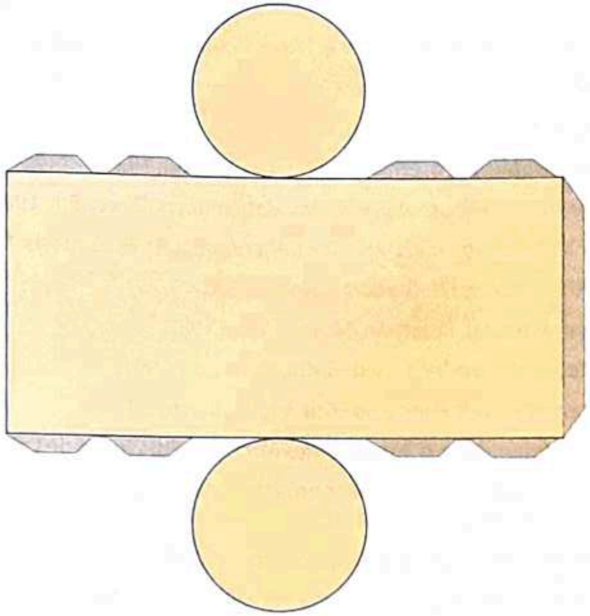
n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
351	123201	43243551	18,7350	7,0540
352	123904	43614208	18,7617	7,0607
353	124609	43986977	18,7883	7,0674
354	125316	44361864	18,8149	7,0740
355	126025	44738875	18,8414	7,0807
356	126736	45118016	18,8680	7,0873
357	127449	45499293	18,8944	7,0940
358	128164	45882712	18,9209	7,1006
359	128881	46268279	18,9473	7,1072
360	129600	46656000	18,9737	7,1138
361	130321	47045881	19,0000	7,1204
362	131044	47437928	19,0263	7,1269
363	131769	47832147	19,0526	7,1335
364	132496	48228544	19,0788	7,1400
365	133225	48627125	19,1050	7,1466
366	133956	49027896	19,1311	7,1531
367	134689	49430863	19,1572	7,1596
368	135424	49836032	19,1833	7,1661
369	136161	50243409	19,2094	7,1726
370	136900	50653000	19,2354	7,1791
371	137641	51064811	19,2614	7,1855
372	138384	51478848	19,2873	7,1920
373	139129	51895117	19,3132	7,1984
374	139876	52313624	19,3391	7,2048
375	140625	52734375	19,3649	7,2112
376	141376	53157376	19,3907	7,2177
377	142129	53582633	19,4165	7,2240
378	142884	54010152	19,4422	7,2304
379	143641	54439939	19,4679	7,2368
380	144400	54872000	19,4936	7,2432
381	145161	55306341	19,5192	7,2495
382	145924	55742968	19,5448	7,2558
383	146689	56181887	19,5704	7,2622
384	147456	56623104	19,5959	7,2685
385	148225	57066625	19,6214	7,2748
386	148996	57512456	19,6469	7,2811
387	149769	57960603	19,6723	7,2874
388	150544	58411072	19,6977	7,2936
389	151321	58863869	19,7231	7,2999
390	152100	59319000	19,7484	7,3061
391	152881	59776471	19,7737	7,3124
392	153664	60236288	19,7990	7,3186
393	154449	60698457	19,8242	7,3248
394	155236	61162984	19,8494	7,3310
395	156025	61629875	19,8746	7,3372
396	156816	62099136	19,8997	7,3434
397	157609	62570773	19,9249	7,3496
398	158404	63044792	19,9499	7,3558
399	159201	63521199	19,9750	7,3619
400	160000	64000000	20,0000	7,3681

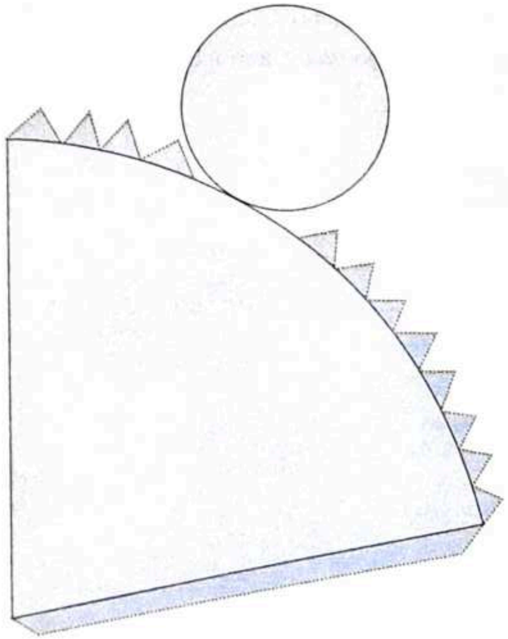












Azcarate, Carmen. *et al. Funciones y Gráficos*, Ed. Sintesis, Madrid.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-7.ª Ano*, Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lisboa, 2006.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-8.ª Ano*, Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lisboa, 2007.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-9.ª Ano*, Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lisboa, 2004.

Bennett & Nelson. *Mathematics: an Informal Approach*, Ed. Allyn and Bacon.

Boyer, C. *História da Matemática*, Ed. Blucher Lda., S. Paulo, 1974.

Bunt, Lucas. et al. *Historical Roots of Elementar Mathematics*. Dover Ed., 1988.

Català, Cláudia. *et al. Invitation a la Didáctica de la Geometria*, Ed. Sintesis, Madrid, 1992.

Gardner. Martin. *Ah Descobri*, Ed. Gradiva, Lisboa, 1990.

Jacobs, Harold. *Geometry*, Ed. Freeman, Nova Iorque, 1987.

Lander, Isidoro. *Magia Matemática*, Texto Editora. Lisboa, 1991.

Malba Tahan. *Matemática na Lenda e na História*. Ed. Bloch, S. Paulo.

Masini, Giancarlo. *A Matemática: o Romance dos Números*, Ed. Círculo de Leitores, Lisboa, 1979.

National Council Of Teachers Of Mathematics, *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*, APM, Lisboa, 1991.

Perelman, Y. *Matemática Recreativa*, Ed. Mir, Moscovo, 1989.

Radice, L. *A Matemática de Pitágoras a Newton*, Ed.70, Lisboa, 1988.

Rino, João; Jacobetty, Rosa. *Contar com a Matemática-8. Ano*. Texto Editora, LDA. Lisboa, 1996.

Struik.D. *História Concisa das Matemáticas*. Ed. Gradiva, Lisboa, 1989.

Vizmanos.J.*et al. Matemática: Algoritmo 1*. Bup 1, Ed. SM, Madrid, 1990.

Zeferino Martins

Mestre em Estudos da População pela Universidade de Legon - Gana, concluiu os Estudos Avançados em Planificação da Educação (UNESCO – Paris) e é Bacharel pela Universidade Eduardo Mondlane em Matemática Pura – Ramo Educacional.

Professor dos ensinos Primário, Secundário, Técnico-profissional e Superior, onde leccionou Matemática, Álgebra Linear e Geometria Analítica, Estatística, Métodos Quantitativos e Demografia na Universidade Eduardo Mondlane, Instituto Superior de Relações Internacionais, A Politécnica e Universidade Pedagógica.

Foi Consultor da UNESCO na Guiné-Bissau e em Angola. Foi, também, técnico e Chefe de Departamento de Currículo, Director do INDE, Director Nacional do Ensino Básico, Vice-Ministro da Educação, Secretário Executivo Adjunto da CPLP, Director-Geral da Comissão Executiva da Reforma da Educação Profissional (COREP) e Ministro da Educação.

Tem vários livros e artigos publicados e é autor de livros escolares.

8.ª Classe

Biologia[1]
978-902-47-5935 4
Física[1]
978-902-47-5933 0
Geografia[1]
978-902-47-5937 8
História[1]
978-902-47-5934 7
Matemática[1]
978-902-47-5939 2
Português[1]
978-902-47-5940 8
Química[1]
978-902-47-5938 5
Agro-Pecuária[2]
978-902-47-5948 4
Educação Visual[2]
978-902-47-5932 3
Inglês[2]
978-902-47-5936 1

9.ª Classe

Física[1]
978-902-47-5945 3
Geografia[1]
978-902-47-5946 0
História[1]
978-902-47-5947 7
Matemática[1]
978-902-47-5924 8
Português[1]
978-902-47-5950 7
Química[1]
978-902-47-5944 6
Empreendedorismo[1]
978-902-47-5920 0
Agro-Pecuária[2]
978-902-47-5949 1
Biologia[2]
978-902-47-5942 2
Educação Visual[2]
978-902-47-5941 5
Inglês[2]
978-902-47-5943 9

10.ª Classe

Agro-Pecuária[1]
978-902-47-5472 4
Física[1]
978-902-47-5469 4
Geografia[1]
978-902-47-5468 7
História[1]
978-902-47-5466 3
Matemática[1]
978-902-47-5496 0
Empreendedorismo[1]
978-902-47-5471 7
Química[1]
978-902-47-5465 6
Tecnologias de Informação e Comunicação[1]
978-902-47-5470 0
Biologia[2]
978-902-47-5467 0
Educação Visual[2]
978-902-47-5463 2
Inglês[2]
978-902-47-5464 9
Português[2]
978-902-47-5430 4

[1] Livros no sistema de ensino
[2] Livros de apoio e consulta