Vasco Cuambe

M10

Matemática 10.ª Classe

Texto Editores

f i c h a t é c n i c a

título	**M10 • Matemática 10.ª Classe**
autor	**Vasco Cuambe**
coordenação	**Stella Morgadinho**
editor	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
capa	**Dércio Simango**
ilustrações	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
arranjo gráfico	**Darlene Mavale e Dércio Simango**
paginação	**Arlindo Pais Uamusse**
pré-impressão	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
impressão e acabamentos	**Texto Editores**

Texto Editores

Av. Para o Palmar Q. 35, n.º 141A • Sommerchield II • Maputo • Moçambique
Tel: (+258) 21 49 73 04
Fax: (+258) 21 49 73 05
Cels: (+258) 82 326 1460 • (+258) 84 326 1460
E-mail: info@me.co.mz

MAPUTO, MARÇO de 2017 • 2.ª EDIÇÃO • 3.ª TIRAGEM • REGISTADO NO INLD SOB O NÚMERO: 6451/RLINLD/10

Vasco Cuambe

M10

Matemática 10.ª Classe

Texto Editores

Prefácio

O presente livro baseou-se nas orientações sugeridas pelo reajustamento dos novos programas.

A motivação a partir do que é concreto e intuitivo é muito importante para que os alunos sintam que estão a construir Matemática. Os temas são tratados de uma forma gradual, mas dinâmica, partindo da experimentação para a formalização dos conhecimentos.

Aprender a pensar e a raciocinar correctamente são objectivos a atingir na 10.ª Classe. Para ajudar a alcançar este objectivo, apresentam-se várias situações, umas que relacionam a Matemática com o quotidiano e com as outras ciências, outras de treino que têm como objectivo colmatar dificuldades e esclarecer dúvidas.

Os exercícios devem ser resolvidos gradualmente, ao longo do ano lectivo, acompanhando o decorrer da matéria.

Apresentam-se várias questões de escolha múltipla, que devem ser lidas com muita atenção e sem precipitações. Nas outras questões, ditas de resposta aberta, devem ser apresentados os raciocínios e as justificações que julgar necessárias.

Contamos com o apoio e a colaboração do professor para decidir, consoante as características da turma, quais devem ser resolvidas em grupo, em díade ou individualmente, apoiando e incentivando os alunos a interpretar as situações dadas e a realizar as tarefas propostas.

A referência à História da Matemática tem como objectivo mostrar como a Matemática tem vindo a interferir no progresso da Humanidade e dar a conhecer alguns matemáticos cujas contribuições foram fundamentais para esse mesmo progresso.

Nas páginas finais terá as soluções de todos os exercícios e a Tabela de valores naturais.

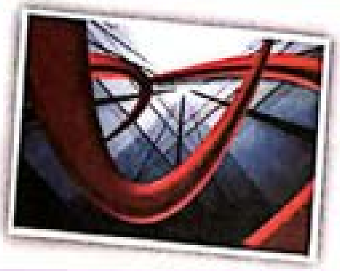
Não podemos deixar de salientar que só o próprio aluno, com o seu esforço e a sua capacidade de reformular estratégias até chegar à solução correcta, pode atingir os seus objectivos.

Esperamos que este livro seja uma boa ajuda, tanto como instrumento de trabalho, como de incentivo ao espírito de pesquisa e de descoberta do prazer de estudar Matemática.

O autor

Unidade 1: Teoria de conjuntos

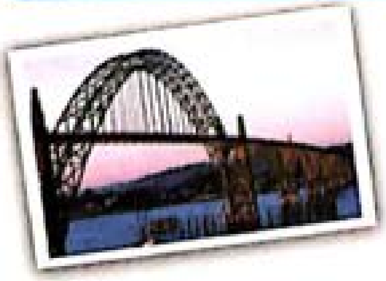
Unidade 2: Equações quadráticas paramétricas simples



Unidade 3: Equações biquadradas

Unidade 4: Função quadrática

Unidade 5: Inequações quadráticas

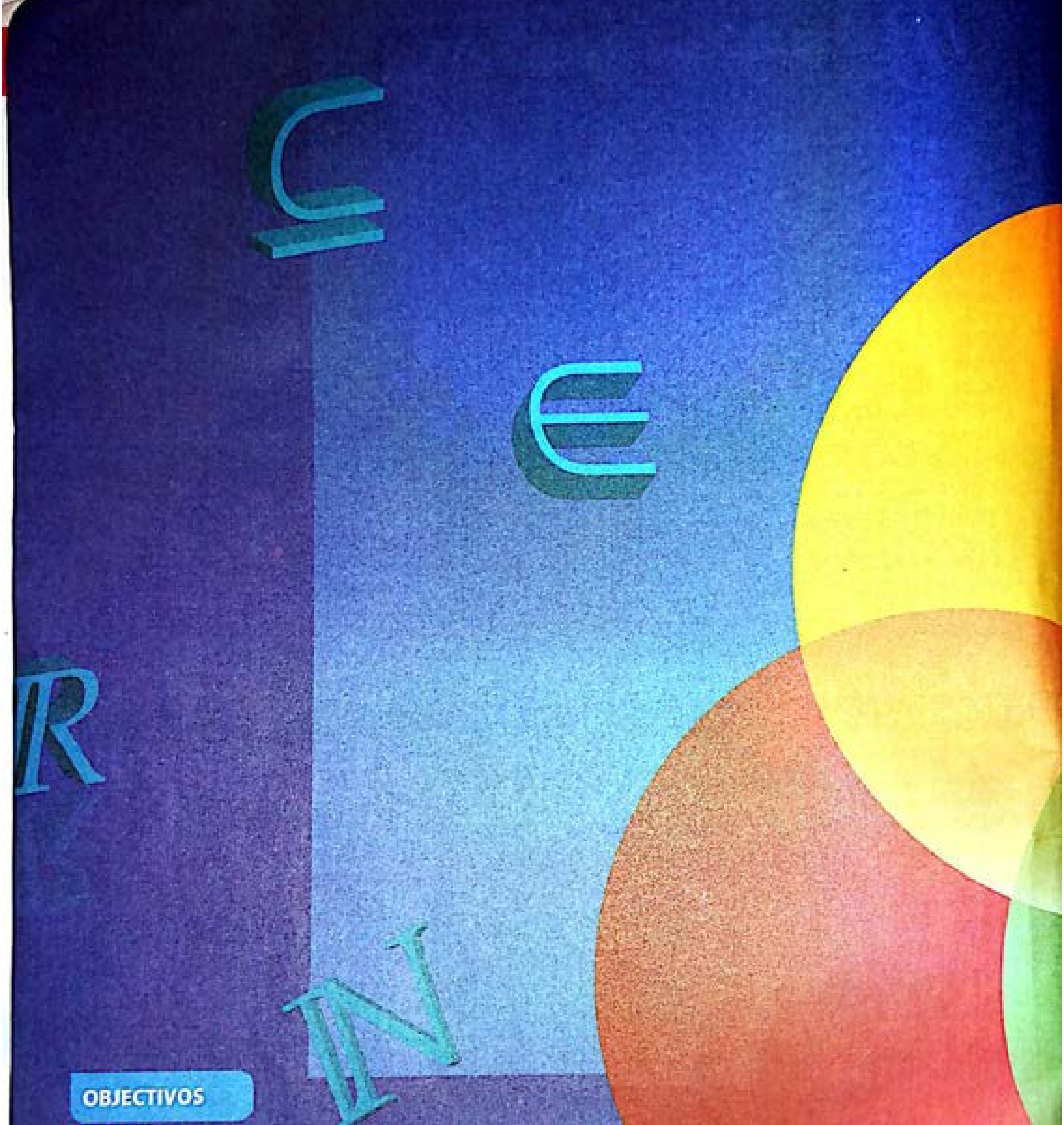


Índice

Unidade 6: Função exponencial

Unidade 7: Logaritmo e função logarítmica

Unidade 8: Trigonometria



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Usar os símbolos para relacionar conjuntos entre si e seus elementos.
- Representar um conjunto por extensão e por compreensão, através de diagramas de Venn, chavetas e/ou intervalos e na recta graduada.
- Efectuar as operações de reunião, intersecção e diferença de conjuntos.
- Resolver problemas concretos da vida real, aplicando as propriedades das operações sobre conjuntos.

Teoria de conjuntos

UNIDADE 1

Págs. 6 a 21

CONTEÚDOS

Noções de conjuntos

A **teoria dos conjuntos** é a teoria matemática que trata das propriedades dos conjuntos. Iremos fazer uma introdução elementar à teoria dos conjuntos, base para o desenvolvimento de temas futuros, como relações, funções, análise combinatória, probabilidades, etc.

Conjunto

Conjunto é qualquer colecção ou agrupamento de números, pessoas, objectos, cidades, etc.

1

Enumere os elementos dos seguintes conjuntos:

a) Conjunto dos números naturais entre 8 e 12 (inclusive).

b) Conjunto de vogais do alfabeto.

c) Conjunto dos números pares entre 0 e 18 (exclusive).

d) Conjunto dos números primos pares.

e) Conjunto dos divisores de 18.

f) $F = \{x: x^2 - 1 = 0\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N}: 2x > 15\}$

Exemplos

1. São conjuntos:
   a) Os números inteiros entre 1 e 100 inclusive.
   b) As províncias de Moçambique.
   c) Os alunos da Turma.
   d) As figuras geométricas planas.
   e) Os múltiplos de 5.

2. Podemos dizer com certeza que:
   a) Um determinado aluno é um elemento do conjunto «dos alunos da 10.ª Classe da Escola Secundária Josina Machel».
   b) 2 é um elemento do conjunto «dos números pares».
   c) *d* não é um elemento do conjunto «dos números reais».

Notação de conjuntos

Designamos os conjuntos por letras maiúsculas: *A, B, C, P, Q, ... X* e os elementos dos conjuntos por letras minúsculas: *a, b, c, d, p, q, x*.

Representação de conjuntos

Um conjunto pode ser representado de várias formas distintas:

- Extensão
- Compreensão
- Diagramas

Extensão

Neste caso, escrevemos os seus elementos entre chavetas, separados por vírgulas e sem repetição.

Compreensão

Representa-se o conjunto através de uma propriedade característica dos seus elementos, como, $A = \{x: x \text{ tem a propriedade } \alpha\}$ que se pode ler «o conjunto *A* é de todos os *x* tais que *x* têm a propriedade α».

Exemplos

1. O conjunto dos números pares, positivos menores que 12, em extensão:
   $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
2. O conjunto dos números pares, positivos menores que 50, em extensão:
   $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 48\}$
3. Para o conjunto, $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ em compreensão temos:
   $P = \{x: x$ é positivo par entre 1 e 13$\}$
4. Para o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, em compreensão temos:
   $A = \{x: x$ é par positivo menor que 12$\}$

Dado o conjunto P «dos números fraccionários entre 0 e 1», cada elemento de P deve ser um número fraccionário compreendido entre 0 e 1.

Para representar um elemento qualquer do conjunto P, usamos um símbolo variável que pode ser x. Esta variável pode ser substituída por qualquer elemento do conjunto.

Assim, o conjunto pode ser anotado da seguinte maneira:

$$P = \{x: x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}$$

O conjunto A de todos os números naturais menores que 1 000 é representado por:

$$A = \{x \in \mathbb{N}: x < 1\,000\}$$

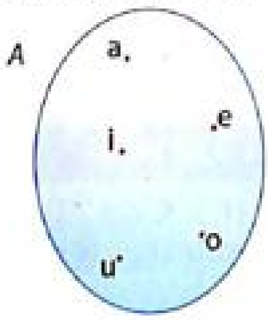
O conjunto B de todos os múltiplos de 5 é representado por:

$$B = \{x: x = 5n, n \in \mathbb{N}\}$$

Diagramas de Venn

Na representação por diagrama, traçamos uma linha fechada em torno dos seus elementos associados a pontos.

- O diagrama abaixo representa o conjunto A das vogais.



Relação de pertença

Dado A, o conjunto de todos os números inteiros positivos, a afirmação «x é um elemento de A» ou «x pertence ao conjunto A» significa que x é um número qualquer inteiro, positivo, e escrevemos simbolicamente:

$$\boxed{x \in A}$$

onde o símbolo $\in$ significa «pertence a...».

Por outro lado, «$\frac{3}{2}$ não pertence a A» ou «$\frac{3}{2}$ não é um elemento de A»,

o que representamos por: $\frac{3}{2} \notin A$

Sendo $\notin$ a negação de $\in$.

Exercício resolvido

Considere o conjunto dos divisores de 12 e diga se os elementos 3 e 5 pertencem ao conjunto

Resolução

Conjunto dos divisores de 12: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Assim, $3 \in A$ e $5 \notin A$.

Relação de inclusão

Diz-se que um conjunto A **está incluído** num conjunto B quando todo o elemento que pertence ao conjunto A também pertence ao conjunto B, isto é,

$$A \subset B = \{x: x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Onde o símbolo $\subset$ significa **está contido**, é **subconjunto**.

Do mesmo modo podemos dizer que o conjunto B **contém** o conjunto A, pois todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B, isto é,

$$B \supset A = \{x: x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Onde o símbolo $\supset$ significa **contém**.

Se todos os elementos de um conjunto A qualquer pertencem a um outro conjunto B, diz-se, então, que A é um **subconjunto** de B.

- Todo o conjunto A é subconjunto dele próprio, ou seja, $A \subset A$.
- O **conjunto vazio**, por convenção, é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$.

O símbolo $\not\subset$ significa que **não está contido**. Exprime a negação da inclusão.

Exercício resolvido

Considere os conjuntos: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; $B = \{3, 5, 7\}$; $C = \{2, 5, 7\}$, diga que relação de inclusão existe entre os conjuntos A, B e C.

Resolução

Qualquer elemento de B é elemento de A então $B \subset A$, mas $B \not\supset A$.
Como $2 \in C$, $2 \notin A$ e $2 \notin B$ então temos que e $C \not\subset A$ e $C \not\subset B$.

Igualdade de conjuntos

- Diz-se que dois conjuntos A e B são iguais se, e só se todos os elementos de A são elementos de B, e todos os elementos de B são elementos de A.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

2

Escreva em notação simbólica:

a) a é um elemento de A.

b) A é subconjunto de B.

c) A contém B.

d) A não está contido em B.

e) a não é um elemento de B.

f) A não contém B.

3

Dados os conjuntos:
$A = \{0, 1\}$;
$B = \{0, 2, 3\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3\}$. Classifique como verdadeiro (V) ou falso (F) cada uma das afirmações:

a) $A \subset B$

b) $\{1\} \supset A$

c) $A \subset C$

d) $B \subset C$

e) $\{0, 2\} \in B$

Conjunto vazio

Consideremos o seguinte conjunto, $P = \{x \in \mathbb{N}: x < 8 \text{ e } x > 12\}$.

Verificamos que o conjunto P não tem nenhum elemento. Nestas condições, o conjunto diz-se **vazio** e anota-se por:

$$P = \{\ \} \text{ ou } P = \emptyset$$

Conjunto singular

Um conjunto é **singular** quando tem um único elemento.

4

Indique as alternativas correctas:

Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$

A. Existe sempre $x \in A$ tal que $x \notin B$

B. Existe sempre um $x \in B$ tal que $x \notin A$.

C. Se $x \in B$ então $x \in A$.

D. Se $x \notin B$ então $x \notin A$.

Exemplos

1. O conjunto V dos números negativos em $\mathbb{N}$ é $V = \{\ \}$.
2. O conjunto solução da equação $x - 1 = 0$ é $S = \{1\}$.
3. $B = \{\text{Sol}\}$

Conjunto universal

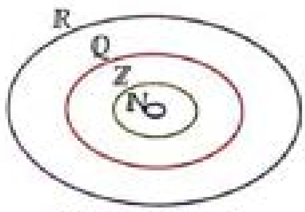
Chama-se **conjunto universal** a todo o conjunto que contém todos os elementos duma colecção. Denota-se usualmente pela letra U.

Conjuntos numéricos fundamentais

Entendemos por **conjunto numérico** qualquer conjunto cujos elementos são números. Existem infinitos conjuntos numéricos, entre os quais, os chamados conjuntos numéricos fundamentais, a saber:

- Conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
- Conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- Conjunto dos números racionais: $\mathbb{Q} = \{x: x = p/q \text{ com } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$ (o símbolo «:» lê-se «tal que»).
- Conjunto dos números reais: $\mathbb{R} = \{x: x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$.

Recorde-se que $\mathbb{R}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Cardinal de um conjunto

O **cardinal** de um conjunto é o número de elementos de um conjunto. Representa-se o cardinal pelos símbolos:

$$n(A) \text{ ou } \#A$$

Exemplos

1. Dados os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$C = \left\{-\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ $\qquad D = \left\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, 2\right\}$

Temos:

$A \subset \mathbb{N}$	$A \subset \mathbb{Z}$	$A \subset \mathbb{Q}$	$A \subset \mathbb{R}$
$B \subset \mathbb{Z}$	$B \subset \mathbb{Q}$	$B \subset \mathbb{R}$	$B \not\subset \mathbb{N}$
$C \subset \mathbb{Q}$	$C \subset \mathbb{R}$	$C \not\subset \mathbb{N}$	$C \not\subset \mathbb{Z}$
$D \subset \mathbb{R}$	$D \not\subset \mathbb{N}$	$D \not\subset \mathbb{Z}$	$D \not\subset \mathbb{Q}$

2. Se $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ então $n(A) = \#A = 10$.

Conjunto de conjuntos

O conjunto P formado por todos os subconjuntos de A chama-se **conjunto potência** de A ou conjunto de conjuntos de A. O conjunto potência de A representa-se por $P(A)$.

A potência de um conjunto é igual a 2^n, isto é,

$$P(A) = 2^n$$

onde n é o número dos elementos do conjunto dado.

Exemplo

Se $A = \{1, 2, 3\}$ então a sua potência é $P(A) = 2^3 = 8$.
O conjunto potência é $P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

5

Quantos elementos tem a potência de um conjunto com 4 elementos?

Intervalos numéricos

Dados dois números reais a e b, chama-se **intervalo** ao conjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b, podendo inclusive incluir a e b. Os números a e b são os **limites do intervalo**, sendo a diferença $b - a$ chamada **amplitude do intervalo**.

Se o intervalo incluir a e b, o intervalo é **fechado** e caso contrário, o intervalo é dito **aberto**.

A tabela abaixo define os diversos tipos de intervalos.

Tipos	Representação	Profundidade
Intervalo fechado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$	inclui os limites a e b
Intervalo aberto	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$	exclui os limites a e b
Intervalo fechado à esquerda	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$	inclui a e exclui b
Intervalo fechado à direita	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$	exclui a e inclui b
Intervalo semi-fechado à esquerda	$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$	valores maiores ou iguais a a
Intervalo semi-fechado à direita	$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$	valores menores ou iguais a b
Intervalo semi-aberto à direita	$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$	valores menores do que b
Intervalo semi-aberto à esquerda	$]a, +\infty[= \{x > a\}$	valores maiores do que a

6

Represente, usando a notação de intervalos, cada um dos seguintes conjuntos definidos em:

a) $A = \{x: 5x - 7 \geq 0\}$

b) $B = \{x: x > -1 \text{ e } x < 3\}$

c) $C = \{x: 1 < x \leq 5\}$

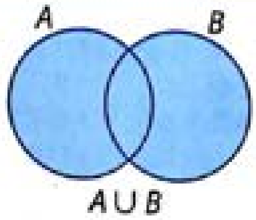
d) $D = \{x: x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

Operações com conjuntos

Reunião ($\cup$)

Dados os conjuntos A e B, define-se como reunião ou união dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cup B$, formado por todos os elementos pertencentes a A ou B, ou seja,

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } X \in B\}$$



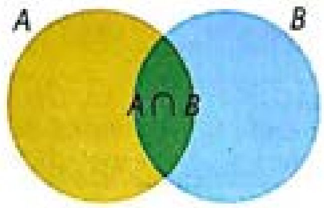
Propriedades imediatas

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (a reunião de conjuntos é uma operação comutativa.)
- $A \cup U = U$ (U é o conjunto universal.)

Intersecção ($\cap$)

Dados os conjuntos A e B, define-se como **intersecção** dos conjuntos A e B ao conjunto representado por $A \cap B$, formado por todos os elementos pertencentes a A e B, simultaneamente, ou seja,

$$\boxed{A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}}$$



Propriedades imediatas

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$ (a intersecção é uma operação comutativa.)
- $A \cap U = A$ (U é o conjunto universal.)

Conjuntos disjuntos: dois ou mais conjuntos são disjuntos quando a sua intersecção é um conjunto vazio.

$$\boxed{C \cap D = \emptyset}$$

C e D são conjuntos disjuntos.

7

Dados os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Determine:

a) $A \cap C$

b) $B \cup C$

Exemplos

1. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ e $B = \{1, 2, 5, 8, 9, 10, 13, 15\}$.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 17\}$
$A \cap B = \{1, 5, 9, 13, 15\}$

2. Dados os conjuntos na forma de intervalos $A = [1, 5]$ e $B = [3, 7]$.
$A \cap B = [3, 5]$
Graficamente teremos:

3. Sejam os conjuntos $V = \{a, e, i, o, u\}$ e $R = \{1, 2, 3\}$ então $V \cap R = \emptyset$, os conjuntos A e B são disjuntos.

Quadro-resumo das propriedades

Dados os conjuntos A, B e C são válidas as seguinte propriedades:

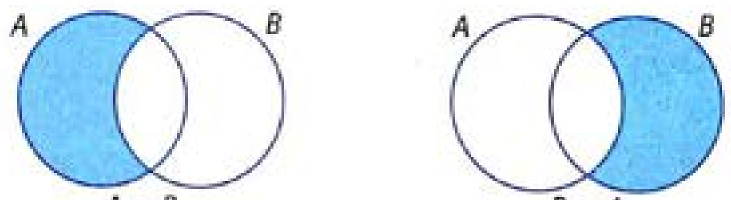
Reunião de conjuntos	Intersecção de conjuntos
$A \cup B = B \cup A$ Propriedade comutativa.	$A \cap B = B \cap A$ Propriedade comutativa.
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Propriedade associativa.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Propriedade associativa.
$A \cup \varnothing = A$ O conjunto vazio é elemento neutro.	$U \cap A = A$ O conjunto universal é o elemento neutro.
$U \cup A = U$ O conjunto universal é o elemento absorvente.	$A \cap \varnothing = \varnothing$ O conjunto vazio é o elemento absorvente.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Propriedade distributiva da reunião em relação à intersecção de conjuntos.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Propriedade distributiva da intersecção em relação à reunião de conjuntos.

Diferença

Dados os conjuntos A e B, define-se como **diferença** entre A e B (nesta ordem) ao conjunto representado por $A - B$, formado por todos os elementos pertencentes a A, mas que não pertencem a B, ou seja,

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$B - A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$



$A - B$ $\quad$ $B - A$

Propriedades imediatas

- $A - \varnothing = A$
- $\varnothing - A = \varnothing$
- $A - A = \varnothing$
- $A - B \neq B - A$ ← (a diferença de conjuntos não é uma operação comutativa.)

Exemplos

Considere os conjuntos:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{7, 8, 9, 10\}$. Então,

$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

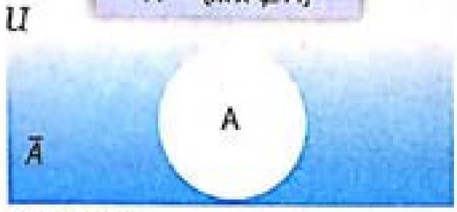
Complementar de um conjunto

O **complementar** do conjunto B contido no conjunto A é a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.

Simbologia: $B \backslash A$ ou $C_A B$ ou $A - B$

Caso particular: dado um subconjunto A de um conjunto universal U. Chama-se complementar de um conjunto A em U e representa-se por $\bar{A}$ ou $C(A)$.

$$\bar{A} = \{x: x \notin A\}$$



Propriedades imediatas

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A \cup \bar{A} = U$
- $\bar{\emptyset} = U$
- $\bar{U} = \emptyset$

8

Represente os complementares dos conjuntos seguintes, definidos em $\mathbb{R}$:

a) $A = \{x: 5x - 7 \geq 0\}$

b) $B = \{x: x > -1 \text{ e } x < 3\}$

c) $C = \{x: 1 < x \leq 5\}$

d) $D = \{x: x < -2 \text{ e } x > 2\}$

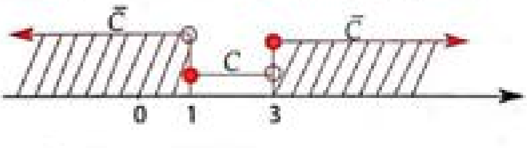
Exemplos

1. Considere o conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ como universal e dois subconjuntos $B = \{a, b, c, d\}$ e $D = \{c, d, e\}$.
   Então,
   $\bar{B} = A - B = \{e, f\}$; $\bar{D} = A - D = \{a, b, f\}$; $\bar{B} \cap \bar{D} = \{f\}$

2. Dados os conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$.
   $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$ então, $\bar{A} \cap B = \{2, 4, 6\}$
   $A \cap B = \{1, 5\}$ então $\overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

3. Seja o conjunto $C = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 \leq x < 3\}$.
   $C = [1, 3[$ então $\bar{C} = \mathbb{R} \backslash C = \mathbb{R} - C =]-\infty; 1[\cup [3, +\infty[$

   Graficamente:



$\bar{C} =]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$

Aplicação da teoria de conjuntos

Número dos elementos da reunião de dois conjuntos

Como é do nosso conhecimento o número de elementos de um conjunto é também conhecido como **cardinal do conjunto**.

Dados dois conjuntos disjuntos A e B, o **número de elementos de A ou B** é dado por:

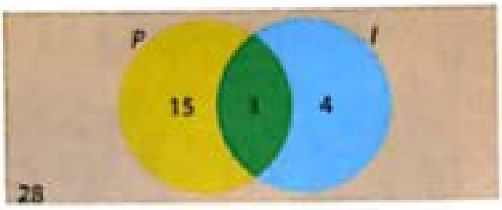
$$n(A \cup B) = \# A + \# B - \# (A \cap B)$$

Exercícios resolvidos

1. Numa conferência do MINEDH, 18 dos 50 professores ensinam Português, 7 ensinam Inglês e 3 ensinam as duas línguas.
   a) Quantos professores só ensinam Português?
   b) Quantos professores ensinam apenas Inglês?
   c) Quantos professores não ensinam nem Português, nem Inglês?

Resolução

N.º de professores: 50
Professores que ensinam Português: 18
Professores que ensinam Inglês: 7
Professores que ensinam as duas línguas: 3
a) 15
b) 4
c) 28



2. Numa escola de 360 alunos, onde as únicas matérias dadas são Matemática e Português, 240 alunos estudam Matemática e 180 alunos estudam Português. O número de alunos que estudam Matemática e Português é:
   A. 120 B. 60 C. 90 D. 180 E. Nenhum

Resolução

Total dos alunos: 360
Alunos que estudam Matemática: 240
Alunos que estudam Português: 180
Alunos que estudam ambas as disciplinas: x
$n(A \cup B) = \# A + \# B - \# (A \cap B)$

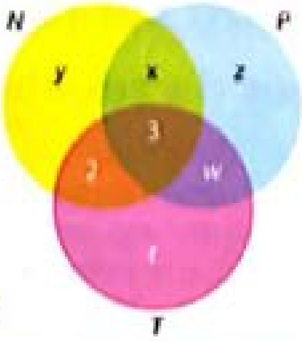
Assim,
$360 = 240 + 180 - x \Leftrightarrow 360 = 420 - x \Leftrightarrow x = 420 - 360 = 60$
Opção: B.

3. 35 estudantes estrangeiros vieram a Moçambique. 16 visitaram Niassa; 16 visitaram Pemba e 11 visitaram Tete. Desses estudantes, 5 visitaram Niassa e Tete e, desses 5, 3 visitaram também Pemba.
   a) O número de estudantes que visitaram Niassa ou Tete foi:
   A. 22 B. 24 C. 11 D. 8 E. 5

   b) Determine os valores de x y, z e w.

Resolução

Observe o diagrama de Venn seguinte:



N = Niassa
P = Pemba
T = Tete

a) $n(N \cup T) = y + x + t + w + 2 + 3 \quad (1)$

Analisando o diagrama, podemos escrever:

$x + y + 5 = 16 \Leftrightarrow x + y = 11$ .... (2)

$x + w + z + 3 = 16 \Leftrightarrow x + w + z = 13$ .... (3)

$t + w + 5 = 11 \Leftrightarrow t + w = 6$ .... (4)

$x + y + z + w + t + 2 + 3 = 35 \Leftrightarrow x + y + z + w + t = 30$

Substituindo (2) e (4) em (1), vem:

$n(NUT) = 11 + 6 + 5 = 22$

b) $11 + z + 6 = 30 \Leftrightarrow z = 13$

Substituindo o valor de z na equação (3), vem:

$x + w + 13 = 13 \Leftrightarrow x + w = 0$, de onde se conclui que $x = 0$ e $w = 0$, já que x e w são inteiros positivos ou nulos.

Substituindo o valor de x na equação (1), vem:

$0 + y = 11 \Leftrightarrow y = 11$

4. Num teste, uma questão de Literatura, com cinco alternativas em que só uma é verdadeira, refere-se à data de nascimento de um famoso escritor.

A resposta correcta é:

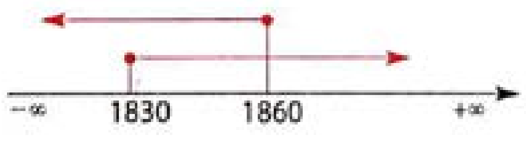
A. Século XIX
B. Século XX
C. Antes de 1860
D. Depois de 1830
E. Nenhuma das anteriores

Resolução

Analisando teremos:

As alternativas **A.** e **B.**: não há elementos para se concluir por uma delas, inicialmente.

A alternativa **E.** não pode ser verdadeira, pois implicaria – pelo enunciado – que o escritor nem teria nascido! Para visualizar veja o esquema.



A alternativa **D.** não pode ser verdadeira, pois implicaria concluir-se pelos séculos XIX ou XX e, pelo enunciado, só existe uma alternativa verdadeira. Por exclusão, a alternativa verdadeira só pode ser a **C.**

Opção: **C.**

Exercícios propostos

1. Indique quais os conjuntos definidos por:

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^-$ b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_0^-$ c) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_0^+$
d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Q}$ f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
g) $\mathbb{Q}_0^- \cup \mathbb{Q}_0^+$

2. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto universo e considere os conjuntos:

$A =]-10, 0]$ $B = [2, 5[$
$C =]-2, 5]$ $D = [3, 10[$

Determine

a) $A \cap C$ b) $B \cap C$ c) $A \cap D$
d) $(B \cup C) \cap D$ e) $(A \cup B) \cap C$

3. Dado $U = \{1, 2, 3..., 10\}$ e os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{0, 2, 4, 6\}$ $C = \{9, 10\}$

Determine

a) $A \cap B$ b) $\overline{A \cap B}$ c) $\bar{A} \cap \bar{B}$
d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ e) $A \cup \emptyset$

4. Dados os conjuntos:

$U = \mathbb{R}, A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6\}$

Determine gráfica e analiticamente os seguintes conjuntos:

a) $A \cup B$ b) $A \cap \bar{B}$ c) $A \setminus \bar{B}$

As questões são de escolha múltipla escolha a resposta correcta.

5. Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$
II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$
III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$
IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s):

A. Apenas II. e III. **B.** Apenas I. e III. **C.** Apenas IV. **D.** Todas as afirmações **E.** Apenas II. e IV.

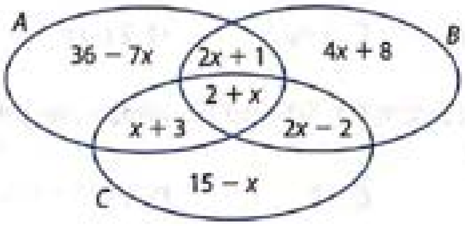
6. Numa pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados lêem o jornal A.
- 55% dos entrevistados lêem o jornal B.
- 35% dos entrevistados lêem o jornal C.
- 12% dos entrevistados lêem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados lêem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados lêem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados lêem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não lêem nenhum dos três jornais.

Considerando esses dados, é correcto afirmar que o número total de entrevistados foi:

A. 1 250 **B.** 1 200 **C.** 1 350 **D.** 1 500 **E.** 1 400

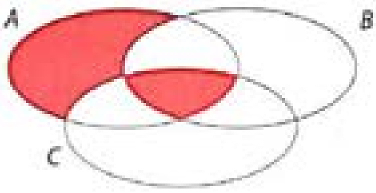
7. Na figura estão representados três conjuntos e as expressões representam o número de elementos de cada conjunto.



Sabendo que: # $(A \cup B \cup C) = 69$ então # $(A \cap B \cap C)$ é:

A. 13 **B.** 29 **C.** 5 **D.** 11 **E.** 42

8. A parte colorida do diagrama abaixo corresponde a:



A. $A \cup B \cup C$

B. $A - (B \cup C)$

C. $(A - B) \cup (B \cup B)$

D. $(A - (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

E. $(B \cup C) \cup A$

9. Para que os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{2, 4, k\}$ sejam iguais, o valor de k é:

A. 2 **B.** 0 **C.** 4 **D.** 3 **E.** 6

10. Se um conjunto A possui 1 024 subconjuntos, então o cardinal de A é igual a:

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 9 **E.** 10

11. Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y. Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4 **E.** 0

12. Se $A = \emptyset$ e $B = \{10\}$, então:

A. $A \in B$ **B.** $A \cup B = \emptyset$ **C.** $A = B$ **D.** $A \cap B = A$ **E.** $B \subset A$

13. Sejam A, B e C conjuntos finitos. O número de elementos de $A \cap B$ é 30, o número de elementos de $A \cap C$ é 20 e o número de elementos de $A \cap B \cap C$ é 15. Então o número de elementos de $A \cap (B \cap C)$ é igual a:

A. 35 **B.** 15 **C.** 50 **D.** 45 **E.** 20

14. Sendo a e b números reais quaisquer, os números possíveis de elementos do conjunto $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ são:

A. 2 ou 5 B. 3 ou 6 C. 1 ou 5 D. 2 ou 6 E. 4 ou 5

15. Se A, B e $A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos do conjunto $A \cup B$ é:

A. 10 B. 70 C. 85 D. 110 E. 170

16. Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A - B = \{1, 3, 6, 7\}$, $B - A = \{4, 8\}$

então o conjunto $A \cap B$ é o conjunto:

A. $\varnothing$ B. $\{1, 4\}$ C. $\{2, 5\}$ D. $\{6, 7, 8\}$ E. $\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$

17. Se $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ e $C = \{1, 4, 6, 8\}$, então:

A. $(A - B) \cap C = \{12\}$ B. $(B - A) \cap C = \{1\}$ C. $(A - B) \cap C = \{1\}$ D. $(B - A) \cap C = \{12\}$

18. Dados os conjuntos

A. $= \{x \in \mathbb{N}: -1 < x \leq 4\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 \leq x < 2\}$

O conjunto $A \cap B$ é:

A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{1, 1, 2\}$ E. $\{-1, 0, 1, 3, 4,\}$

19. Numa escola, 100 alunos praticam volei, 150 futebol, 20 as duas modalidades e 110 alunos não praticam nenhuma modalidade. O número total dos alunos é:

A. 230 B. 300 C. 340 D. 360

20. Num concurso para tradutores, foram entrevistados 979 candidatos, dos quais 527 falam a língua inglesa, 251 a língua francesa e 321 não falam nenhuma das línguas. O número de candidatos que falam as línguas francesa e inglesa é:

A. 778 B. 120 C. 658 D. 131

21. Na Escola Secundária da Manhiça são lidos dois jornais A e B; exactamente 80% dos alunos lêem o jornal A e 60% o jornal B. Sabendo-se que todo o aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, a percentagem dos alunos que lêem ambos é:

A. 48% B. 60% C. 40% D. 140% E. 80%

22. Um colégio ofereceu cursos de inglês e francês, devendo os alunos matricularem-se em pelo menos um deles. Dos 45 alunos de uma classe, 13 resolveram estudar tanto inglês quanto francês; em francês, matricularam-se 22 alunos. Os alunos que se matricularam em inglês são:

A. 36 B. 40 C. 32 D. 44

23. Os sócios dos clubes *A* e *B* formam um total de 2 200 pessoas. Se *A* tem 1 600 e existem 600 que pertencem aos dois clubes, o número de sócios do clube *B* é:

A. 1 000 **B.** 1 200 **C.** 1 400 **D.** 1 600

24. Num almoço, foram servidos, entre outros pratos, frangos e leitões. Sabendo-se que, das 94 pessoas presentes, 56 comeram frango, 41 comeram leitão e 21 comeram dos dois, o número de pessoas que não comeram nem frango nem leitão é:

A. 10 **B.** 12 **C.** 15 **D.** 17 **E.** 18

25. Uma escola tem 20 professores, dos quais 10 ensinam Matemática, 9 ensinam Física, 7 Química e 4 ensinam Matemática e Física. Nenhum deles ensina Matemática e Química. Quantos professores ensinam Química e Física e quantos ensinam somente Física?

A. 3 e 2. **B.** 2 e 5. **C.** 2 e 3. **D.** 5 e 2. **E** .

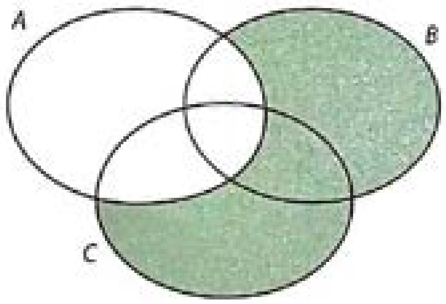
26. Represente num diagrama de Venn cada um dos conjuntos:

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

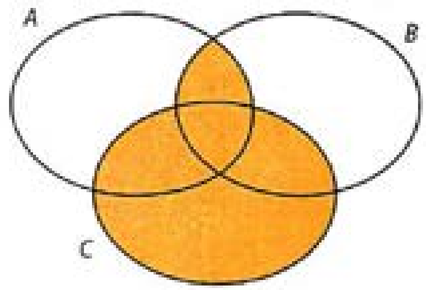
c) $C \setminus (A \cup B)$ d) $A \cap (B \cup C)$

27. Utilizando os símbolos $\cap$, $\cup$ e $\setminus$, caracterize os conjuntos coloridos:

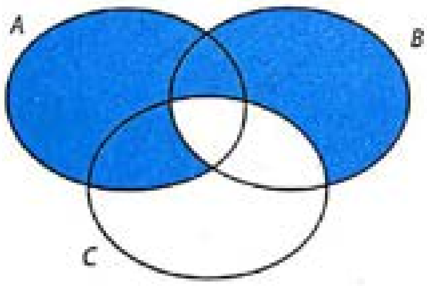
a)



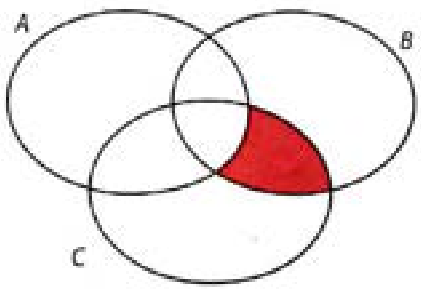
b)



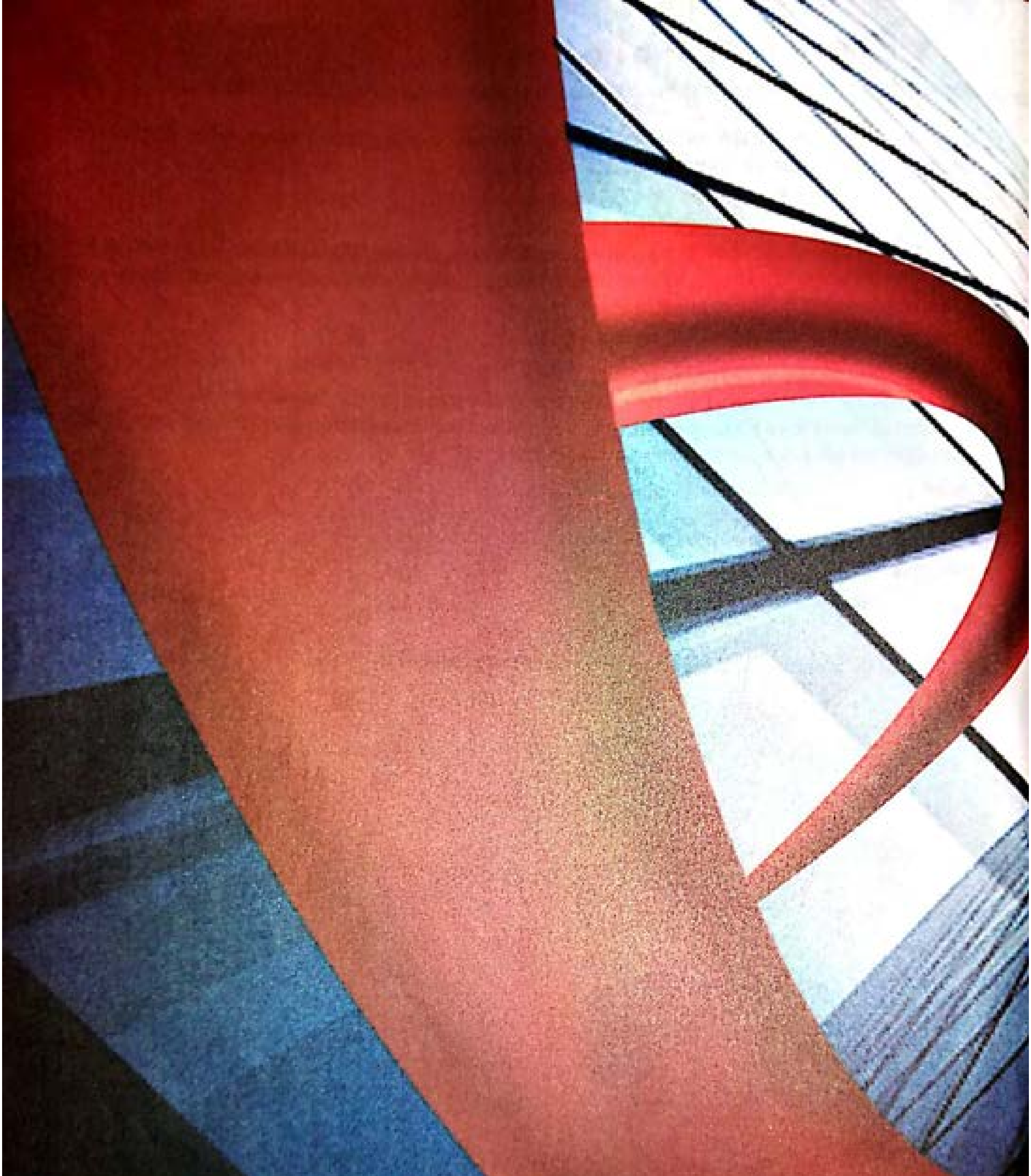
c)



d)



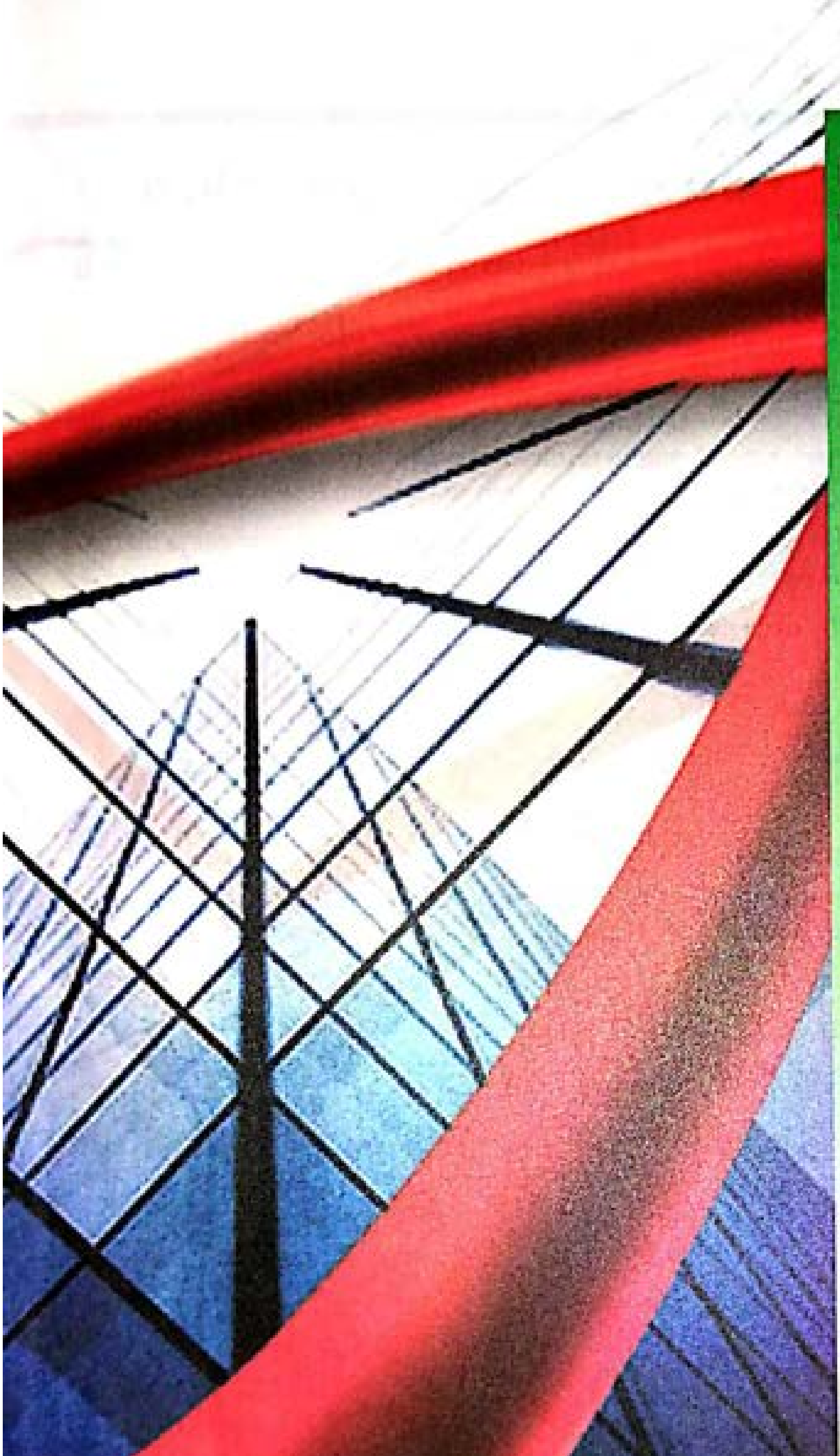
28. Numa turma de 50 alunos, 30 estudam Emakhuwa e 25 Xichangana. Se 8 alunos estudam as duas línguas, quantos alunos não estudam nem Emakhuwa nem Xichangana.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Diferenciar uma equação paramétrica da não paramétrica.
- Resolver uma equação quadrática paramétrica simples.



Equações quadráticas paramétricas simples

UNIDADE 2

Págs. 22 a 29

CONTEÚDOS

Equações quadráticas paramétricas simples

- Conceito de equação paramétrica
- Equações quadráticas paramétricas simples
- Resolução de equações biquadradas

Revisão da equação quadrática

Chama-se **equação quadrática** a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$; com a, b, c números reais e $a \neq 0$.

Numa equação quadrática podem-se verificar os seguintes casos:

1. Se $a = 0$, temos uma equação linear $bx + c = 0$.
2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, temos uma equação quadrática incompleta do tipo $ax^2 + c = 0$, que se resolve da seguinte maneira:
   $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$ que tem solução em $\mathbb{R}$ sempre que $\frac{c}{a} < 0$.
3. Se $a \neq 0$ e $c = 0$, temos uma equação quadrática incompleta do tipo $ax^2 + bx = 0$, cuja resolução consiste em evidenciar a incógnita x.
   Assim, $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax + b = 0$

Exemplos

1. $4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$; $S = \{-2, 2\}$
2. $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$; $S = \{0, 4\}$

4. Equação quadrática completa $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b, c números reais e $a \neq 0$.

1

Resolve as seguintes equações:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

b) $2x^2 - 12 = 2x$

c) $-3x^2 + 5x + 2 = 0$

d) $-5x^2 + 9x - 2 = 0$

Fórmula resolvente da equação quadrática

Para a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, vem:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Binómio discriminante**

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- **Raízes da equação quadrática**

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplos

Resolva a seguinte equação $x^2 + 5x + 6 = 0$ aplicando a fórmula resolvente.
$a = 1, b = 5, c = 6$, então $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 + 1}{2} \vee x = \frac{-5 - 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3$$

$S = \{-3, -2\}$

Soma e produto das raízes de uma equação quadrática

- Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

- Produto das raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Cálculo auxiliar

$$\frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Discussão das raízes de uma equação quadrática

Discriminante da equação quadrática

Maior do que zero ($\Delta > 0$)

A equação terá duas raízes reais e diferentes ($x_1 \neq x_2$), podendo considerar-se os seguintes casos:

- Raízes do mesmo sinal
  - Se ambas as raízes são positivas temos $P > 0$ e $S > 0$.
  - Se ambas as raízes são negativas temos $P > 0$ e $S < 0$.
- Raízes de sinais contrários
  - Se a raiz de maior valor absoluto é positiva temos $P < 0$ e $S > 0$.
  - Se a raiz de maior valor absoluto é negativa temos $P < 0$ e $S < 0$.
  - Se as raízes são simétricas temos $P > 0$ e $S = 0$.
- Uma só raiz nula
  - Se $x_1 = 0$ e $x_2 \neq 0$ então $P = 0$
  - Se $x_1 = 0$ e $x_2 > 0$ então $P = 0$ e $S > 0$.
  - Se $x_1 = 0$ e $x_2 < 0$ então $P = 0$ e $S < 0$.

P – Produto de raízes

S – Soma de raízes

Discriminante da equação quadrática

Igual a zero ($\Delta = 0$)

A equação admite duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$).

- $P > 0$ e $S > 0$, raiz dupla positiva
- $P > 0$ e $S < 0$, raiz dupla negativa
- $P = 0$, raiz dupla nula

Discriminante da equação quadrática

Negativo ($\Delta < 0$)

A equação não admite raízes reais. As raízes são chamadas imaginárias.

Equações quadráticas paramétricas

Uma equação quadrática que para além da variável admite outros parâmetros é chamada equação quadrática paramétrica,

$$ax^2 + bx + cm = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Resolução de equações quadráticas paramétricas

1. Dada a equação $x^2 + 5x + m = 0$. Determine o valor de m de modo que:

a) A equação admita duas raízes reais e diferentes.

Condição: $\Delta > 0$

$a = 1 \qquad b = 5 \qquad c = m$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4m > 0$

$25 - 4m > 0 \Leftrightarrow -4m > -25 \Leftrightarrow 4m < 25 \Leftrightarrow m < \dfrac{25}{4}$

$S = m \in \left]-\infty; \dfrac{25}{4}\right[$

b) O produto das raízes seja positivo.

Condição: $P > 0$

$P = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{1} > 0 \Leftrightarrow m > 0$

$S = m \in]0; +\infty[$

c) Uma das soluções seja 3.

Condição: $x = 3$

$3^2 + 5 \cdot 3 + m = 0 \Leftrightarrow 9 + 15 + m = 0 \Leftrightarrow m = -24$

2. Dada a equação $(m + 2)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$. Determine o valor de m de modo que a equação admita:

a) Raízes reais.

Condição: $\Delta \geq 0$

$a = m + 2 \qquad b = -2m \qquad c = m - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(m + 2)(m - 1) = -4m + 8$

$-4m + 8 \geq 0 \Leftrightarrow -4m \geq -8 \Leftrightarrow m \leq 2$

$S = m \in]-\infty; 2]$

2

Considere a equação do segundo grau em x,

$x^2 - 2(m + 2)x + (m^2 + 2m - 3) = 0.$

Determine o valor de m de modo que a equação admita:

a) Duas raízes reais e diferentes.

b) Duas raízes reais e iguais.

c) Duas raízes reais.

d) Uma só raiz nula.

e) Uma raiz nula e outra positiva.

f) Uma raiz nula e outra negativa.

g) Duas raízes nulas.

3

Considere a equação $8x^2 - (m - 1)x + m - 7 = 0$. Determine o valor do parâmetro real m de modo que a equação admita:

a) Duas raízes de sinais contrários sendo a negativa a de maior valor absoluto.

b) Uma raiz dupla positiva.

b) Uma só raiz nula.

Condição: $\Delta > 0 \wedge P = 0$

$$\begin{cases} m < 2 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ \frac{m-1}{m+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m = 1 \end{cases}$$

C. a.
$\Delta = -4 + 8$
$-4m + 8 > 0$
$\Leftrightarrow$ ou < 2

Sol. $= m = 1$

c) Raízes reais e inversas.

Condição: $\Delta > 0 \wedge P = 1$

$$\begin{cases} m < 2 \\ \frac{m-1}{m+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m - 1 = m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

S = Condição impossível pois $0 \neq 3$

3. Calcule o valor de m de modo que a equação $x^2 + (m - 1)x + 12 = 0$ tenha uma raiz tripla da outra.

Condição: $x_1 = 3x_2$

Sendo dada uma relação entre as raízes constitui-se um sistema com a soma e o produto das raízes. Assim,

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 & (1) \\ x_1 + x_2 = -(m-1) & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 12 & (3) \end{cases}$$

Da primeira e segunda equações vem:

$3x_2 + x_2 = -(m - 1) \Leftrightarrow 4x_2 = -(m - 1) \Leftrightarrow x_2 = \frac{-m + 1}{4}$

Substituindo a primeira equação na terceira, vem:

$3x_2 \cdot x_2 = 12 \Leftrightarrow 3x_2^2 = 12 \Leftrightarrow x_2^2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \pm 2$

Como $x_2 = \frac{-m + 1}{4}$ e $x_2 = \pm 2$ então $\frac{-m + 1}{4} = \pm 2$

$-m + 1 = \pm 8 \Leftrightarrow -m = -1 \pm 8 \Leftrightarrow m = -7 \vee m = 9$

Exercícios resolvidos

1. Dada a equação,

$$3x^2 - 2x + p = 0, \; p \in \mathbb{R}$$

a) Determine o valor de p de modo que a equação tenha um e só um zero.

b) Resolva a equação para o valor de p encontrado.

Resolução:

a) Para que a equação tenha um só zero, teremos que ter $\Delta = 0$.

$a = 3$ $b = -2$ $c = p$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12p$

logo,

$4 - 12p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$

b) Se $p = \frac{1}{3}$, teremos:

$3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2\,(9)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

2. Determina o parâmetro real p de modo que $x^2 - 3px + 4p + 7 = 0$ seja nulo para $x = 5$.

Resolução:

$x^2 - 3px + 4p + 7 = 0$, para $x = 5$ vem:

$5^2 - 3p(5) + 4p + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25 - 15p + 4p + 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -11p = -32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = \frac{32}{11}$

Exercícios propostos

1. Dada a equação, $x^2 - 3(k - 1)x + k^2 + 8k + 15 = 0$ cujas raízes são x_1 e x_2. Calcule os valores de k de modo que:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 - 24}{x_1 + x_2} = 2$$

2. A equação $ax^2 - 4x - 16 = 0$ tem uma raiz cujo valor é 4. Nessas condições o valor do coeficiente a é:

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

3. O valor de k para que a equação $-10x^2 - 5x + k = 0$ tenha raízes iguais é:

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{5}{8}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

4. Na equação $x^2 + mx + 12 = 0$, uma das raízes é 6. O valor de m é:

A. -3 B. -2 C. -8 D. 3

5. Uma das raízes da equação $2x^2 + mx + n = 0$ é 1. O valor de $m + n$ é:

A. -3 B. -2 C. 0 D. 2

6. Os valores de k para que a equação $3x^2 + 4x + k - 6 = 0$ tenha raízes reais diferentes são:

A. $k < -\frac{22}{3}$ B. $k \leq -\frac{22}{3}$ C. $k < \frac{22}{3}$ D. $k \leq \frac{22}{3}$

7. Para que a equação $\sqrt{3}x^2 + kx + \sqrt{3} = 0$, tenha uma raiz única o valor de k deve ser:

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $-3\sqrt{3}$

8. Na equação $3x^2 - x - (k - 1) = 0$, o produto das raízes é $\frac{6}{5}$. Nessas condições o valor de k é:

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

9. Na equação $3x^2 - 10x + 2k - 1 = 0$, a soma das raízes é igual ao produto. Nessas condições o valor de k é:

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{2}$ C. $\frac{-13}{5}$ D. $\frac{13}{2}$

10. O valor do coeficiente k na equação $10x^2 - kx - 1 = 0$ para que a soma das suas raízes seja igual a $\frac{5}{4}$ é:

A. $\frac{11}{2}$ B. $\frac{13}{2}$ C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{25}{2}$

11. Na equação $(k + 2)x^2 - 5x + 3 = 0$, uma das raízes é igual ao inverso da outra. O valor de k é:

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar equações biquadradas.
- Resolver uma equação biquadrada simples.
- Resolver problemas práticos conducentes a uma equação biquadrada.

UNIDADE 3

Equações biquadradas

Págs. 30 a 37

CONTEÚDOS

Equações biquadradas

- Conceito de equação biquadrada
- Equação biquadrada do tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$
- Resolução de equações biquadradas

Equação biquadrada

Define-se **equação biquadrada** como a equação incompleta do 4.º grau que após efectuadas todas as reduções possíveis contém apenas termos onde a incógnita tem expoente de grau par. Deste modo, a equação biquadrada na forma geral é:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ com } a, b \text{ e } c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

Exemplos

1. Equações biquadradas:
   - $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$
   - $x^4 - 8x^2 = 0$
   - $3x^4 + 27 = 0$
2. Não são equações biquadradas:
   - $x^4 - 13x^3 + x^2 - 36 = 0$
   - $x^4 - 8x^3 + 2x^2 = 0$
   - $3x^4 + 13x = 0$

Pois numa equação biquadrada a variável x só possui expoentes pares.

Resolução de equações biquadradas

Na resolução de uma equação biquadrada em $\mathbb{R}$ devemos substituir a sua variável, transformando-a numa equação do 2.º grau.

Cuja sequência prática a utilizar é a seguinte:

- Substituir x^4 por y^2 (ou qualquer outra incógnita elevada ao quadrado) e x^2 por y.
- Resolver a equação $ay^2 + by + c = 0$.
- Determinar a raiz quadrada de cada uma da raízes (y_1 e y_2) da equação $ay^2 + by + c = 0$ e substituindo estes valores na equação inicial $x^2 = y_1$ e $x^2 = y_2$, extraindo a raiz quadrada de cada membro teremos quatro valores para x:

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{y_1} \text{ ou } x_3 = +\sqrt{y_2} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{y_2}$$

Essas duas relações indicam-nos que cada raiz positiva da equação $ay^2 + by + c = 0$ dá origem a duas raízes simétricas para a equação biquadrada e a raiz negativa não dá origem a nenhuma raiz real para a mesma.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação $x^4 - 81 = 0$.

Resolução

Fazendo a substituição $x^4 = y^2$ e $x^2 = y$, teremos a equação do 2.º grau:

$y^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 81 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow y_1 = 9 \vee y_2 = -9$

Voltando à equação inicial, teremos:

$x^2 = 9 \vee x^2 = -9$

Como sabemos, para $x^2 = -9$ não há raízes reais, então as soluções da equação biquadrada serão:

$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = +\sqrt{9} \vee x = -\sqrt{9} \Leftrightarrow x = +3 \vee x = -3$

$S = \{-3, 3\}$

2. Resolva a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Resolução

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0.$

fazendo a substituição $x^4 = y^2$ e $x^2 = y$, vem:

$y^2 - 13y + 36 = 0$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y_1 = 9 \vee y_2 = 4$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$a = 1 \quad b = -13 \quad c = 36$

$\Delta = 169 - 144 = 25$

Para $y_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Para $y_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$S = \{-3, -2, 2, 3\}$

Discussão das raízes de uma equação biquadrada

- A cada **raiz positiva** da equação resolvente corresponderá um par de raízes simétricas da equação biquadrada original.
- A cada **raiz negativa** da equação resolvente corresponderá um par de raízes inexistentes na equação biquadrada original.

Considerando sempre positivo o coeficiente da variável de grau 4, analisemos a **tabela resumo** seguinte:

Análise das raízes de uma equação biquadrada ($a > 0$)			
$c < 0$			Duas raízes reais
$c > 0$	$b \geq 0$		Nenhuma raiz real
	$b < 0$	$\Delta \geq 0$	Quatro raízes reais
		$\Delta < 0$	Nenhuma raiz real
$c = 0$	$b > 0$		Duas raízes reais
	$b < 0$		Quatro raízes reais, com duas nulas
	$b = 0$		Quatro raízes reais e nulas

1

Resolva as seguintes equações biquadradas:

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

d) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

e) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

f) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

g) $28x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

h) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

i) $x^4 + x^2 + 5 = 0$

Fórmula resolvente da equação biquadrada

Sem utilizarmos a equação quadrática podemos estabelecer uma fórmula geral para a resolução da equação biquadrada.

Seja a equação geral $ax^4 + bx^2 + c = 0$, a fórmula geral de resolução será:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{com } \Delta = b^2 - 4ac \quad a, b, c, \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0$$

2

Decompor num produto de factores lineares o polinómio:
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Exercício resolvido

Resolva a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Resolução

$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 4 \qquad \Delta = 25 - 16 = 9$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \vee x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 2 \vee x = \pm 1$$

$S = \{-2, -1, 1, 2\}$

Composição da equação biquadrada

Toda a equação biquadrada de raízes reais x_1, x_2, x_3 e x_4 pode ser composta pela fórmula:

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0$$

3

Compor uma equação biquadrática que admite as raízes:

a) 1, −1, 5 e −5

b) −4, 0 e 4

Exercício resolvido

Compor a equação biquadrada cujas raízes são:

a) 0 e ± 7 b) $\pm a$ e $\pm b$

Resolução

a) $(x - 0)\,(x - 0)\,(x + 7)\,(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 49) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 49x^2 = 0$

b) $(x + a)\,(x - a)\,(x + b)\,(x - b) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - a^2)\,(x^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^4 - (a^2 + b^2)\,x^2 + a^2 b^2 = 0$

Propriedades das raízes de uma equação biquadrada

Consideremos a equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4 e a equação do 2.º grau $ay^2 + by + c = 0$, cujas raízes são y_1 e y_2.

De cada raiz da equação do 2.º grau, obtemos duas raízes simétricas para a equação biquadrada. Assim:

$$x_1 = +\sqrt{y_1} \text{ e } x_2 = -\sqrt{y_1}$$
$$x_3 = +\sqrt{y_2} \text{ e } x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Do exposto, podemos estabelecer as seguintes propriedades:

P1: A soma das quatro raízes reais de uma equação biquadrada é nula.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +\sqrt{y_1} - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_2} = 0$

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0}$$

P2: A soma dos quadrados de duas raízes não simétricas é igual a $-\dfrac{b}{a}$.

Da equação transformada vem $y_1 + y_2 = -\dfrac{b}{a}$

As raízes da equação biquadrada são $x = \pm\sqrt{y}$

Então $x_1 = \sqrt{y_1} \vee x_2 = -\sqrt{y_1}$ e $x_3 = \sqrt{y_2} \vee x_4 = -\sqrt{y_2}$

$y_1 = x_1^2 \vee y_1 = x_2^2$ e $y_2 = x_3^2 \vee y_2 = x_4^2$

Substituindo y_1 e y_2 na igualdade $y_1 + y_2 = -\dfrac{b}{a}$, vem:

$$\boxed{x_1^2 + x_3^2 = -\frac{b}{a}}$$

P3: O produto dos quadrados de duas raízes não simétricas é igual a $\dfrac{c}{a}$.

$$\boxed{x_1^2 \cdot x_3^2 = \frac{c}{a}}$$

Determinação da equação biquadrada conhecidas as raízes

Da equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, sendo $a \neq 0$ vem $x^4 + \dfrac{b}{a}x^2 + \dfrac{c}{a} = 0$.

Mais, $\quad x_1^2 + x_3^2 = -\dfrac{b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = -\left(x_1^2 + x_3^2\right)$

e

$$x_1^2 \cdot x_3^2 = \frac{c}{a}$$

Portanto,

$$x^4 - (x_1^2 + x_3^2)\,x^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 = 0$$

Fazendo

$$S = -(x_1^2 + x_3^2) \quad \text{e} \quad P = x_1^2 \cdot x_3^2$$

temos:

$$\boxed{x^4 - Sx^2 + P = 0}$$

Exercícios resolvidos

1. Escreva a equação biquadrada que admite as raízes 1 e 4 e, em seguida, decomponha-a em factores lineares.

Resolução

$x_1^2 + x_3^2 = 1 + 16 = 17 \Rightarrow S = 17$; $P = x_1^2 \cdot x_3^2 = 1 \cdot 16 = 16$

Como a equação é $x^4 - Sx^2 + P = 0$, então a equação pedida é:

$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

Fazendo a mudança de variável:

$x^4 = y^2$ e $x^2 = y$, vem

$y^2 - 17y + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{17 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow$ $\qquad \Delta = 17^2 - 64 = 225$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{17 \pm 15}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_1 = 16 \vee y_2 = 1$

Para $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Para $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Como as raízes são simétricas duas a duas teremos:

$x^4 - 17x^2 + 16 = (x - 1)(x + 1)(x - 4)(x + 4) = 0$

2. Escreva a equação biquadrada que admite as raízes1 e –2.

Resolução

Façamos $x_1 = 1$ e $x_3 = -2$

$x_1^2 + x_3^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow S = 5$; $P = x_1^2 \cdot x_3^2 = 1 \cdot 4 = 4$

Como a equação é $x^4 - Sx^2 + P = 0$, então a equação pedida é:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Exercícios propostos

1. Resolva as equações biquadradas:

a) $x^4 - 16 = 0$

b) $x^4 - x^2 = 0$

c) $3x^4 - 75 = 0$

d) $4x^4 - 36x^2 = 0$

e) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

f) $16x^4 = 40x^2 - 9$

g) $x^4 - 6x^2 + 10 = 0$

h) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

i) $(x^2 + 10)(x^2 - 10) + 36 = 0$

j) $(x^2 - 3)^2 + (x^2 + 1)^2 = 26$

k) $(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 4)^2 = 4$

l) $x^4 - \dfrac{x^2 - 3}{2} = \dfrac{2x^2 + 4}{3}$

m) $x^4 - \dfrac{x^2 - 5}{2} = \dfrac{x^2 + 5}{3}$

n) $a^2 x^4 - (a^4 - 1)x^2 + a^2 = 0$

o) $x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2 b^2 = 0$

p) $c^4 x^4 - c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2 b^2 = 0$

2. Compor, em x e com o coeficiente de x^4 unitário, as equações biquadradas de raízes:

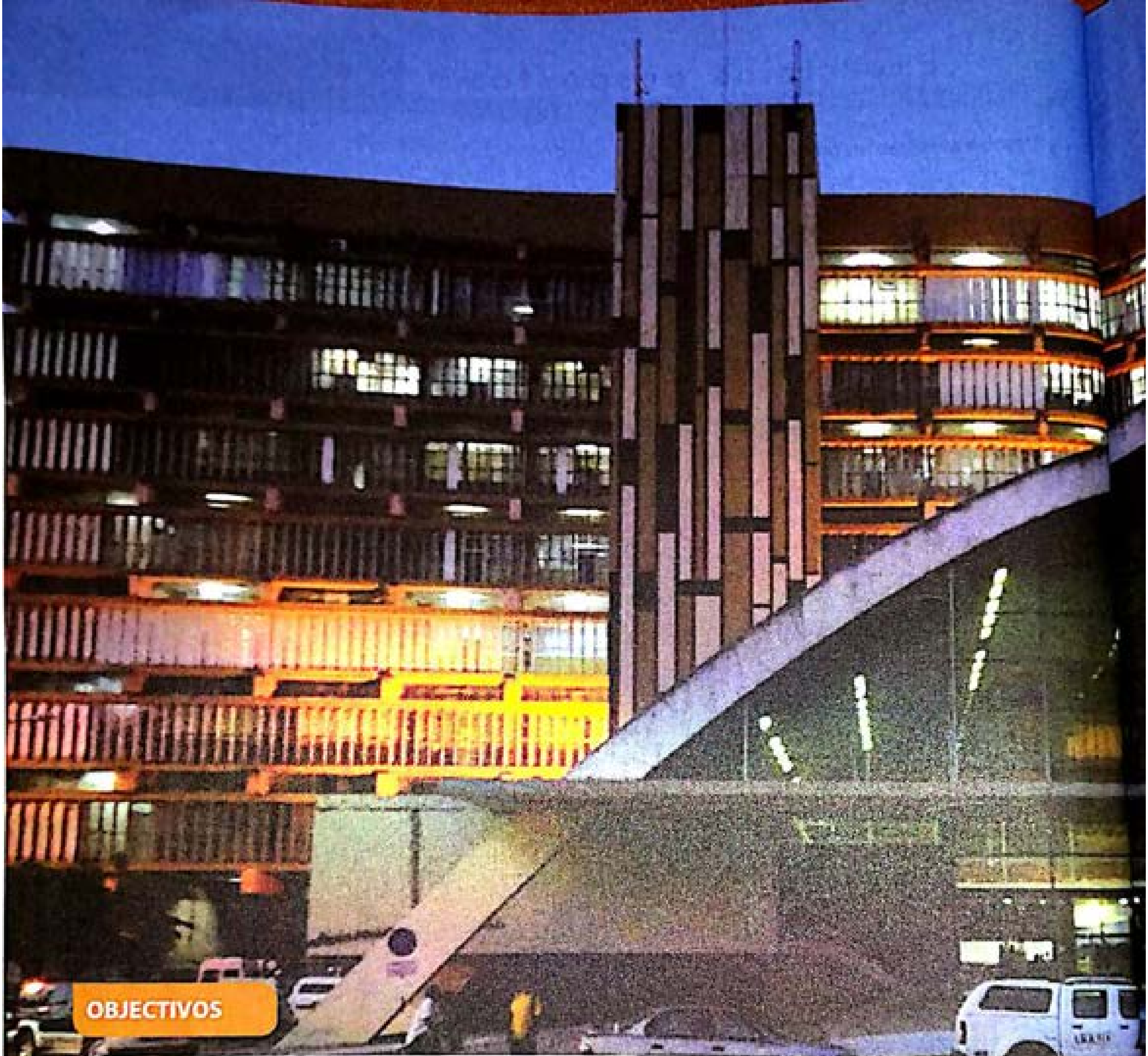
a) 0; 0; 5 e -5

b) $\pm(2 + \sqrt{3})$ e $\pm(\sqrt{3} - 1)$

3. Simplifique a fracção:

$$\frac{x^4 - 34x^2 + 225}{x^2 - 2x - 15}$$

4. Escreva a equação biquadrada que admite as raízes -1 e 1.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar a função quadrática.
- Identificar a expressão analítica de uma função quadrática.
- Representar graficamente as funções quadráticas.
- Determinar domínio, contradomínio, zeros da função, vértices da parábola, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e equação do eixo de simetria.
- Indicar o sentido da concavidade do gráfico da função quadrática.
- Determinar os pontos de intersecção do gráfico de uma função quadrática com os eixos de coordenadas.
- Determinar as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria de uma parábola.
- Determinar a expressão analítica da função quadrática a partir do gráfico.
- Resolver problemas práticos que envolvem funções quadráticas.

Função quadrática

UNIDADE 4

Págs. 38 a 51

CONTEÚDOS

Função quadrática

- Revisão do conceito de função quadrática
- Estudo completo da função $y = ax^2$: domínio, contradomínio, zeros da função, vértices da parábola, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e equação do eixo de simetria
- Função do tipo $y = ax^2 + bx + c$
- Caso $y = a\,(x - p)^2$
- Representação gráfica da função $y = a\,(x - p)^2$ a partir de $y = ax^2$
- Estudo completo da função $y = a\,(x - p)^2$
- Caso $y = a\,(x - p)^2 + q$
- Representação gráfica da função $y = a\,(x - p)^2 + q$
- Estudo completo da função $y = a\,(x - p)^2 + q$
- Caso $y = ax^2 + bx + c$
- Representação gráfica da função $y = ax^2 + bx + c$, a partir da determinação dos zeros e do vértice
- Determinação da expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico
- Resolução de problemas práticos que envolvem funções quadráticas

Noção de função

Na linguagem do dia-a-dia, o termo função surge ligado a expressões como «depende de» ou «varia em», conforme os exemplos seguintes o demonstram:

- «O preço da gasolina **varia em** função do preço do barril de petróleo.»
- «A distância ideal de travagem num veículo motorizado **varia em** função da sua velocidade.»
- «O volume de uma bola **depende do** comprimento do raio.»

Em Matemática, a algumas destas relações entre grandezas (variáveis) chamamos **funções**, do latim *functione*.

Dados dois conjuntos A e B, chamamos **função** definida em A com valores em B a toda a correspondência que associa a cada elemento de A um e um só elemento de B, isto é, a toda a **correspondência unívoca** de A para B.

Simbolicamente, e designando a correspondência por f, escrevemos:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Ao conjunto A chamamos **domínio** de f e aos seus elementos chamamos **originais** ou **objectos**. A cada objecto x corresponde uma só **imagem** y, $y = f(x)$ no conjunto de chegada B. Os originais correspondem aos valores da variável independente, e as imagens aos valores da variável dependente.

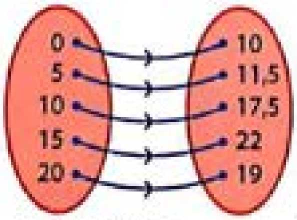
Chamamos **contradomínio** de f ao conjunto dos elementos de B que são imagem de algum elemento de A.

São habituais as notações D_f para o domínio de f e D'_f, ou CD_f, para o contradomínio de f.

Modos de definir uma função:

Por exemplo, a correspondência entre as temperaturas numa localidade, registada de 5 em 5 horas ao longo de um dia, é uma função que pode ser definida por:

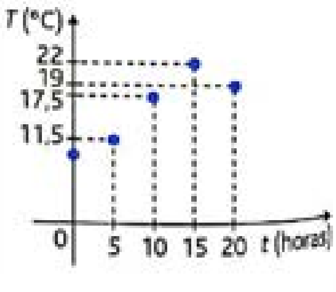
- Um **diagrama**



- Uma **tabela**

t (horas)	T (°C)
0	10
5	11,5
10	17,5
15	22
20	19

- Um **gráfico**



- Uma **expressão analítica**

$$T = -0{,}008t^3 + 0{,}21t^2 - 0{,}55t + 10$$

Função quadrática

Chama-se **função quadrática** a toda a função do tipo:

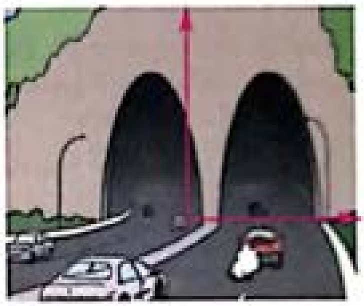
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Os gráficos destas funções são **parábolas**.

Zeros e vértice

Observe a figura ao lado.



A entrada de um túnel tem a forma aproximada de uma parábola.

Considerando o referencial o.n. como se indica na figura, podemos considerar que a parábola é caracterizada pela expressão:

$$m(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 6a)$$

Qual a largura da estrada?

A largura da estrada corresponde à distância entre os seus zeros.

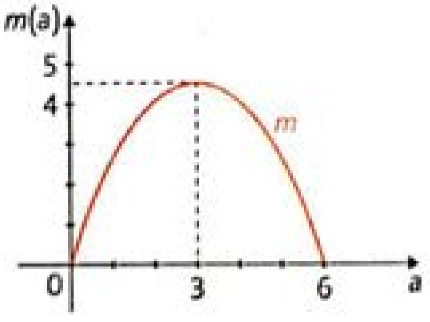
$$-\frac{1}{2}(a^2 - 6a) = 0 \Leftrightarrow a(a-6) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 6$$

Lei do anulamento do produto:
Um produto de factores é nulo se e só se um dos factores for nulo.

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Concluímos que a largura da estrada é de 6 metros.

Qual será a altura máxima do túnel?



Como sabemos, o eixo de simetria contém o vértice da parábola, logo, a equação do eixo é $a = 3$.

Então, a abcissa do vértice é 3. Vamos calcular a sua ordenada:

$$m(3) = -\frac{1}{2}(3^2 - 6 \times 3) = 4,5$$

A altura máxima é 4,5 metros.

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, o máximo é a ordenada do seu vértice cujas coordenadas são (3; 4,5).

1

Seja $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$ uma função real de variável real.

a) Indique os zeros da função.

b) Determine as coordenadas do vértice.

c) Escreva a equação do eixo de simetria.

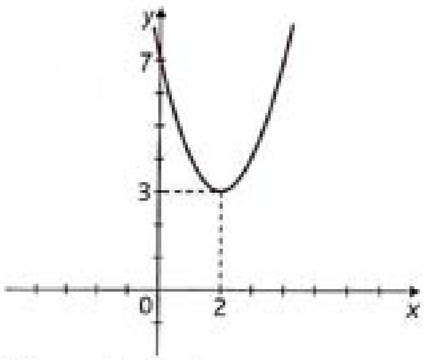
Podemos então calcular as coordenadas do vértice da parábola, calculando primeiro os seus zeros, depois a média das abcissas dos zeros e, por fim, a ordenada desse ponto.

Mas se a função não tem zeros, será que podemos usar um processo semelhante?

Consideremos a função real de variável real definida por:

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

Num referencial (O, x, y) esbocemos o gráfico desta função:



Como a concavidade está voltada para cima, esta parábola tem um mínimo. Vamos calcular as coordenadas desse mínimo.

Igualemos a expressão da função a um valor qualquer que pertença ao contradomínio, por exemplo, 7, que sendo um valor igual ao termo independente permite obter uma equação mais simples de resolver:

$$x^2 - 4x + 7 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 4$$

Existem dois objectos cuja imagem é 7: 0 e 4.

Logo, o eixo de simetria passa pelos pontos cuja abcissa é a média das abcissas destes valores, ou seja, $x = 2$.

Calculando a respectiva ordenada, temos:

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 7 = 3$$

As coordenadas do vértice V são $(2, 3)$.

O eixo de simetria é a recta $x = 2$.

Generalizando

$$ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a} \ (a \neq 0)$$

2

Seja a função real de variável real, $g(x) = 4x^2 + 5x + 3$

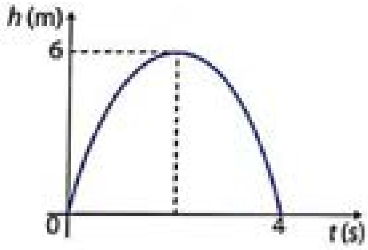
a) Prove que $2 \in D'_g$.

b) Utilizando o processo descrito no texto ao lado, determine as coordenadas do vértice.

c) Escreva a equação do eixo de simetria.

3

O gráfico representa a altura em função do tempo alcançada por uma bola lançada de baixo para cima, e na vertical, com uma determinada velocidade inicial.



a) Quanto tempo demorou a bola a chegar ao chão, depois de ter sido lançada?

b) Qual a altura máxima atingida pela bola? Em que instante foi atingida essa altura?

c) Escreva a expressão analítica que define a função apresentada.

d) Em que instantes a bola atinge a altura de 4,5 metros?

A abcissa do vértice é: $\dfrac{\frac{-b}{a}+0}{2} = -\dfrac{b}{2a}$

A ordenada do vértice é:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\,\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Binómio discriminante

$\Delta = b^2 - 4ac$

As coordenadas do vértice V são $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

O eixo de simetria é a recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Transformações

Funções do tipo $y = ax^2,\ a \neq 0$

Consideremos ainda a função $y = 2x^2$, mas com domínio $\mathbb{R}$:

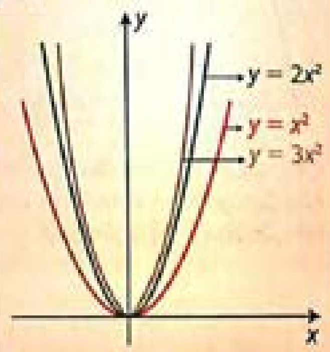
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = 2x^2$$

Observando o gráfico pode-se concluir que:

- É uma parábola.
- O ponto inferior da curva é o vértice da parábola de coordenadas (0, 0) (ponto do gráfico correspondente à mudança do sentido de variação da função).
- O mínimo da função é zero.
- O contradomínio da função é $\mathbb{R}_0^+$.
- A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$ e decrescente no intervalo $]-\infty, 0]$.
- O eixo das ordenadas, $x = 0$, é o eixo de simetria do gráfico de f.
- Objectos simétricos têm imagens iguais.

x	x^2	$2x^2$	$3x^2$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	4	8	12
3	9	18	27
4	16	32	48
5	25	50	75
6	36	72	108

$a \geq 1$



Verifiquemos que:

$$f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$$

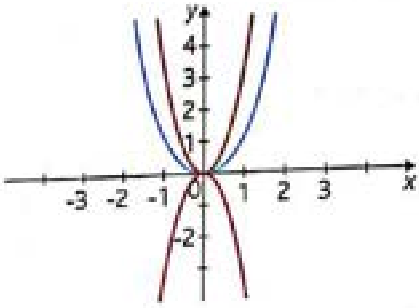
logo, para todo o número real x,

$$f(-x) = f(x)$$

- A função nunca é negativa.
- A concavidade da parábola está voltada para cima.

UNIDADE 4

Representemos num referencial (O, x, y) várias funções do tipo $y = ax^2$, com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Ao observarmos os gráficos obtidos podemos concluir que os gráficos das funções $y = ax^2$, $a \neq 0$:

- São parábolas cuja «abertura» é tanto maior quanto menor for o valor absoluto de a.
- Se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima.
- Se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.

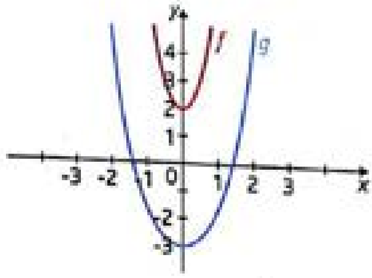
	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}_0^-$
Zeros	$x = 0$	$x = 0$
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
Monotonia	Crescente em $\mathbb{R}^+$ Decrescente em $\mathbb{R}^-$	Crescente em $\mathbb{R}^-$ Decrescente em $\mathbb{R}^+$
Extremos	Mínimo absoluto em $(0, 0)$	Máximo absoluto em $(0, 0)$
Concavidade	Voltada para cima Voltada para baixo	

Funções do tipo $y = ax^2 + k$ ou $y = a(x - h)^2$, $a \neq 0$

Consideremos as funções reais de variável real definidas por:

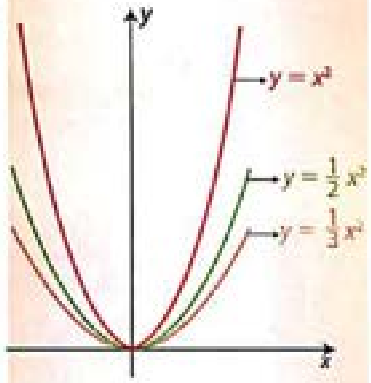
$$f(x) = 3x^2 + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 3$$

Vamos esboçar num referencial (O, x, y) os respectivos gráficos:

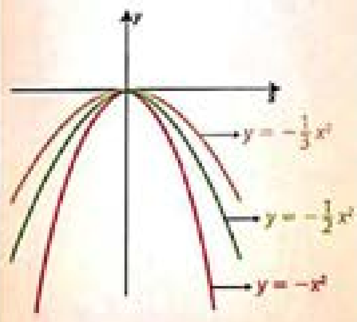


x	x^2	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^2$
−3	9	4,5	3
−2	4	2	1,33
−1	1	0,5	0,33
0	0	0	0
1	1	0,5	0,33
2	4	2	1,33
3	9	4,5	3

$0 < a < 1$



$a < 0$



Os gráficos obtidos são simétricos dos gráficos anteriores em relação ao eixo das abcissas.

4

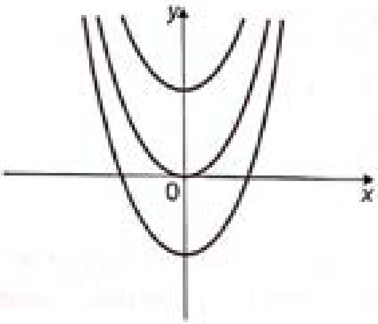
Indique o intervalo em que a função real de variável real definida por $f(x) = 6x^2$ é crescente e o intervalo em que é decrescente.

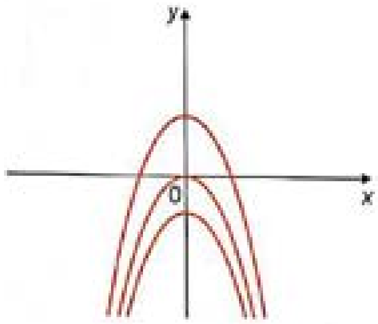
Podemos verificar que o gráfico de f em comparação com o gráfico de $y = 3x^2$ se deslocou segundo o eixo Oy, sendo o contradomínio de f o intervalo $[2, +\infty[$, e não tem zeros.

O gráfico de g deslocou-se também segundo o eixo Oy, em comparação com o gráfico de $y = x^2$, tendo como contradomínio o intervalo $[-3, +\infty[$ e com dois zeros $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Generalizando

Os gráficos das funções $y = ax^2 + k$ são parábolas que se obtêm de um gráfico da parábola $y = ax^2$ por uma translação vertical segundo o vector $(0, k)$.



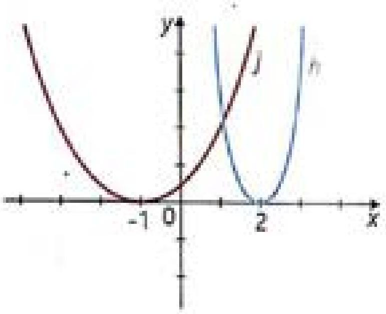


O **contradomínio** destas funções é:

- $[k, +\infty[$ se $a > 0$
- $]-\infty, k]$ se $a < 0$

Representemos agora as funções reais de variável real definidas por:

$$h(x) = 3(x-2)^2 \quad \text{e} \quad j(x) = 0{,}5(x+1)^2$$



O gráfico de h obtém-se deslocando cada objecto do gráfico da função $y = 3x^2$ duas unidades para a direita, e o gráfico de j obtém-se deslocando cada objecto do gráfico da função $y = 0{,}5x^2$ uma unidade para a esquerda.

Os zeros de h e j são respectivamente $x = 2$ e $x = -1$.

Generalizando

Os gráficos da função $y = a(x-h)^2$ são parábolas que se obtêm a partir de um gráfico de $y = ax^2$ por translação horizontal, segundo o vector $(h, 0)$.

O **contradomínio** destas funções é:

- $[0, +\infty[$ se $a > 0$
- $]-\infty, 0]$ se $a < 0$

5

Determine os valores reais de m de modo que a função $g(x) = mx^2$ seja crescente no intervalo $[-5, 0[$.

6

Observando os gráficos das seguintes funções:

a) $y = -x^2 + 2$

b) $y = 2x^2 - 5$

c) $y = 2x^2 + 1$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$

e) $y = 3x^2 + 45$

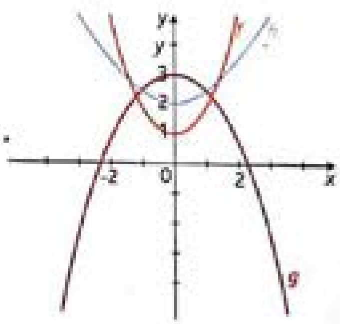
f) $y = -12x^2 - 30$

g) $y = -\frac{5}{8}x^2 - \frac{7}{34}$

Indique as coordenadas do vértice das parábolas que as representam e o respectivo contradomínio.

7

Observando a figura:



Estabeleça a correspondência entre os gráficos dados e cada uma das seguintes funções:

a) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

8

Represente a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$ as seguintes funções, indicando as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria.

a) $g(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2$

b) $h(x) = -3(x+2)^2$

c) $i(x) = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

d) $j(x) = -\frac{5}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

e) $l(x) = 10\left(x-\frac{5}{3}\right)^2$

As funções do tipo
$$y = ax^2 + bx + c$$
podem escrever-se na forma
$$y = a(x-h)^2 + k$$
fazendo $h = -\frac{b}{2a}$ e

$$k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Exemplo: Se $y = 2x^2 + 3x + 1$, temos $h = -\frac{3}{4}$ e $k = -\frac{1}{8}$. Assim,

$$y = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

9

Indique para cada uma das seguintes funções as coordenadas do vértice, o contradomínio e a equação do eixo de simetria.

a) $y = -2(x+1)^2 - 1$

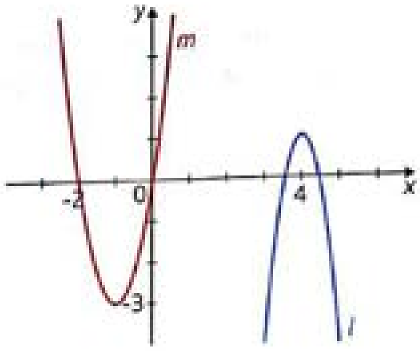
b) $y = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 3$

c) $y = 5\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 2$

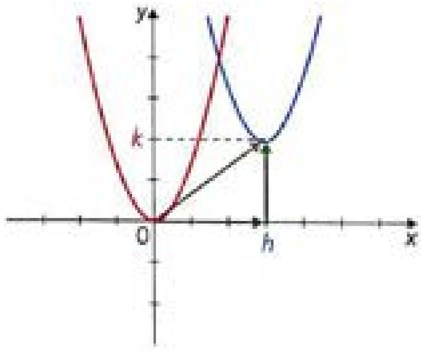
Funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$ ou $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Num referencial (O, x, y) representemos as funções:

$$l(x) = -3(x-4)^2 + 1 \quad \text{e} \quad m(x) = 3(x+1)^2 - 3$$



O gráfico da função $y = a(x-h)^2 + k$ é uma parábola de vértice $V(h, k)$ que se obtém a partir do gráfico de $y = ax^2$ por uma translação associada ao vector (h, k).



Esta apresenta as seguintes características:

	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Vértice	(h, k)	(h, k)
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Contradomínio	$[k, +\infty[$	$]-\infty, k]$
Monotonia	Crescente: $[h, +\infty[$ Decrescente: $]-\infty, h]$	Crescente: $]-\infty, h]$ Decrescente: $[h, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto em (h, k)	Máximo absoluto em (h, k)
Eixo de simetria	$x = h$	$x = h$

Variação de sinal

Para estudar o sinal da função quadrática, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ basta conhecer os seus zeros (se existirem) e o sinal do coeficiente a.

Vejamos:

Exercício resolvido

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

a) Qual o sentido da concavidade da parábola representativa da função?

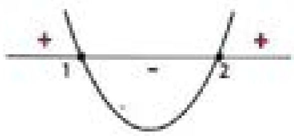
b) Como varia o sinal de f?

Resolução

a) Está voltada para cima porque $a > 0$ $(a = 1)$.

b) Calculemos os zeros da função:

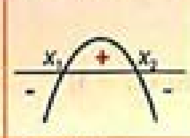
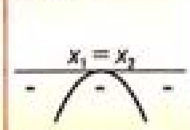
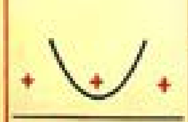
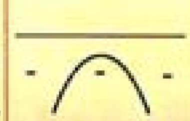
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$



A função é positiva em $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]1, 2[$.

Estudar a **variação de sinal da função** é, portanto, determinar os intervalos em que a função é positiva ou é negativa.

Generalizando, podemos concluir que:

$\Delta > 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	Se a função tem 2 zeros x_1 e x_2: A função toma o sinal de a fora do intervalo dos seus zeros e consequentemente toma o sinal contrário ao de a no intervalo dos seus zeros.
$\Delta = 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	Se a função tem 1 zero duplo: A função toma o sinal de a para todos os valores reais excepto o valor que anula a função.
$\Delta < 0$	$a > 0$ 	$a < 0$ 	Se a função não tem zeros: A função toma o sinal de a.

10

Considere as seguintes funções reais de variável real definidas por:

$$g(x) = -x^2 + 6x$$
$$h(x) = 2x^2 + 5x - 7$$

Recorrendo à calculadora gráfica indique em que intervalo:

a) g é positiva.

b) h é negativa.

11

Considere a família de funções reais de variável real $a(x) = -x^2 + 3x + m,\ m \in \mathbb{R}$

a) Determine para que valores de m:

$$a(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Para $m = -2$, estude a variação de sinal da função obtida.

c) Qual o efeito do parâmetro m no gráfico da família das funções consideradas?

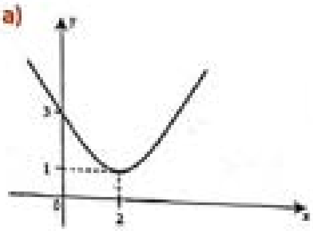
Expressão analítica de uma função quadrática a partir do gráfico

Podemos determinar a expressão analítica de uma função quadrática conhecendo as coordenadas de alguns pontos.

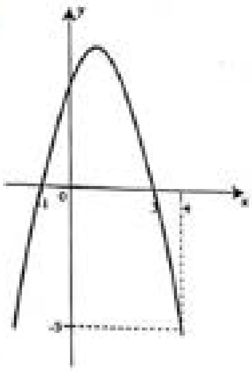
12

Determine as expressões analíticas das seguintes funções:

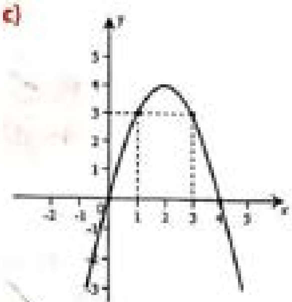
a)



b)



c)

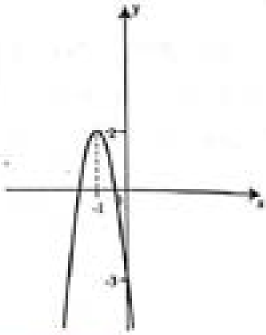


13

Determine a expressão analítica duma parábola, cuja curva passa pelo ponto $P(-\frac{3}{2}; 0)$ e pelo vértice $V(1; 3)$.

Exemplos

1. Na figura ao lado temos um gráfico de uma função do 2.º grau. Determine a respectiva expressão analítica.



Resolução

As coordenadas do vértice: $V(-1; 2)$. Ordenada na origem $(0; -3)$.

Trata-se de uma função quadrática, portanto a expressão que enuncia a lei da formação é a seguinte:

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q = a(x - x_1)(x - x_2)$

Observando os dados podemos concluir que a expressão que nos pode ajudar é a seguinte: $f(x) = a(x - p)^2 + q$ porque
$p = x_v = -1$ e $q = y_v = 2$

Então $y = a[x - (-1)]^2 + 2 \Leftrightarrow y = a(x + 1)^2 + 2$

Considerando a outra coordenada $(0; -3)$, para $x = 0$ vem $y = -3$, então:

$-3 = a(0 + 1)^2 + 2 \Leftrightarrow -3 = a + 2 \Leftrightarrow a = -5$

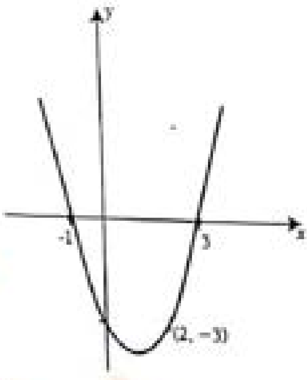
Logo,

$y = -5(x + 1)^2 + 2 \Leftrightarrow y = -5(x^2 + 2x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = -5x^2 - 10x - 3$

Portanto a expressão analítica da função quadrática é:
$f(x) = -5x^2 - 10x - 3$.

2. Determine a expressão analítica do gráfico ao lado.

Dados: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$; e o ponto $(2; -3)$.



Resolução

Neste caso vamos utilizar
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ porque é-nos dado os zeros.

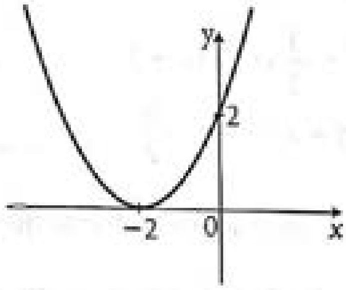
Então: $f(x) = a(x + 1)(x - 3)$.

Com o ponto $(2; -3)$ determinamos o coeficiente a.

$-3 = a(2 + 1)(2 - 3) \Leftrightarrow -3 = -3a \Leftrightarrow a = 1$

Logo: $f(x) = 1(x + 1)(x - 3) \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$

3. Determine a expressão analítica da função cujo gráfico se apresenta:



Resolução

Dados: o vértice V (−2, 0) e ponto (0, 2).

Trata-se de uma função quadrática da família $y = a(x - p)^2$ porque o $y_v = 0$ ou seja $q = 0$.

Então: $y = a(x + 2)^2$.

O ponto (0, 2) pertence à parábola e substituindo os valores de x e y na expressão anterior obtemos a equação:

$2 = a(0 + 2)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Logo: $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2$

ou $y = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

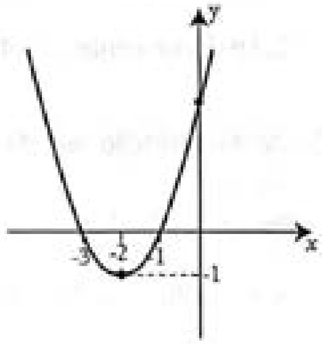
Portanto a expressão analítica da função é $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.

14

Encontre a expressão analítica da parábola que passa pelos pontos P(2; 4), Q(−3; 4) e R(−1; 0).

15

A função quadrática f é definida pelo gráfico seguinte.



a) Transcreva para a sua folha o gráfico dado e represente, o gráfico de $g(x) = x + 3$.

b) Para que valores de x, $g(x) < 0$?

c) Indique o contradomínio de f.

d) Resolva: $g(x) = f(x)$.

e) Determine a expressão analítica de f.

f) Estude a monotonia de f.

16

Sabe-se que o custo, em meticais, para produzir q unidades de certo produto é dado por

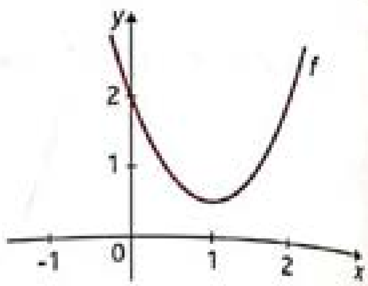
$C = q^2 - 50q + 3\,000$.

Determine:

a) A quantidade mínima de unidades produzidas.

b) O valor mínimo do custo.

1. Considere o gráfico ao lado que representa a função f:
Então, esta função pode ser definida por:



A. $f(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2}$
B. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2$
C. $f(x) = -(x-1)^2 + \frac{1}{2}$
D. $f(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

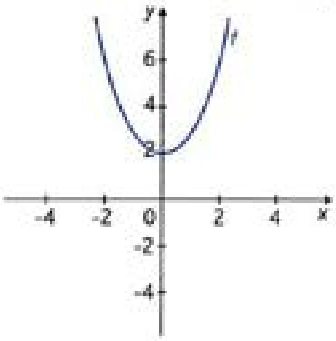
2. Seja $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$ uma função real de variável real. Podemos afirmar que:

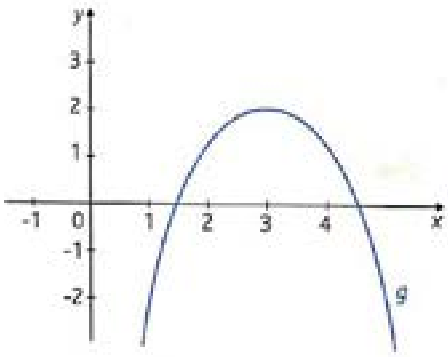
A. f é crescente no intervalo $[-2, +\infty[$.
B. f é decrescente no intervalo $[-1, +\infty[$.
C. f é decrescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$.
D. f é crescente no intervalo $\left[-\frac{11}{8}, +\infty\right[$.

3. De uma função real de variável real, f, quadrática sabe-se que: $x = -1$ e $x = 5$ são os zeros da função e $f(6) = 7$.
Então, pode afirmar-se que:

A. O contradomínio da função é $\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$.
B. O eixo da simetria é $x = 0$.
C. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1[$.
D. As coordenadas do vértice são $(2, -9)$.

4. Considere os gráficos das funções f e g, respectivamente:





Sabendo que $f(x) = x^2 + 2$ então o gráfico de g é uma representação da função f definida por:

A. $g(x) = (x-3)^2 + 2$
B. $g(x) = -(x-3)^2 + 2$
C. $g(x) = x^2 + 3$
D. $g(x) = -x^2 + 3$

5. Considere as seguintes afirmações:

I. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for positivo, a função não tem zeros.
II. Se o binómio discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) for positivo, a função quadrática tem 2 zeros.
III. Uma função quadrática tem sempre um extremo absoluto.
IV. Se o coeficiente do termo de grau 2 de uma função quadrática for negativo, o termo independente dessa função também é negativo.

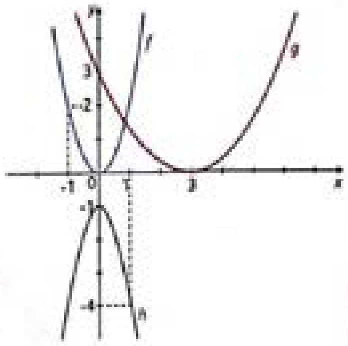
As afirmações verdadeiras são:

A. I. e IV.
B. I. e III.
C. II. e III.
D. II. e IV.

6. Considere a função, real de variável real, definida por $a(x) = (x-3)^2$. Descreva como, partindo da função dada, se obtém o gráfico de:

a) $b(x) = a(x+1) - 2$
b) $c(x) = a(x-4) + 5$

7. Os gráficos ao lado foram obtidos a partir do gráfico de $y = x^2$. Escreva a expressão analítica das funções representadas.



8. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = x^2 - 8x + 1$.

a) Determine os zeros da função.

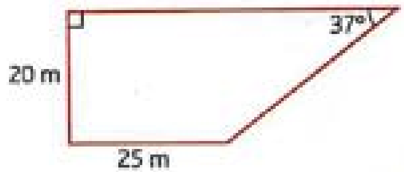
b) Para que valores de x a função é positiva?

c) Escreva $y = f(x)$ na forma $y = a(x - h)^2 + k$, com $a, h, k \in \mathbb{R}$.

d) Indique o contradomínio da função e a equação do respectivo eixo de simetria.

9. Qual a área máxima de um espelho rectangular para cuja moldura o marceneiro só pode utilizar três metros de friso?

10. Pretende construir-se uma casa num terreno com a forma representada na figura ao lado.
Atendendo aos dados indicados e sabendo que a base da casa é rectangular, determine as dimensões da casa de modo que a área seja máxima.



11. Os Aeroportos de Moçambique instalaram um repuxo em frente das suas instalações em Maputo. A água parece descrever uma trajectória com a forma de uma parábola. A Mariana resolve investigar e recolhe os seguintes dados:

- A altura máxima atingida pela água é de 4 metros.
- A distância alcançada na horizontal pela água é, aproximadamente, de 2 metros.

a) Ajude a Mariana a determinar a expressão que define a função traduzida pela trajectória da água.

b) Defina uma função que traduza as situações seguintes:

b.1) A água alcança a mesma distância na horizontal mas atinge o dobro da altura.

b.2) A água atinge a mesma altura (4 metros) mas alcança na horizontal o triplo da distância, ou seja, 6 metros.

12. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a) Determine os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que a representa.

b) Indique o contradomínio.

c) Esboce o gráfico.

13. Considere a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

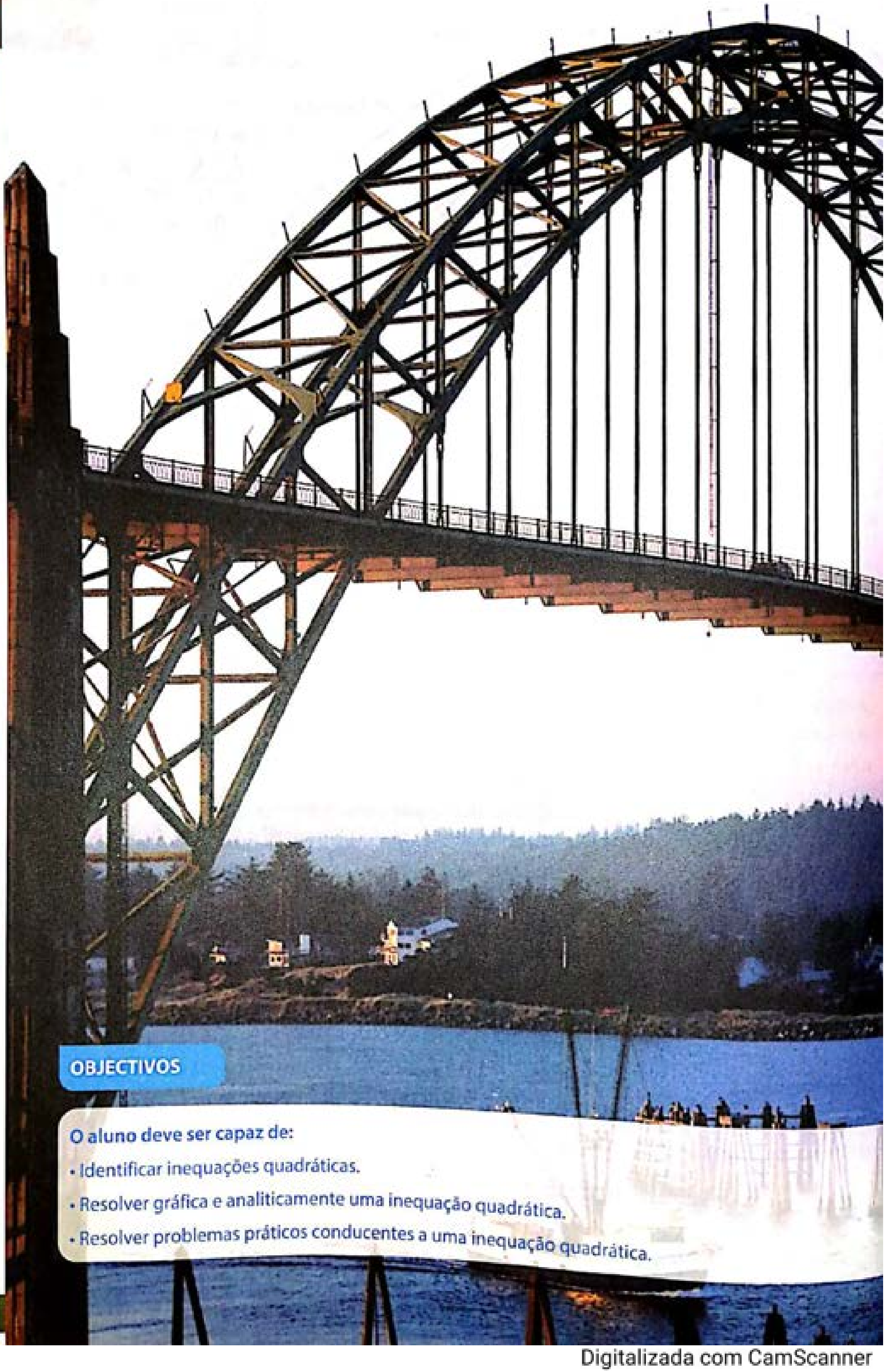
a) Resolva-a em $\mathbb{R}$.

b) Prove que $x_1 + x_2 = 10$ e $x_1 \cdot x_2 = 16$, em que x_1 e x_2 são as soluções da equação.

c) Generalizando para a equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ e usando as soluções

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{se } b^2 - 4ac \geq 0)$$

prove que a equação é equivalente a $x^2 - Sx + P = 0$, em que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.



OBJECTIVOS

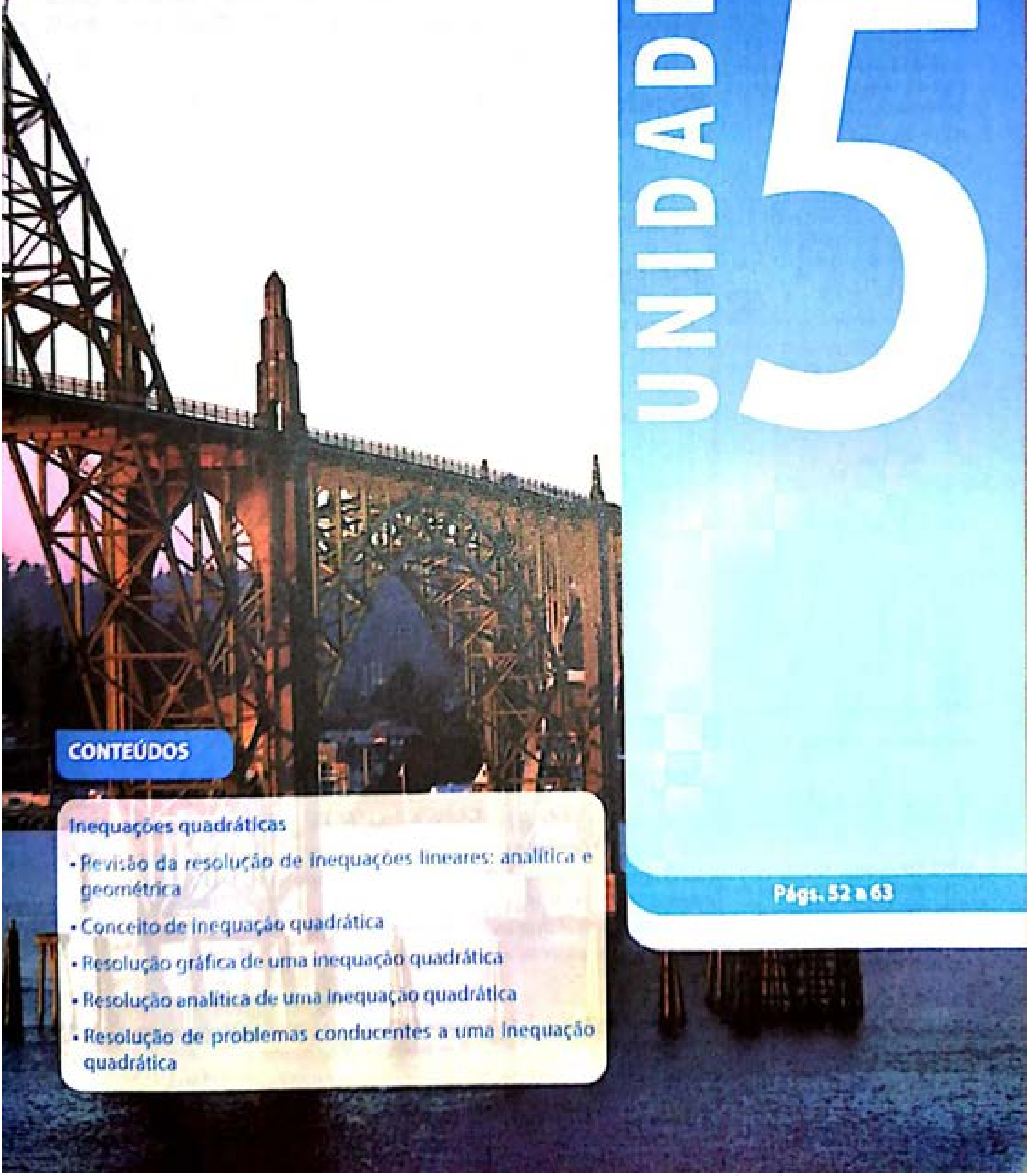
O aluno deve ser capaz de:

- Identificar inequações quadráticas.
- Resolver gráfica e analiticamente uma inequação quadrática.
- Resolver problemas práticos conducentes a uma inequação quadrática.

Inequações quadráticas

UNIDADE 5

Págs. 52 a 63



CONTEÚDOS

Inequações quadráticas

- Revisão da resolução de inequações lineares: analítica e geométrica
- Conceito de inequação quadrática
- Resolução gráfica de uma inequação quadrática
- Resolução analítica de uma inequação quadrática
- Resolução de problemas conducentes a uma inequação quadrática

Revisão sobre inequações lineares

Neste tópico vamos rever as inequações lineares, ou seja, do 1.º grau discutindo a sua forma de resolução e apresentação das soluções.

Chama-se inequação do 1.º grau na variável x a toda inequação que se reduz a uma das formas $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$, com a, b números reais e $a \neq 0$.

Resolução de inequações lineares do 1.º grau

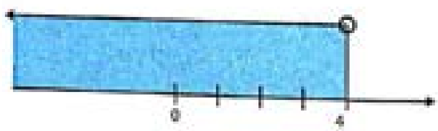
Resolver uma inequação do 1.º grau é encontrar todos os números reais x que satisfaçam a desigualdade.

Exercício resolvido

Determine todos os números inteiros positivos que satisfazem a inequação $3x + 5 < 17$.

Resolução

$3x + 5 < 17 \Leftrightarrow$	Escrever a inequação original.
$\Leftrightarrow 3x + 5 - 5 < 17 - 5 \Leftrightarrow$	Adicionar a ambos os membros da inequação -5.
$\Leftrightarrow 3x < 12 \Leftrightarrow$	Dividir pelo mesmo número 3 que é o coeficiente de x.
$\Leftrightarrow x < 4$	Solução



O conjunto de valores que satisfazem a condição é $S = \{1, 2, 3\}$

Propriedades da inequação do 1.º grau

Quando resolvemos uma equação do 1.º grau usamos recursos matemáticos como: somar ou subtrair um valor igual aos componentes da equação ou multiplicar e dividir os membros componentes da equação por um mesmo valor.

Será possível usar estes recursos em inequações do 1.º grau?
Vamos analisar os seguintes casos:

1. $5 > 3$
   $5 + 2 > 3 + 2 \Leftrightarrow 7 > 5$ Somar o valor 2. A desigualdade continua a ser verdadeira.
2. $5 > 3$
   $5 - 1 > 3 - 1 \Leftrightarrow 4 > 2$ Subtrair a ambos termos 1. A desigualdade continua verdadeira.

1

Resolva as seguintes inequações e apresente as soluções na forma de intervalos.

a) $2x + 1 \leq x + 6$
b) $2 - 3x \geq x + 14$
c) $2(x + 3) > 3(1 - x)$
d) $3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7$
e) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2}(x + 1) < \frac{1}{4}(1 - x)$
f) $x + 3 > -x - 1$
g) $6x + 3 < 3x + 18$
h) $x - \frac{1}{2}x > -3$
i) $1 - \frac{x-2}{3} \leq \frac{1}{10}$
j) $-5 \leq \frac{1}{2}(4x - 1)$

2

Considere a inequação:

$$\frac{x}{2} - (3x - 1) < \frac{x-5}{3}$$

a) Resolva a inequação e represente a solução na forma de intervalos de números reais.
b) Indica o menor número natural que é solução da inequação.

Podemos concluir que de acordo com as propriedades das equações do 1.º grau, **somar ou subtrair um mesmo valor positivo aos membros da** desigualdade o **resultado não se altera.**

3. $5 > 3$ — Multiplicar pelo valor positivo 2.

$5 \times (+2) > 3 \times (+2) \Leftrightarrow 10 > 6$ — A desigualdade continua a ser verdadeira.

4. $5 > 2$ — Multiplicar pelo valor (-2).

$5 \times (-2) > 2 \times (-2) \Leftrightarrow -10 > -4$ — A desigualdade encontrada é falsa.

Para que a desigualdade seja verdadeira temos que **inverter** o sinal de desigualdade: $-10 < -4$.

Desta forma quando **multiplicamos ambos os termos da desigualdade por um número negativo, invertemos o sinal de desigualdade.**

Exercícios resolvidos

Resolva as inequações seguintes:

a) $-3x + 9 \geq 0$ b) $2 - 4x \leq x + 17$ c) $3(2x - 1) - 4(x - 2) \geq 3$

Resolução

a) $-3x + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow -3x \geq -9$

$\Leftrightarrow 3x \leq 9$ — Multiplicar ambos os membros por (-1), inverte-se o sinal de desigualdade.

$\Leftrightarrow x \leq 3$

Solução: $x \in]-\infty, 3]$

b) $2 - 4x \leq x + 17$

$-4x - x \leq 17 - 2 \Leftrightarrow -5x \leq 15 \Leftrightarrow 5x \geq -15 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{5} \Leftrightarrow x \geq -3$

Solução: $x \in [-3, +\infty[$

c) $3(2x - 1) - 4(x - 2) \geq 3$

$3(2x - 1) - 4(x - 2) \geq 3 \Leftrightarrow 6x - 3 - 4x + 8 \geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 4x - 3 + 8 \geq 3 \Leftrightarrow 2x + 5 \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 3 - 5$

$\Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -1$

Solução: $x \in [-1, +\infty[$

3

Indica o maior número inteiro que satisfaz a condição.

$$\frac{1-x}{3} - \frac{5(6-x)}{12} > x - \frac{1}{4}$$

Inequação quadrática

Uma inequação diz-se quadrática ou do segundo grau se é da forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, com $a \neq 0$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Resolução de inequações quadráticas

Para **resolver** uma inequação quadrática, considera-se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e faz-se o estudo do sinal desta função.

Recordamos que a função só muda de sinal quando o x passa pelas raízes.

Resolução gráfica

Tendo em conta o que sabemos da variação de sinal da função quadrática, vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação do 2.º grau:

$$x^2 + 3x - 4 > 0$$

Cálculo auxiliar:

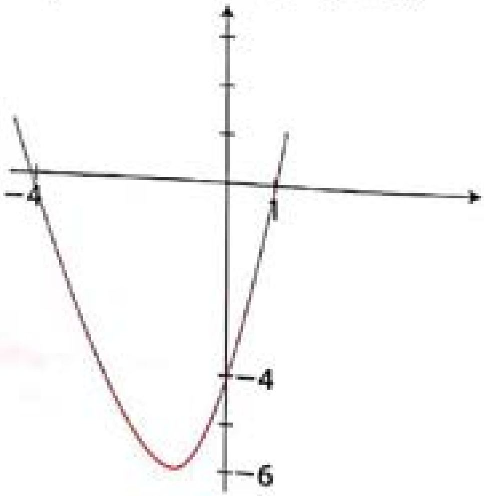
Reduzir a equação à forma canónica, determinar os zeros e o sinal do coeficiente do termo quadrático:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$$

Nos pontos $(-4, 0)$ e $(1, 0)$ o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas.

Como o termo quadrático é positivo significa que a concavidade da parábola está voltada para cima.

Em seguida fazemos a representação gráfica.



Observando o gráfico conclui-se que o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$ é $x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$.

4

Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

b) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$

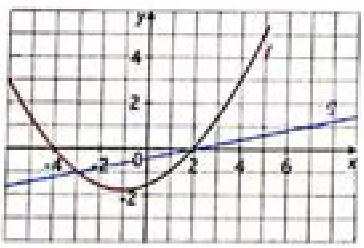
c) $x^2 + 2x + 9 < 0$

d) $x^2 + 6x + 9 > 0$

e) $7 + 2x - x^2 < 0$

5

Considere a função quadrática f e a função afim g definidas pelos seguintes gráficos:

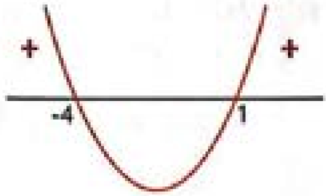


Determine, recorrendo a intervalos, o conjunto solução de cada uma das seguintes condições:

a) $f(x) \cdot g(x) < 0$

b) $f(x) - g(x) < 0$

Na prática desenhamos o esboço da representação gráfica:



Conjunto solução para $f(x) > 0$ é $x \in]-\infty, -4[\cup]1, +\infty[$.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a inequação: $x^2 + 3x + 2 < 0$.

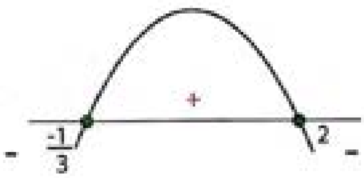
Resolução

Seja $f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$
Como $a = 1$, por isso, positivo ($a > 0$) a parábola tem a concavidade voltada para cima.
A função tem como zeros os valores $x = -1$ ou $x = -2$.

Solução: $x \in]-2, -1[$

2. Resolva: $-3x^2 + 5x + 2 \leq 0$

Resolução



Seja $f(x) = -3x^2 + 5x + 2 = (-3x - 1)(x - 2)$
Como $a = -3$, por isso, negativo ($a < 0$) a parábola tem a concavidade voltada para baixo.
Os zeros da função são: $-\frac{1}{3}$ e 2.

Solução: $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty[$

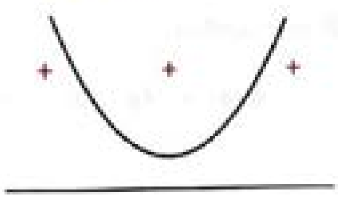
3. Resolva a inequação:

$$\frac{2x^2 - 1}{3} + 5 > \frac{x}{2} + 4$$

Resolução

1.º transforma-se a inequação na forma $ax^2 + bx + c > 0$.
Assim,

$$\frac{2x^2 - 1}{3} + 5 > \frac{x}{2} + 4 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 1) + 30 > 3x + 24 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 4 > 0$$



A equação $4x^2 - 3x + 4 = 0$ tem como $\Delta = 9 - 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Delta < 0$ então não tem raízes reais.
Como $a = 4$, por isso, positivo ($a > 0$) a função tem a concavidade voltada para cima.

Solução: $x \in \mathbb{R}$

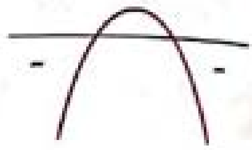
4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1$.

Resolução

$x^2 + 3x \leq 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 + 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar:

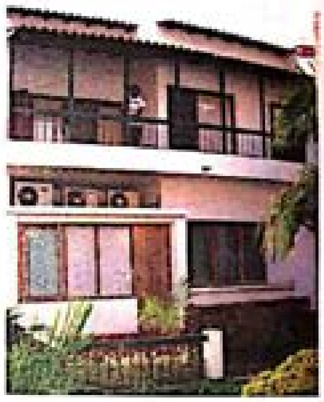
$$-x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$\text{Solução} = \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$$

5. Da janela de uma casa, atira-se uma bola para a rua.
A bola demora 0,4 s a chegar ao chão.
A distância do objecto (em metros) em relação à posição inicial em cada instante (em segundos) é dada pela expressão:

$$h(t) = 10t + 4{,}9t^2$$



a) Ao fim de quanto tempo a bola se encontra a uma distância da janela igual a dois metros?
b) De que altura é largada a bola?
c) A partir de que momento a bola se encontra a uma distância superior a três metros da janela?

Resolução

a) $h(t) = 2 \Leftrightarrow 10t + 4{,}9t^2 = 2 \Leftrightarrow 4{,}9t^2 + 10t - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \approx -2{,}22 \vee t \approx 0{,}18$

Ao fim de aproximadamente 0,18 segundos a bola encontra-se a dois metros da janela.

b) $h(0{,}4) = 10 \times 0{,}4 + 4{,}9 \times 0{,}4^2 = 4{,}784$

A bola é largada, aproximadamente, a 4,8 metros do chão.

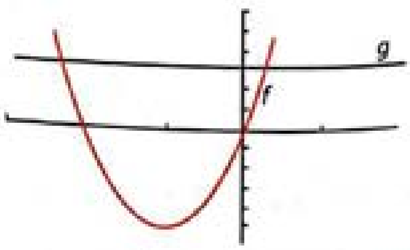
c) $h(t) > 3 \Leftrightarrow 10t + 4{,}9t^2 > 3 \Leftrightarrow 4{,}9t^2 + 10t - 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \in [0{,}2655; 0{,}4]$

A bola encontra-se a uma distância superior a 3 metros a partir de aproximadamente 0,27 segundos.

Cálculo auxiliar:

$4{,}9t^2 + 10t - 3 = 0 \Leftrightarrow t \approx -2{,}3063 \vee t \approx 0{,}2655$

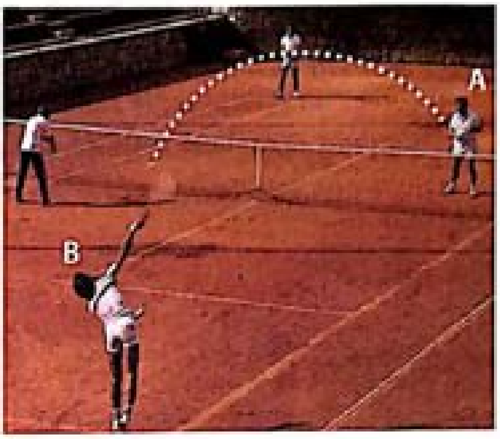


6. Numa partida de ténis, a certa altura a bola bate no campo do jogador A a 8 m da rede. A rede tem 1 m de altura. A bola atinge a altura máxima de 3 m a uma distância da rede de 2 m, ainda no lado do jogador A.

a) Qual a expressão que define a trajectória da bola?

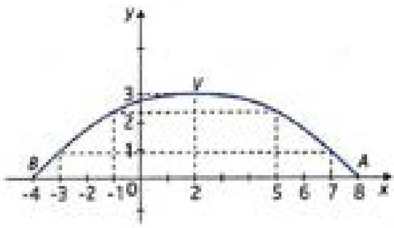
b) Será que a bola ultrapassa a rede ou bate nela?

c) A que distância da rede a bola atinge uma altura superior a 2 m?



Resolução

Comecemos por desenhar um esquema relativo à situação dada:



a) $V(2, 3)$ e $A(8, 0)$

$y = a(x-2)^2 + 3$ e substituindo x e y pelas coordenadas do ponto A, temos:

$$0 = a(8-2)^2 + 3 \Leftrightarrow -3 = 36a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{36} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{12}$$

$y = -\frac{1}{12}(x-2)^2 + 3$, por exemplo, porque o referencial pode ter a origem noutro ponto que não seja o meio do campo.

b) Observando o gráfico e verificando que $f(0) = -\frac{1}{12}(0-2)^2 + 3 = -\frac{1}{12}(4) + 3 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$,

podemos concluir que a bola quando está por cima da rede encontra-se a uma altura aproximada de 2,67 m do chão. Como a rede tem 1 m de altura, a bola passa por cima.

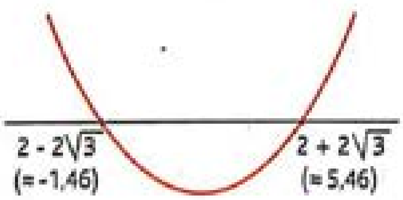
c) $-\frac{1}{12}(x-2)^2 + 3 > 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{12}(x^2 - 4x + 4) + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in]2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}[$$

A bola atinge uma altura superior a 2 m quando se encontra entre 1,46 m da rede, no campo do jogador B, e até 5,46 m da rede, no campo do jogador A.

Cálculo auxiliar:

$$x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{12} \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{3}$$



7. Um rectângulo tem de medida de perímetro 20 metros.

a) Exprima a área A do rectângulo em função do comprimento x de um dos seus lados.

b) Entre que valores pode variar x?

c) Represente graficamente a função A.

d) Para que valores de x a área A é máxima?

Resolução

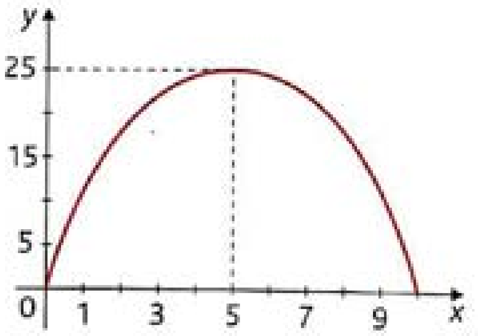
a) Designemos por y a medida do outro lado do rectângulo. Assim,

$$P = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

$$A = xy \Leftrightarrow A = x(10 - x) \Leftrightarrow A = 10x - x^2$$

b) Os valores de x têm de estar compreendidos entre 0 e 10, pois se uma das dimensões for 0 ou 10 não existe qualquer rectângulo.

c)



d) Observando o gráfico verificamos que o máximo da função coincide com o vértice de coordenadas (5, 25), donde se conclui que a área é máxima quando $x = 5$.

Resolução analítica

A resolução analítica de uma inequação do 2.º grau consiste na análise do sinal do produto de factores:

Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite raízes x_1 e x_2 então
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ se e somente se:
- $[(x - x_1) < 0 \wedge (x - x_2) < 0] \vee [(x - x_1) > 0 \wedge (x - x_2) > 0]$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ se e somente se:
- $[(x - x_1) < 0 \wedge (x - x_2) > 0] \vee [(x - x_1) > 0 \wedge (x - x_2) < 0]$

6

Determine o domínio de cada uma das seguintes funções reais de variável real:

a) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

c) $h(x) = 5 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

d) $i(x) = \frac{1}{2}\sqrt{7x - x^2 + 30}$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ se e somente se:

- $[(x - x_1) \geq 0 \land (x - x_2) > 0] \lor [(x - x_1) > 0 \land (x - x_2) \geq 0]$

$$\lor$$

- $[(x - x_1) \leq 0 \land (x - x_2) < 0] \lor [(x - x_1) < 0 \land (x - x_2) \leq 0]$

O produto $(x - x_1)(x - x_2) \leq 0$ se e somente se:

- $[(x - x_1) \leq 0 \land (x - x_2) > 0] \lor [(x - x_1) > 0 \land (x - x_2) \leq 0]$

$$\lor$$

- $[(x - x_1) \geq 0 \land (x - x_2) < 0] \lor [(x - x_1) < 0 \land (x - x_2) \geq 0]$

Exercício resolvido

Resolva analiticamente a inequação $x^2 - 5x + 4 < 0$.

Resolução

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

1.º $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$

A intersecção das duas condições resulta no $x \in \varnothing$.

2.º $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 4 \end{cases}$

A intersecção das duas condições resulta em $x \in]1, 4[$.

3.º Reunindo a solução do 1.º com a solução do 2.º, isto é,

$$\varnothing \cup]1, 4[=]1, 4[$$

então a solução da inequação

$$x^2 - 5x + 4 < 0 \text{ é } x \in]1, 4[$$

A análise do produto pode ser feita também com a ajuda de um quadro:

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) < 0$$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$x - 1$	−	0	+	+	+
$x - 4$	−	−	−	0	+
$(x-1)(x-4)$	+	0	−	0	+

Solução: $x \in]1, 4[$

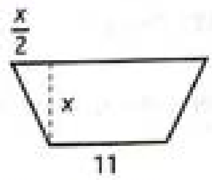
7

Resolva graficamente a inequação:

$$-x^2 + 3x + 1 \leq 0$$

8

Considere o seguinte trapézio isósceles:



a) Mostre que a área do trapézio é dada por: $a(x) = 11x + \frac{x^2}{2}$.

b) Entre que valores pode variar a altura do trapézio de modo que a área seja inferior a 120 m²?

9

O Tiago lançou da janela do seu andar um saco para o seu amigo que se encontrava à entrada do prédio. A distância ao solo, em metros, do saco em queda é dada por:

$d(t) = -\frac{t^2}{3} - 2t + 11$, t em segundos

a) A Joana encontra-se à janela do mesmo prédio que se situa a quatro metros do solo. Em que instante a Joana observa o saco a cair?

b) A que altura se encontra a janela do Tiago?

c) Ao fim de quanto tempo o saco chega ao chão?

1. Resolva as seguintes inequações pelo método gráfico:

a) $x^2 - 4x < 0$ b) $x^2 - 8x + 12 \leqslant 0$ c) $5x^2 - 3x - 2 \geqslant 0$ d) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$

e) $x^2 + 7x < -12$ f) $(x-1)(x+2) < x(4-x)$ g) $(2x-1) < x^2 - 4 < 12$

2. Resolva analiticamente as seguintes inequações:

a) $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$ b) $x^2 + 1 \leqslant -x^2 + 4x + 2$

3. Sabendo que o lucro mensal duma fábrica de canetas é expresso por $l = -x^2 + 140x + 1\,875$ onde x representa o número de canetas vendidas em centenas. Determine o número de canetas que devem ser vendidas para que o lucro esteja entre 1 000 MT e 2 400 MT.

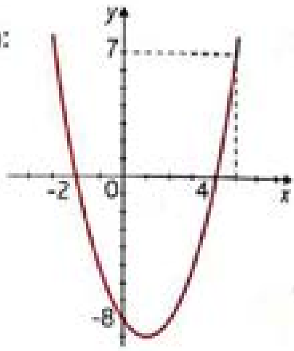
4. Determine m de modo que a função quadrática

$$f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 2(m^2 + 2m - 2)$$

tenha raízes de sinais contrários.

5. Se $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 3 \leqslant 0\}$. Determine $A \cap B$.

6. Observe o gráfico ao lado e diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:



A. $x^2 - 2x - 8 < 5$ para $-2 < x < 5$

B. $x^2 - 2x - 8 > x + 2$ para $-2 < x < 5$

C. $x^2 - 2x - 8 > x + 2$ para $x < -2 \vee x > 5$

D. $x^2 - 2x - 8 = x + 2$ para $-2 \leq x \leq 5$

7. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolva analiticamente, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $f(x) < 1$ b) $f(x) \geq \frac{3}{8}$

8. Um calorífero projectado para trabalhar com uma diferença de potencial de 220 V consome uma potência de 1 000 W.
Sabe-se pela Lei de Joule que:

$$P = RI^2 \text{ ou } P = \frac{U^2}{R}$$

onde P é a potência (em watts), R a resistência (em ohms), I a intensidade (em amperes) e U a diferença de potencial (em volts).

a) Calcule a resistência do fio do calorífero quando está em funcionamento.

b) Supondo que a resistência do fio é constante e igual a 30 Ω, determine a diferença de potencial para que a potência seja superior a 1 500 W, sabendo que os valores só podem variar entre]170, 240[volts.

9. Num grande prémio de Fórmula 1, um espectador encontra-se num local em que consegue visualizar um determinado troço do percurso. A determinada altura, vê um carro. A distância, em metros, deste ao espectador, a partir do instante em que o espectador vê o carro, é dada por:

$$d(t) = 15t^2 - 90t + 155 \text{ com } t \text{ em segundos}$$

a) A que distância se encontra o carro do espectador quando este o vê pela primeira vez?

b) Ao fim de quanto tempo se atinge a menor distância entre o carro e o espectador? Qual o valor dessa distância?

c) Sabendo que ao fim de 8 segundos o carro desaparece do campo de visão do espectador, existiu algum instante em que este seja visível a mais de 300 metros?

10. Dada a função quadrática $f(x) = 2x^2 - x - 3$, determine:

a) Os zeros da função.

b) As coordenadas do vértice.

c) A ordenada na origem.

d) A representação gráfica da função.

e) Os valores de x para os quais $f(x) > 0$.

11. Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge a altura h dada por:

$$h(t) = 40t - 5t^2$$

a) Calcule a posição da pedra no instante $t = 2$ segundos.

b) Calcule o instante em que a pedra passa pela posição 75 m durante a subida.

c) Determine a altura máxima que a pedra atinge.

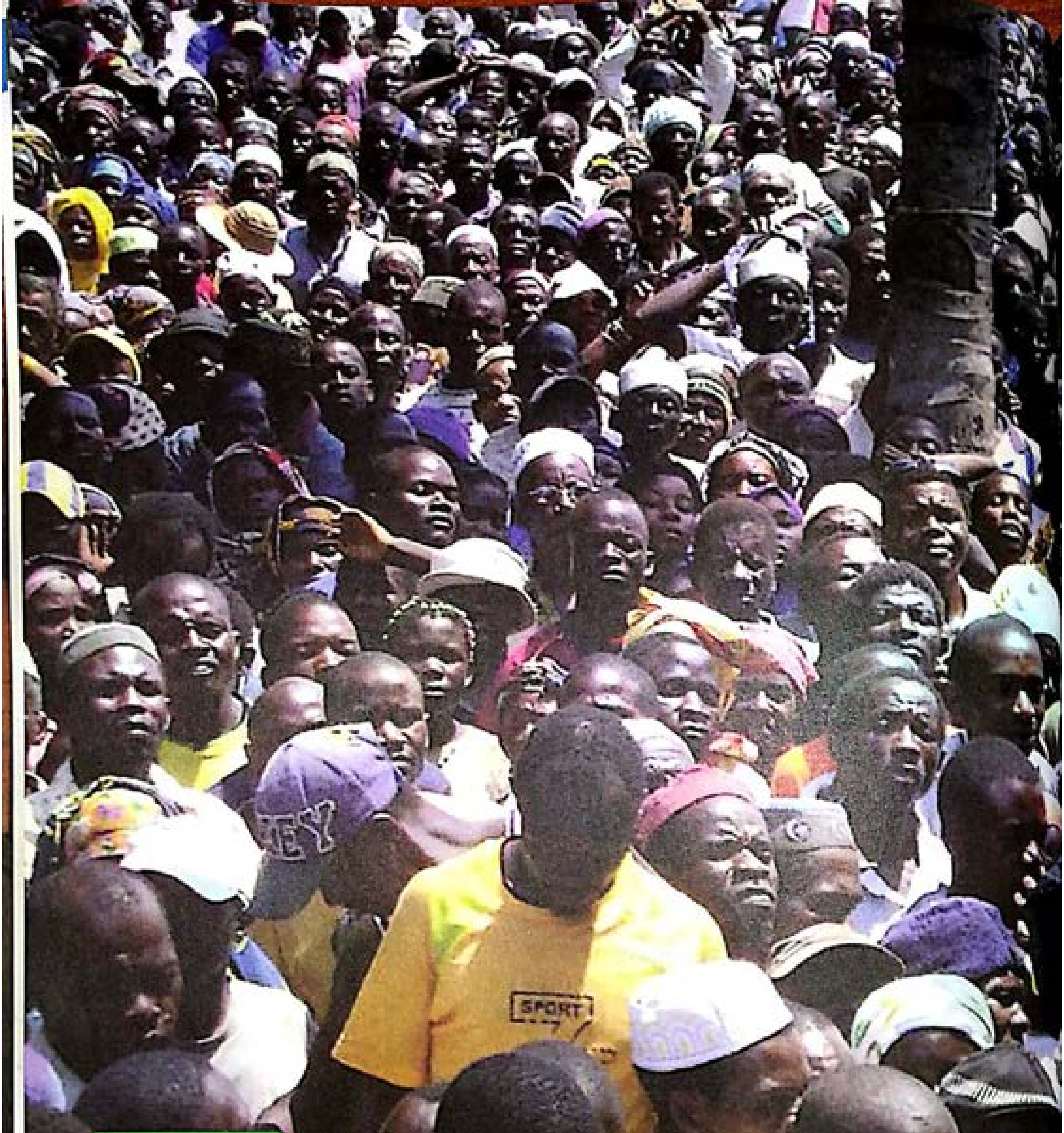
12. Sabe-se que o custo C para produzir x unidades de certo produto é dado por:

$$C(x) = x^2 - 80x + 3\,000$$

Nessas condições, calcule:

a) A quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo.

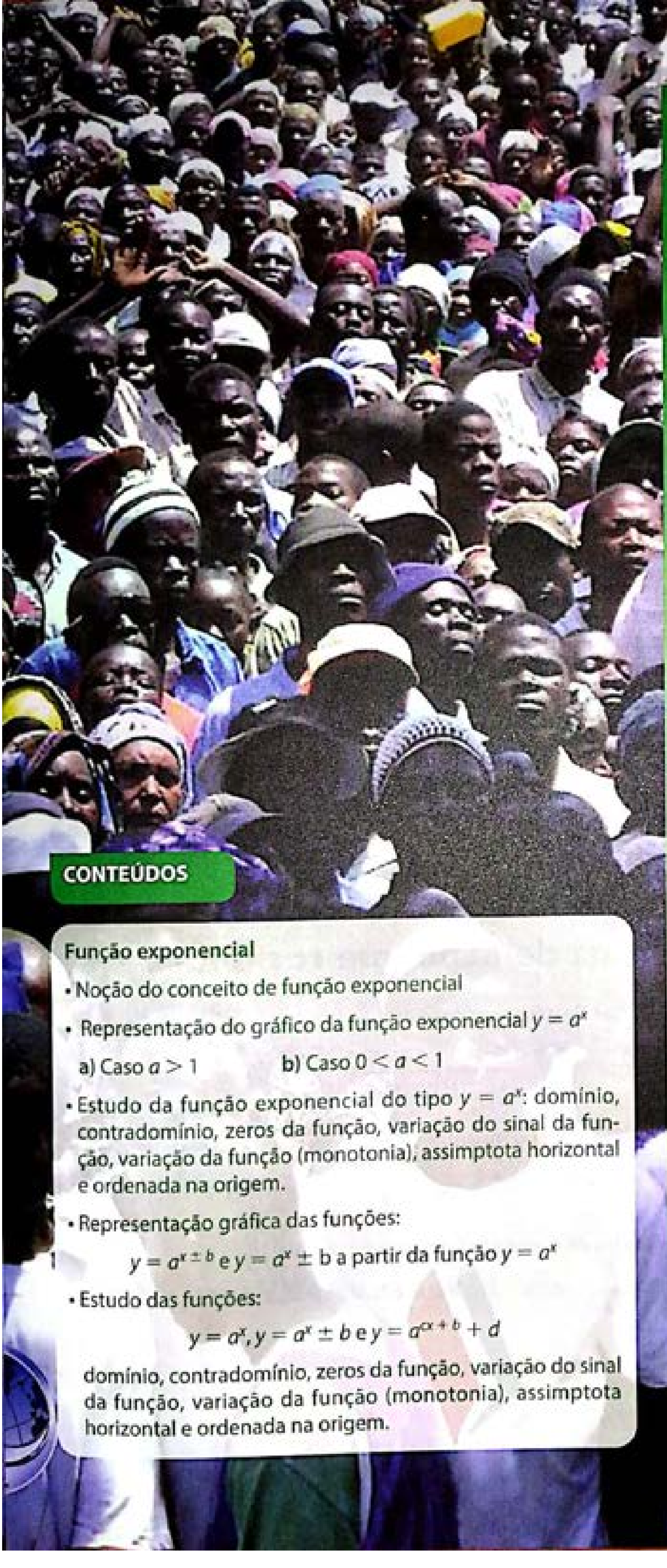
b) O valor mínimo do custo.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar uma função exponencial.
- Representar graficamente uma função exponencial.
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem.
- Identificar a assimptota horizontal.



Função exponencial

UNIDADE 6

Págs. 64 a 81

CONTEÚDOS

Função exponencial

- Noção do conceito de função exponencial
- Representação do gráfico da função exponencial $y = a^x$

  a) Caso $a > 1$ b) Caso $0 < a < 1$
- Estudo da função exponencial do tipo $y = a^x$: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia), assimptota horizontal e ordenada na origem.
- Representação gráfica das funções:

  $y = a^{x \pm b}$ e $y = a^x \pm$ b a partir da função $y = a^x$
- Estudo das funções:

  $y = a^x, y = a^x \pm b$ e $y = a^{\alpha x + b} + d$

  domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia), assimptota horizontal e ordenada na origem.

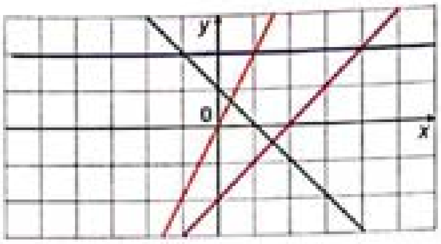
Introdução

Uma função diz-se algébrica quando pode ser definida como soma, produto, quociente, potência ou raiz de um polinómio. Uma função não algébrica diz-se transcendente.

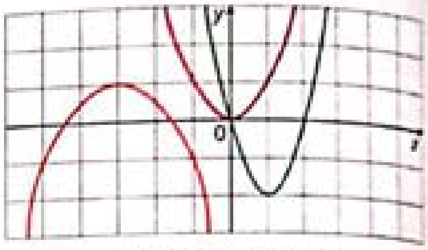
O estudo de funções que desenvolvemos até agora repartiu-se por:

- Definição, domínio, contradomínio, objectos, imagens, representação gráfica e zeros.

Destaca-se em particular o estudo das funções lineares e quadráticas.



Funções lineares



Funções quadráticas

1

Seja $t \mapsto f(t)$ a função que exprime o número de habitantes de uma certa cidade em função do número t de anos contados a partir de 1 de Janeiro de 2000. Explique o significado das expressões seguintes, no contexto da situação:

a) $f(0)$

b) $f(50)$

c) $f(-10)$

d) $f(100) = 2f(0)$

Vamos agora estudar duas famílias de funções não algébricas: a família das funções exponenciais na unidade 6 e a das funções logarítmicas na unidade 7.

As funções exponencial e logarítmica desempenham um papel fundamental na modelação de problemas nas Matemáticas Aplicadas e também na Economia, no Comércio e em áreas do campo social.

São usadas nas finanças para calcular o valor de um investimento, em Demografia para prever a dimensão de uma população, nas Ciências da Saúde para estudar a propagação de epidemias, na Arqueologia para datar achados pré-históricos e em vários domínios da Física e da Química.

Potências de expoente racional

2

Seja $x \mapsto g(x)$ a função que representa o número de pessoas que já viram um certo anúncio, x dias depois de ele surgir, pela primeira vez, na televisão. Identifique o significado de:

a) $g(3) = 12 \times 10^4$

b) $g(x) \geq 10^5 \Leftrightarrow x \geq 2$

c) $g(x+1) = 1{,}2\, g(x)$

- Potências de expoente natural:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}$$

- Potências de expoente nulo e de expoente inteiro negativo:

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

- Potências de expoente fraccionário:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{9}}$

3. $\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{5^{-1}} = 5^{-\frac{1}{2}}$

Potências de expoente real. Propriedades

De um modo geral, podemos afirmar que:

a^r, com $r \in \mathbb{R}$, representa um número real desde que $a > 0$.

Por outro lado, como $a > 0$, também se tem $a^r > 0$, ou seja, $a^r \in \mathbb{R}^+$, $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{R}$.

As propriedades operatórias das potências de expoente racional mantêm-se para as potências de expoente real:

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(a \times b)^x = a^x \times b^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

3

Escreva na forma de potência de expoente natural:

a) 3^{-1}

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

4

Escreva na forma de radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $2^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$

5

Escreva na forma de potência de base natural:

a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{a}}$, $a \in \mathbb{N}$

6

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, qual das expressões seguintes não é equivalente a 3^{a+b}?

A. $3^a \times 3^b$

B. $3^a \div 3^{-b}$

C. $(3^a)^b$

D. $\frac{1}{3^{-a-b}}$

7

Sabendo que $5^x = 2$, qual o valor de:

a) 5^{2x}?

b) 5^{-x}?

c) $5^{\frac{x}{2}}$?

d) 25^{-x}?

e) 5^{x+1}?

8

Sabendo que $3^{x+1} = 6$, calcule o valor de:

a) 3^x

b) 3^{2x}

c) $3^{\frac{x}{2}}$

d) 3^{-x+1}

9

Escreva as expressões seguintes na forma de produto.

a) $5^{x-1} - 5^x$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^{1-x}$

c) $8^{x+1} + 2^{3x-2}$

d) $4^x + 2^{x+1}$

(*) Nota:
Há autores que admitem $a = 1$ como base da função exponencial. É um caso com pouco interesse já que resulta numa função constante.

Exemplos

1. $15^\pi \div 5^\pi \times \frac{1}{3^\pi} = (15 \div 5)^\pi \times 3^{-\pi} = 3^\pi \times 3^{-\pi} = 3^0 = 1$

2. $(8^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 8^{(\sqrt{2})^2} = 8^2 = 64$

3. $2^{\sqrt{3}+1} \div 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = 2$

4. Sendo $2^x = 3$ podemos determinar o valor de

$$2^{x+1},\ 2^{3x},\ 4^x,\ 2^{\frac{x}{2}} \text{ e } 2^{x-3}$$

$$2^{x+1} = 2^x \times 2 = 3 \times 2 = 6$$
$$2^{(3x)} = (2^x)^3 = 3^3 = 27$$
$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = 3^2 = 9$$
$$2^{\frac{x}{2}} = (2^x)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$
$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{3}{8}$$

5. $2^{x+3} - 2^{x+1} = 2^x \times 2^3 - 2^x \times 2^1 = 2^x(8-2) = 2^x \times 6$

6. $3^{1-x} + 3^x = \frac{3}{3^x} + 3^x = \frac{3 + 3^x \times 3^x}{3^x} = \frac{3 + 3^{2x}}{3^x}$

7. $9^x + 3^x = (3^2)^x + 3^x = (3^x)^2 + 3^x = 3^x(3^x + 1)$

8. $25^{x+1} - 5^{2x-1} = 5^{2x+2} - 5^{2x-1} = 5^{2x}\left(25 - \frac{1}{5}\right) = \frac{124}{5} \times 5^{2x} =$
$= 124 \times 5^{2x-1}$

Função exponencial de base *a*

Explicado que está o conceito de a^x para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$, estamos em condições de apresentar a definição seguinte:

Chama-se **função exponencial de base *a*** (constante) e expoente variável x à função de domínio $\mathbb{R}$ definida por:

$$x \mapsto f(x) = a^x$$

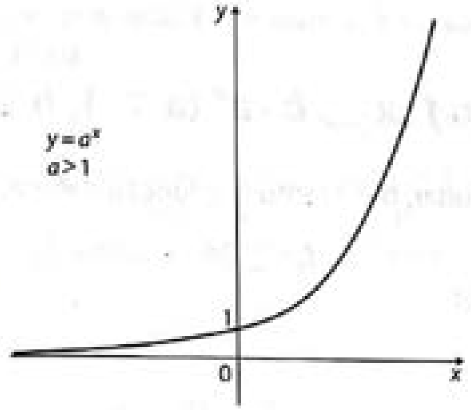
sendo a um número real positivo e diferente de 1(*).

Na seguinte síntese vamos enunciar algumas propriedades das funções exponenciais com a base maior que 1.

Chama-se **função exponencial de base $a > 1$** à correspondência:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to a^x \qquad \text{com } a \in]1, +\infty[$$

A representação gráfica é idêntica à seguinte:



10

Complete a seguinte tabela e utilize-a para fazer, em papel milimétrico, uma representação gráfica da função $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
−3	$2^{-3} = 0{,}125$
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Propriedades

A função exponencial de base $a > 1$ tem, entre outras, as seguintes propriedades:

- O domínio é $\mathbb{R}$ e a função é contínua no seu domínio.
- O contradomínio é $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$[1].
- A função não tem zeros[2].
- A função é estritamente crescente em todo o seu domínio.
- O gráfico intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1.
- O gráfico tem sempre a concavidade virada para cima e passa nos pontos $(0, 1)$ e $(1, a)$[3].
- O crescimento é tanto mais rápido quanto maior for o valor de a.

O facto de a função exponencial de base maior que 1 crescer muito rapidamente justifica a utilização, na linguagem corrente, da expressão «cresce exponencialmente», em situações em que o crescimento é muito rápido.

A exponencial de base maior que 1 cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente.

[1] O contradomínio de uma função é o conjunto das imagens dos elementos do domínio; é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico da função.

[2] A observação do gráfico de uma função da família $f(x) = a^x$, obtido na calculadora ou computador, pode enganar pois parece que o gráfico toca no eixo Ox. O gráfico não intersecta o eixo Ox.

[3] O gráfico de $f(x) = a^x$ passa no ponto $(0, 1)$ porque $f(0) = a^0 = 1$ e passa no ponto $(1, a)$ porque $f(1) = a^1 = a$.

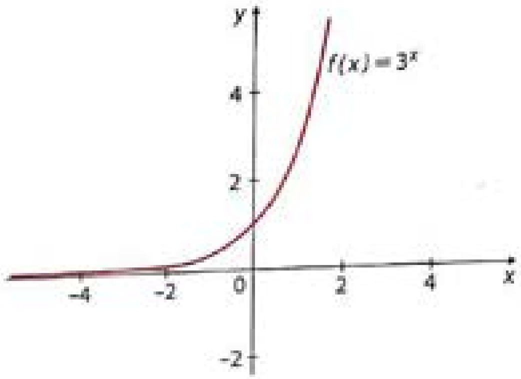
Estudo das propriedades analíticas e gráficas

Funções do tipo $f: x \mapsto b \cdot a^x$ $(a > 1, b \neq 0)$

Comecemos por estudar, por exemplo, a função definida por:

$$f: x \mapsto 3^x$$

Graficamente, temos:



Temos que:

- $D_f = \mathbb{R}$

- Sinal e zeros

  $3^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$: a função f é positiva em $\mathbb{R}$, logo, não tem zeros.

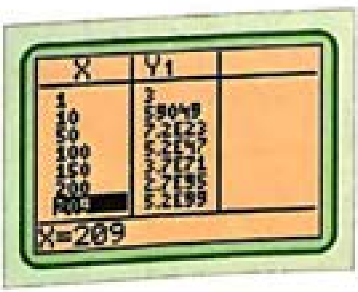
- Variação

  Pela observação do gráfico, temos:

x	$-\infty$	$+\infty$
Variação de f	$\nearrow$	

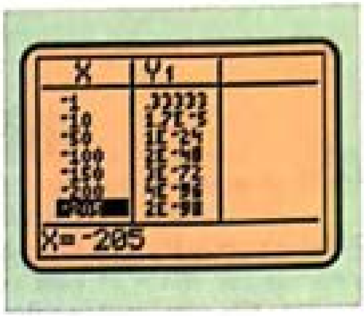
$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

A função é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.



- Com a ajuda da calculadora, podemos conjecturar que se escolhermos valores de x suficientemente grandes, obtemos como imagens valores tão grandes quanto se queira.

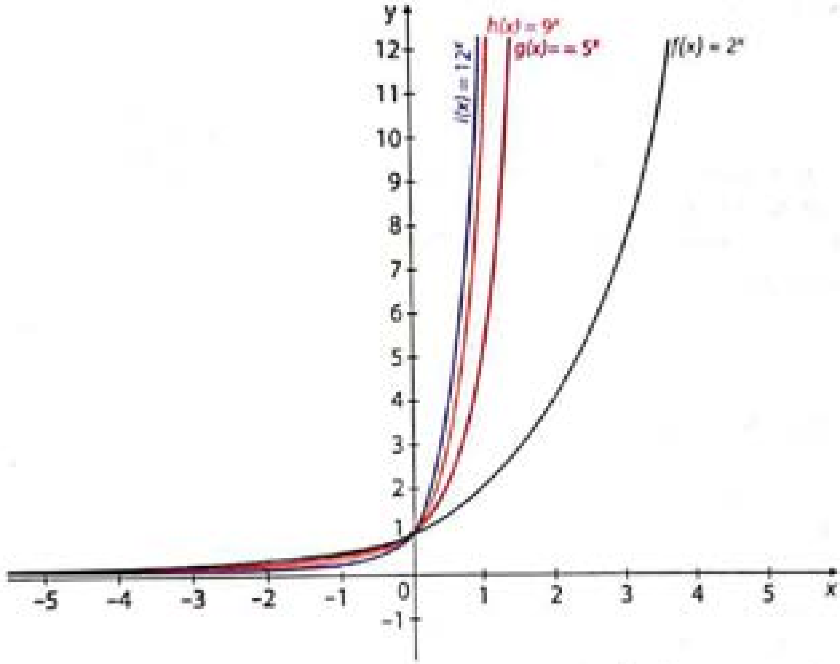
- Se escolhermos para x valores negativos, com valor absoluto muito grande, podemos agora conjecturar que obtemos valores de 3^x tão próximos de zero quanto se queira. A curva aproxima-se cada vez mais do eixo Ox.



- $D'f = \mathbb{R}^+$

Todas as funções exponenciais de base $a > 1$ apresentam características análogas às da função definida por $f(x) = 3^x$.

Observemos algumas representações gráficas:



Quanto maior é a base da exponencial, mais rápido é o seu crescimento.
Para qualquer função exponencial de base a superior a 1:

- $D = \mathbb{R}$
- $D' = \mathbb{R}^+$
- Não tem zeros.
- É positiva em $\mathbb{R}$.
- É estritamente crescente.
- $f(1) = a$.

Transformações do gráfico de uma função exponencial

Relacione o gráfico da função definida por $f(x) = 3^x$ com os gráficos das seguintes funções reais de variável real:

$$g(x) = 3^{x-2}\ ;\ h(x) = 3^{x+1}\ ;\ i(x) = 2 + 3^x\ ;\ j(x) = -3^x\ ;\ l(x) = 3^{\frac{1}{2}x}$$

11

Relacione o gráfico da função definida por $f(x) = 2^x$ com os gráficos das seguintes funções reais de variável real:

$g(x) = 2^{x-1}$

$h(x) = 2^{x+3}$

$i(x) = 4 + 2^x$

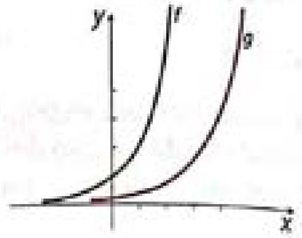
$j(x) = -1 + 2^x$

Apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

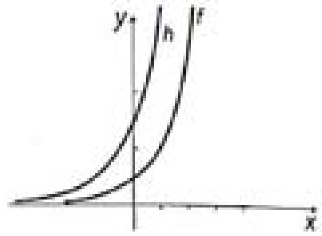
Vejamos:

Representemos as funções *f* e *g*:

Como à variável independente se adicionou −2, o gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico de *f* deslocando este, na direcção horizontal, duas unidades para a direita, correspondendo a uma translação segundo o vector $(2, 0)$.

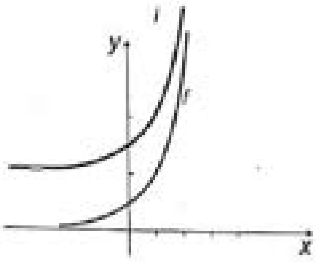


Em relação ao gráfico da função *h*, o raciocínio é análogo, deslocando-se na direcção horizontal mas uma unidade para a esquerda.

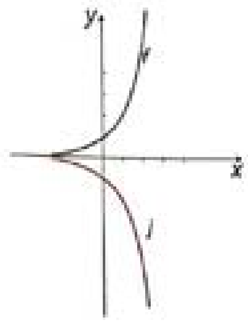


Ao relacionarmos o gráfico de *i* com o gráfico de *f*, constatamos que aquele se obtém a partir do de *f* adicionando duas unidades à variável dependente, ou seja, desloca-se o gráfico duas unidades para cima.

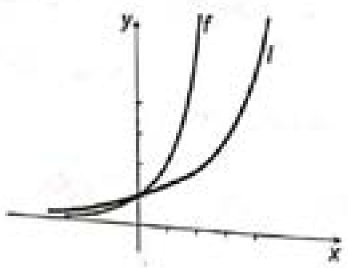
Graficamente, corresponde a deslocar o gráfico de *f* na direcção vertical duas unidades para cima, definindo-se assim uma translação associada ao vector $(0, 2)$.



O gráfico da função *j* obtém-se a partir do gráfico de *f* aplicando a este uma simetria relativamente ao eixo *Ox*.



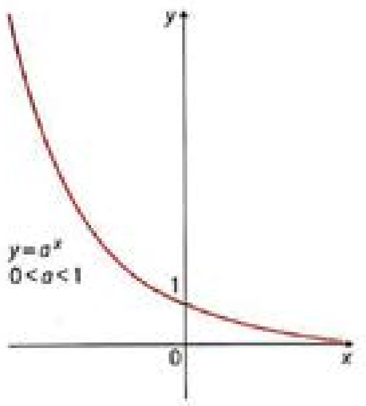
Por último, relacionemos o gráfico de *f* com o gráfico de *l*:



Multiplicou-se a variável independente por um factor entre zero e um, pelo que o gráfico de função l corresponde a uma expansão segundo o factor $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, na direcção do eixo Ox.

Referência às funções exponenciais com a base entre 0 e 1

As funções exponenciais $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, também surgem com muita frequência na modelação de fenómenos em vários domínios. Os gráficos destas funções são todos do mesmo tipo e, portanto, idênticos ao gráfico da função $r(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



As funções exponenciais de base a com $0 < a < 1$ têm, entre outras, as seguintes propriedades.

- São funções estritamente decrescentes em $\mathbb{R}$: é o chamado decrescimento exponencial por ser muito rápido.
- Têm contradomínio $\mathbb{R}^+$ e, portanto, não têm zeros.
- Têm gráficos que não intersectam o eixo das abcissas.
- Os gráficos passam no ponto $(0, 1)$.

Embora seja útil reconhecer algumas características das exponenciais com base entre 0 e 1, o seu estudo exaustivo não faz parte do programa em vigor já que se $f(x) = a^x$ é uma exponencial com a base entre 0 e 1, então $\frac{1}{a}$ é maior do que 1 e tem-se $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

12

Em quantos pontos se intersectam os gráficos de:

a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$?

b) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^8$?

13

Investigue as características da família de funções exponenciais definidas por:

$$y = a^x \text{ com } 0 < a < 1$$

Apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

14

Esboce os gráficos seguintes:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

15

Determine os zeros, caso existam, de:

a) $f(x) = 3^x - 3$

b) $g(x) = \frac{2^{x+3} + 4}{3}$

c) $h(x) = 3^x - 9^x$

d) $r(x) = 1 - \pi^x$

Funções do tipo $f(x) = c \cdot a^{kx}$

Aplicação

1. Crescimento exponencial – bactérias

Uma população de bactérias aumenta 50 % em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Resolução

	(milhões de bactérias)
Ao fim de 1 dia	$1 + 0{,}5 = 1{,}5$
Ao fim de 2 dias	$1{,}5 + 0{,}5 \times 1{,}5 = 1{,}5\,(1 + 0{,}5) = 1{,}5^2$
Ao fim de 3 dias	$1{,}5^2 + 0{,}5 \times 1{,}5^2 = 1{,}5^2\,(1 + 0{,}5) = 1{,}5^3$
....	....
Ao fim de t dias	$1{,}5^t$

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial): $1{,}5^t$.

Já sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de t. Podemos supor que a massa de bactérias (biomassa) cresce de forma contínua com o tempo segundo esta lei. No início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante pode considerar-se $t < 0$.

A função exponencial:

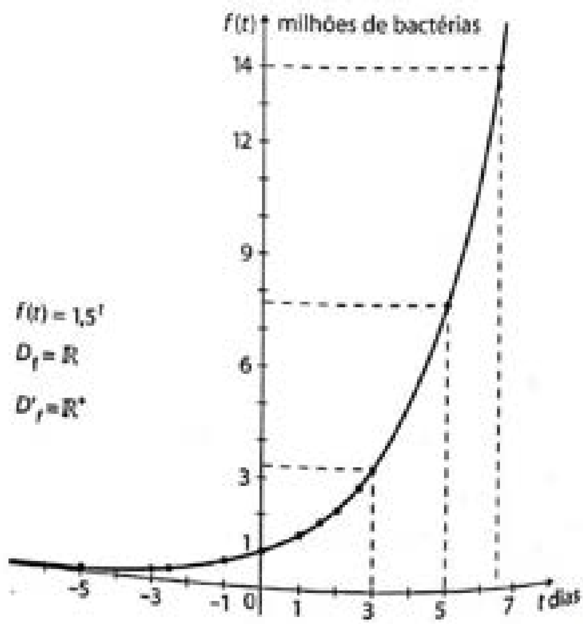
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$t \mapsto 1{,}5^t$$

exprime, em milhões, o número de bactérias existentes ao fim de t dias.

Trata-se de uma exponencial de base maior do que 1, sendo, portanto, uma função crescente – o número de bactérias não pára de aumentar com o decorrer do tempo. No contexto da situação, significa que o número de bactérias ultrapassa qualquer valor, por maior que ele seja.

Vamos obter algumas imagens, recorrendo à calculadora ou não e esboçar o gráfico da função f.

t	$1{,}5^t$
−5	0,13
−3	0,30
−2,5	0,36
−1	0,67
0	1
0,5	1,22
1	1,50
1,5	1,84
2	2,25
2,5	2,76
3	3,38
5	7,59
6,5	13,95



16

a) Considere a equação:

$$3^{2x} + 3^x - 12 = 0$$

Substitui 3^x por y e verifica que obténs uma equação do 2.º grau. Usa-a para resolveres a equação dada.

b) Verifique se as equações seguintes também são equivalentes a equações do 2.º grau e resolva-as:

b.1) $9^{x+1} + 3^{x+2} - 4 = 0$

b.2) $2^{2-x} + 3 = 2^x$

17

Uma cooperativa recolhe a produção excedentária de batata de uma certa região agrícola.

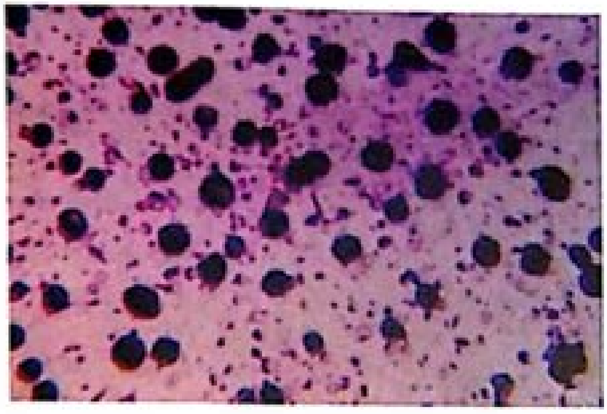
Estudos efectuados permitem concluir que a procura, P, em toneladas, e o preço, p, em meticais, da venda por tonelada para uma fábrica de puré de batata, estão de acordo com o seguinte modelo:

$$P = 10^3 \cdot p^{-0{,}2}$$

Num certo ano, a cooperativa vendeu cada quilograma de batata a 12 centavos. Qual foi, em toneladas, a procura nesse ano? Apresente o resultado arredondado às unidades.

A observação do gráfico confirma os aspectos que já salientámos e evidencia que a função cresce lentamente para valores negativos de t e cresce «vertiginosamente» para valores de t positivos (repare como o crescimento é acentuado para $t > 5$).

Ao fim de 9,5 dias teríamos cerca de 47 milhões de bactérias! A página deste livro mal chegava para marcar essa imagem, mesmo tendo tomado o milhão para unidade: o crescimento da exponencial é rapidíssimo.



18

Uma colónia de protozoários cresce a um ritmo de 0,5% por hora. Se certa contagem deu 2 000 protozoários, quantos haverá dois dias depois?
Indique uma função que sirva de modelo a este crescimento.

20

Uma planta infestante alastra na superfície de um lago. A área coberta aumenta 2% por dia. Certo dia mediu-se e era já de 500 m^2. Qual será a área 10 dias depois? E t dias depois?

2. Crescimento exponencial – coelhos

Fugiram oito coelhos de um barco atracado em Kori, uma pequena ilha onde não havia coelhos nem predadores. Tendo bom clima e muito alimento, reproduziram-se exponencialmente e, passado algum tempo, davam tal prejuízo à agricultura, que o governador mandou fazer a contagem de quantos coelhos havia para estudar as medidas a adoptar.

Contaram 4 500 coelhos. Três meses depois, nova contagem mostrou que já havia 9 900 coelhos.

a) Fazendo fé nestas contagens, proponha uma fórmula que traduza o crescimento desta população de coelhos.

b) Quanto tempo passou desde a fuga dos coelhos para a ilha até à realização da primeira contagem?

Resolução

a) Se o crescimento é exponencial deve ter uma fórmula do tipo $y = c \times a^t$
Como, para $t = 0$, se tem $y = 8$, o valor de c é 8:

$$8 = c \times a^0 = c \times 1 = c$$

Vamos supor que t é expresso em meses.

$$1.^a \text{ contagem: } y_1 = 8 \times a^t = 4\,500$$
$$2.^a \text{ contagem: } y_2 = 8 \times a^{t+3} = 9\,900$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{9\,900}{4\,500} \Leftrightarrow \frac{8 \times a^{t+3}}{8 \times a^t} = \frac{99}{45} \Leftrightarrow a^{t+3-t} = 2{,}2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 2{,}2^{(1)} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2{,}2} \Leftrightarrow a \approx 1{,}3$$

(1) Repare que a incógnita da equação é a base da potência:

$$a^3 = 2{,}2 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2{,}2}$$

$y = 8 \times 1{,}3^t$, com t em meses, é um modelo apropriado para exprimir o número de coelhos em função do tempo que passou depois de chegarem a Kori.

b) De acordo com o modelo estabelecido, queremos determinar o valor de t para o qual $8 \times 1{,}3^t = 4\,500$.

$$8 \times 1{,}3^t = 4\,500 \Leftrightarrow 1{,}3^t = \frac{4\,500}{8} \Leftrightarrow 1{,}3^t = 562{,}5^{(2)}$$

(2) Repare que a incógnita é o expoente da potência:

$$1{,}3^t = 562{,}5 \Leftrightarrow t = ?$$

Podemos enquadrar 562,5 entre potências de base 1,3:

$$1{,}3^{24} < 562{,}5 < 1{,}3^{25}$$

E ainda:

$$1{,}3^{24{,}1} < 562{,}5 < 1{,}3^{24{,}2}$$

Como as funções exponenciais de base maior que 1 são crescentes, a solução da equação $1{,}3^t = 562{,}5$ é um valor entre 24,1 e 24,2 meses, ou seja, a primeira contagem dos coelhos foi feita, aproximadamente, dois anos depois da fuga dos coelhos para a ilha.

3. Juros compostos

Depositámos 1 200 MT numa conta em regime de juros compostos com uma taxa de juro anual de 3%.

a) Quanto teremos no final de um ano?

b) Deduza uma expressão que permita calcular o capital ao fim de n anos.

c) Represente graficamente a evolução da população.

Resolução

a) Assim, o capital acumulado seria:

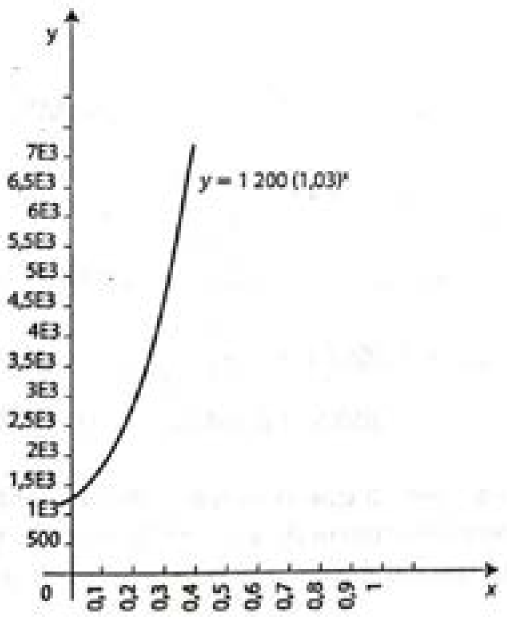
- No início: 1 200 MT
- No fim de um ano: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 1\,236$ MT

b) • No fim de dois anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 1\,273{,}08$ MT

- No fim de três anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^3 = 1\,311{,}27$ MT
- Ao fim de n anos: $1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$

c) Assim, $P_n = 1\,200 \times \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$ representa o capital acumulado ao fim de n anos, sendo $P_0 = 1\,200$ MT (capital inicial) e $r = 1 + \frac{3}{100}$ (aumento que o capital sofre em cada ano).

Este é um exemplo típico de modelo de crescimento exponencial.
Podemos também representar graficamente este modelo:



A fórmula
$$C(t) = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
exprime o capital acumulado ao fim de t anos por um capital C_0, à taxa anual r, se os juros forem capitalizados n vezes por ano.

A fórmula para o cálculo do capital acumulado ao fim de n anos por um depósito, em regime de juros compostos, a uma taxa de juro anual de r%:
$$C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n,$$
sendo C_0 o capital inicial e $n \in \mathbb{N}$ o número de anos.

Para um modelo de crescimento exponencial discreto:
$$P_n = P_0 \times r^n$$

20

Depositaram-se 1 000 MT à taxa anual de 3% em regime de juro composto, capitalizado de 6 em 6 meses.
Calcule o capital acumulado em 5 anos. Qual o montante do juro?

21

Calcule a taxa a que esteve depositado um capital que duplicou em 18 anos. Dê o resultado em percentagem aproximado às décimas.

22

Um capital de 50 000,00 MT foi investido a juro composto de 6% ao mês. Qual será o montante desse capital após 5 meses?

23

Um capital foi investido a juro composto de 5% ao mês. Após 6 meses, o montante será 2 500,00 MT. Qual foi o capital investido?

3.1 Continuando com a questão dos juros, e se, em vez de capitalizarem um só por ano, os juros capitalizarem várias vezes por ano? $P_0 = 1\,200$ MT e $r = 0{,}03$ (3%).

Calcular o capital ao fim de um ano, após a capitalização feita.

Resolução

1 vez por ano: $P_1 = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{1}\right)^1 = 1\,200 \times 1{,}03 = 1\,236$ MT

2 vezes por ano: $P_2 = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right)^2 =$

$= 1\,200 \times 1{,}030225 = 1\,236{,}27$ MT

3 vezes por ano: $P_3 = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{3}\right)^3 =$

$= 1\,200 \times 1{,}030301 = 1\,236{,}36$ MT

12 vezes por ano $P_{12} = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{12}\right)^{12} =$

$= 1\,200 \times 1{,}030416 = 1\,236{,}50$ MT

52 vezes por ano $P_{52} = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{52}\right)^{52} \approx$

(à semana) $\approx 1\,200 \times 1{,}030446 = 1\,236{,}53$ MT

365 vezes por ano $P_{365} = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{365}\right)^{365} \approx$

(ao dia) $\approx 1\,200 \times 1{,}030453 = 1\,236{,}54$ MT

8 760 vezes por ano $P_{8\,760} = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{8\,760}\right)^{8\,760} \approx$

(à hora) $\approx 1\,200 \times 1{,}030454 = 1\,236{,}55$ MT

525 600 vezes/ano $P_{525\,600} = 1\,200\left(1 + \frac{0{,}03}{525\,600}\right)^{525\,600} \approx$

(ao minuto) $\approx 1\,200 \times 1{,}030455 = 1\,236{,}55$ MT

Podemos concluir que à medida que o número de capitalizações por ano aumenta, o acréscimo do capital deixa de ser significativo. Também verificamos que, com o aumento das capitalizações, o capital tende a estabilizar em:

$$1\,200 \times 1{,}030... \approx 1\,236 \text{ MT}$$

ou seja, $\left(1 + \frac{0{,}03}{n}\right)^n$ parece aproximar-se do valor 1,030 à medida que n aumenta muito.

4. Suponha que uma certa instituição bancária pratica um juro de 2,3% ao ano. Escreva uma expressão que permita calcular o capital acumulado por 1 000 MT ao fim de um período x, expresso em anos, e calcule o valor do capital ao fim de 39 meses.

Resolução

A expressão,

$$C(x) = 1\,000 \times \left(1 + \frac{2,3}{100}\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C(x) = 1\,000 \times 1,023^x \text{ com } x \in \mathbb{R}_0^+$$

permite calcular o montante do capital ao fim de x anos.

A função $x \mapsto 1\,000 \times 1,023^x$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, é uma função do tipo:

$$f(x) = c \times a^x \text{ com } a > 1, x \in \mathbb{R} \text{ e } c \text{ constante real.}$$

É o produto de uma constante por uma função exponencial e é uma função muito comum na modelação de vários fenómenos.

Para calcular o capital ao fim de 39 meses, temos que reduzir os meses a anos:

12 meses ——— 1 ano

39 meses ——— x $\qquad x = 3,25$ anos

Então, o capital acumulado ao fim de 39 meses será:

$$C(3,25) = 1\,000 \times 1,023^{3,25} \approx 1\,076,70 \text{ MT}$$

24

Inflação é o aumento generalizado dos preços de bens e serviços, num intervalo de tempo. Num certo país, a inflação manteve-se constante em 12% ao mês durante 5 meses e se nesse período um bem de consumo custava 1 200,00 meticais, quanto deverá custar após os 5 meses para acompanhar a inflação?

25

Se a taxa média de crescimento populacional de um país é de 2,4% ao ano e se a população em 2009 era de 150 milhões de habitantes, qual foi este valor, aproximadamente, no ano 2017, se a taxa continuar a mesma?

Exercícios propostos

1. Um exemplo de uma função injectiva h tal que $h(a+b) = h(a) \times h(b)$ pode ser definida por:

A. $h(x) = x^2$ **B.** $h(x) = x^3$ **C.** $h(x) = 3^x$ **D.** $h(x) = 2x$

2. De uma função de domínio $\mathbb{R}$ sabe-se que:

- $h(5) = 0$
- h é uma função par.

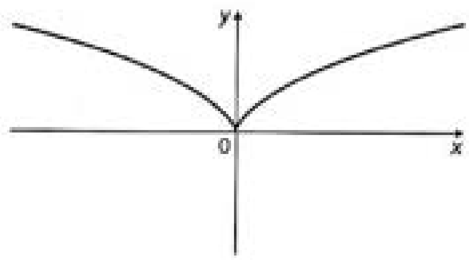
Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = h(x+3)$. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto de zeros de g?

A. $\{-8, 2\}$ **B.** $\{3, 5\}$ **C.** $\{0, 3\}$ **D.** $\{-2, 8\}$

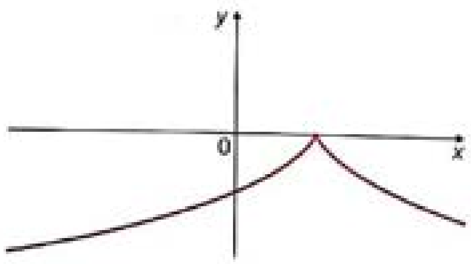
3. Se $2^x = 3$ então o valor de 4^{-x} é:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

4. Se o gráfico da função f é:



Então o gráfico:



pode ser o gráfico de:

A. $y = f(x+2)$ **B.** $y = -f(x-2)$ **C.** $y = f(x) - 2$ **D.** $y = -f(x+2)$

5. Seja $x \mapsto f(x) = a^{kx}$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, uma família de funções de domínio $\mathbb{R}$.
Estuda a monotonia de f em função de a e k, ou seja, explica a influência de a e k na monotonia de f.

6. A equação da procura de um novo jogo lançado no mercado é $q = 10^5 \times (0{,}95)^p$ com $p \in [0, 12]$, dado em meses, $p = 0$ corresponde ao início de Janeiro de 2004.

a) Esboce o gráfico de q.

b) Determine durante quanto tempo a procura foi superior a 6×194.

c) Indique ao fim de quanto tempo (meses/dias) a procura se reduziu 25% em relação ao início de Janeiro.

7. Escreva na forma de potência de expoente natural:

a) 2^{-3} b) $\sqrt{5}^{\,-1}$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$ e) $(-1)^{-5}$

8. Escreva os radicais na forma de potências e as potências na forma de radicais:

a) $5^{\frac{2}{3}}$ b) $2^{-\frac{1}{4}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$

f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (na forma de potência e de radical)

9. Escreva como potência de base natural:

a) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$

10. Se $3^{-x} = 2$, indique o valor de:

a) 3^{2x} b) 3^{x+1} c) 9^{x-1}

11. Se $4^x = 7$, indique o valor de:

a) 4^{-2x} b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$ c) 8^x

12. Escreva a expressão de uma função da família das funções definidas por $f(x) = a \cdot 2^{kx}$:

a) que seja decrescente e com contradomínio $\mathbb{R}^+$;

b) que seja crescente e com contradomínio $\mathbb{R}^-$;

c) cujo gráfico passe nos pontos $A(0, 1)$ e $B(1, 8)$;

d) cujo gráfico passe nos pontos $P(-1, 2)$ e $Q\left(\frac{1}{2}, 16\right)$.

13. Em certa cidade a população cresce 2% ao ano. Sabendo que $p = 10^6\,(1{,}02)^t$ representa a população t anos após o início de 1980, calcule:

a) A população desta cidade no início do ano em que nasceu.

b) A população desta cidade no fim de 2012.

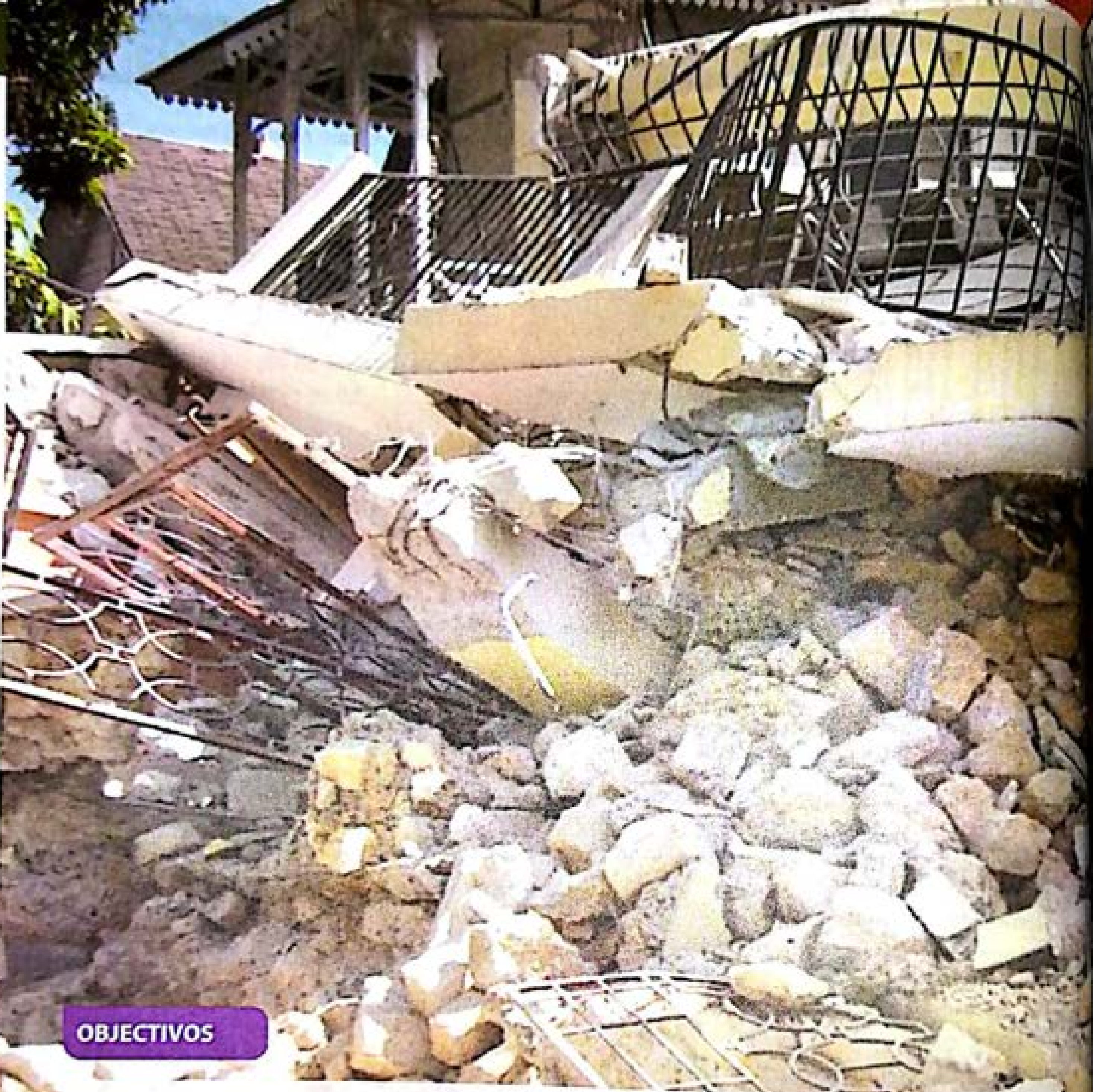
14. Durante vários anos, a população de certa localidade evoluiu segundo a lei $p(t) = 830 \cdot (1{,}06)^t$, com t expresso em anos. No início de 1950 havia 830 habitantes nessa localidade.

a) Quantos habitantes havia nessa localidade no início deste século?

b) Ao fim de quantos anos a população duplicou em relação ao ano de 1950?

c) Modifique a expressão de modo que exprima a população em função da data (ano) x.

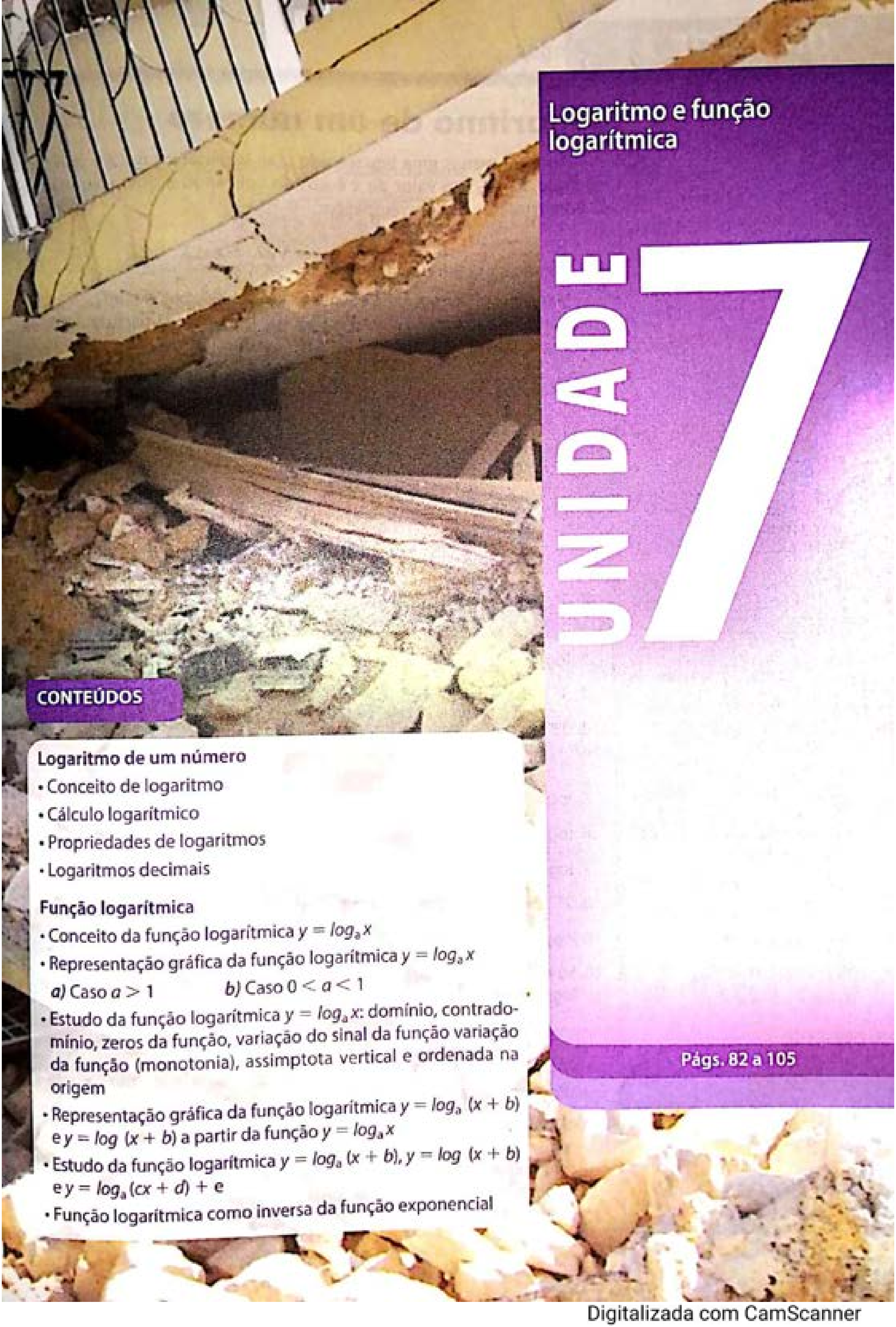
15. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece a função $N(t) = 200\,k^t$, onde N é o número de bactérias, t é o tempo em horas e k é uma constante que depende da bactéria. Depois de 6 horas há um total de 600 bactérias. Calcule a constante k e qual o número de bactérias 24 horas depois de se iniciar a produção.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Definir o conceito de logaritmo de um número.
- Calcular logaritmos aplicando as suas propriedades.
- Identificar uma função logarítmica.
- Representar graficamente uma função logarítmica.
- Determinar: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função, variação da função (monotonia) e ordenada na origem.
- Identificar a assimptota vertical.
- Definir a função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Relacionar os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas.



Logaritmo e função logarítmica

UNIDADE 7

Págs. 82 a 105

CONTEÚDOS

Logaritmo de um número
- Conceito de logaritmo
- Cálculo logarítmico
- Propriedades de logaritmos
- Logaritmos decimais

Função logarítmica
- Conceito da função logarítmica $y = log_a x$
- Representação gráfica da função logarítmica $y = log_a x$

  a) Caso $a > 1$ *b)* Caso $0 < a < 1$
- Estudo da função logarítmica $y = log_a x$: domínio, contradomínio, zeros da função, variação do sinal da função variação da função (monotonia), assimptota vertical e ordenada na origem
- Representação gráfica da função logarítmica $y = log_a (x + b)$ e $y = log\ (x + b)$ a partir da função $y = log_a x$
- Estudo da função logarítmica $y = log_a (x + b)$, $y = log\ (x + b)$ e $y = log_a (cx + d) + e$
- Função logarítmica como inversa da função exponencial

Logaritmo de um número

Ao resolvermos uma equação de grau superior ou igual a dois, por exemplo, $x^3 = 27$, o valor de x é obtido aplicando a operação inversa da potenciação, ou seja, a radiciação:

$$x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = 3$$

Mas, ao resolvermos uma equação exponencial, por exemplo, $3^x = 81$, procuramos mentalmente o valor x a que se deve elevar 3 para obter 81, ou seja, $x = 4$, pois $3^4 = 81$.

À solução desta equação chama-se logaritmo de 81 na base 3:

$$x = \log_3 81 \Leftrightarrow x = 4$$

Logaritmo de um número positivo numa dada base, maior que zero e diferente de 1[1], é o expoente a que é preciso elevar a base para obter esse número.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x,\ b \in \mathbb{R}^+,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$

[1] Mais à frente explicaremos esta restrição.

Exemplos

1. $\log_2 b = \pi \Leftrightarrow b = 2^\pi$
2. $3^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_3 8$
3. $2^{\log_2 5} = 5$
4. $\pi^{\log_\pi 3} = 3$
5. $\log_2 2^4 = 4$
6. $\log_5 5^2 = 2$
7. $\log_3 3^x = x$
8. $2^{3+\log_2 5} = 2^3 \times 2^{\log_2 5} = 8 \times 5 = 40$
9. $\log_6 (2^{\sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{3}}) = \log_6 (6^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$
10. Só existe $\log_2 (x + 3)$ se $x > -3$, porque só os números positivos têm logaritmo e $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.

- Como $1^x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, apenas o número 1 teria logaritmo na base 1. Por isso, não admitimos o 1 como base de logaritmos.
- Já sabe que $\log_a k = b \Leftrightarrow a^b = k$ e esta equação só é possível se $k > 0$ pois, sendo a um número positivo, a expressão a^b representa sempre um número positivo. **Só os números positivos têm logaritmo.** Sendo k positivo, tanto pode ser racional como irracional, já que o contradomínio da função exponencial é $\mathbb{R}^+$.

1

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

a) $5^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_{...}$ ......

b) $(\sqrt{2})^t = 20 \Leftrightarrow t =$ ......

c) $x = \log_3 4 \Leftrightarrow 4 =$ ......

d) $y = \log_a 2 \Leftrightarrow 2 =$ ......

e) $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x =$ ......

Consequências da definição de logaritmo

- Da definição de logaritmo resulta que, em qualquer base:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x$$

- A base a de logaritmos é sempre um número positivo e diferente de 1:

$$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

- Em qualquer base:

$$\log_a 1 = 0 \ \text{ e } \ \log_a a = 1$$

- Em qualquer base, só os números positivos têm logaritmo.

2

Calcule o valor de:

a) $\log_2 (2^{\sqrt{3}} + 2^{\sqrt{3}+1})$

b) $\log_5 (5^{\sqrt{12}} \times 5^{\sqrt{3}})$

c) $2^{\log_2 5 + \log_2 3}$

d) $3^{\log_3 \sqrt{6} - \log_3 \sqrt{2}}$

e) $\log_3 (15^{\sqrt{7}} \div 5^{\sqrt{7}})$

f) $2^{3\log_2 \pi}$

Exercícios resolvidos

1. Calcule os logaritmos seguintes sabendo que são números racionais:

a) $\log_3 9$ b) $\log_2 128$ c) $\log_3 1$ d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

e) $\log_4 8$ f) $\log_4 \sqrt{2}$ g) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$

Resolução

Repare que $\log_a b$ é um número racional se a e b se podem escrever como potências com a mesma base e expoente inteiro:

a) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

b) $\log_2 128 = \log_2 2^7 = 7$

c) $\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = -4$

e) Vamos chamar x a $\log_4 8$, então:

$$\log_4 8 = x \Leftrightarrow 8 = 4^x \Leftrightarrow 2^3 = 2^{2x} \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

f) Seja $x = \log_4 \sqrt{2}$, então:

$$\log_4 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow \sqrt{2} = 4^x \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Então, $\log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

➡

3

Escreva o número 7 com a forma de:

a) potência de base 2

b) logaritmo de base 10

c) potência de base 7

d) potência de base 10

e) potência de base 49

f) logaritmo de base $\sqrt{2}$

4

Calcule:

a) $\log_3 27$ b) $\log_2 32$

c) $\log_{\sqrt{3}} 1$ d) $\log_9 243$

e) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\log_5 0{,}04$

g) $\log_4 \sqrt[4]{2}$ h) $\log_8 \sqrt{128}$

g) Seja $x = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}$

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \sqrt{3}^{\,x} \Leftrightarrow 3^{-2} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x \Leftrightarrow 3^{-2} = 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = -4$$

Então, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$

5

Sem recorrer à calculadora, calcule:

a) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$

b) $\log_2 256$

c) $\log_5 \sqrt{5}$

d) $\log_3 9^{\sqrt{3}}$

2. Calcule:

a) $\log_{10} 1\,000$ b) $\log_4\left(\frac{1}{1\,024}\right)$ c) $\log_{10} 0{,}01$ d) $\log_9 3$

Resolução

a) $\log_{10} 1\,000 = y \Leftrightarrow 10^y = 1\,000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 3$

Assim, $\log_{10} 1\,000 = 3$

b) $\log_4\left(\frac{1}{1\,024}\right) = y \Leftrightarrow 4^y = \frac{1}{1\,024} \Leftrightarrow 4^y = \frac{1}{4^5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4^y = 4^{-5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -5$

Assim, $\log_4\left(\frac{1}{1\,024}\right) = -5$

c) $\log_{10} 0{,}01 = y \Leftrightarrow 10^y = 0{,}01 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^y = 10^{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -2$

Assim, $\log_{10} 0{,}01 = -2$

d) $\log_9 3 = y \Leftrightarrow 9^y = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^2)^y = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{2y} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$

Assim, $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

Logaritmo decimal

O logaritmo de base 10 diz-se **logaritmo decimal**.
Na calculadora, a tecla log corresponde ao logaritmo de base 10.

$$\log x = \log_{10} x$$

Na escrita corrente, são também estas as notações que vamos utilizar para representar o logaritmo de base 10.

Exemplos

1. $\log_{10} 100 = \log 100 = 2$
2. $\log_{10} 0{,}001 = \log 0{,}001 = -3$
3. $\log_{10} 8 = \log 8 \approx 0{,}9$ (valor aproximado com erro inferior a 0,1)
4. $\log \sqrt{5} - 2 \ln 4 \approx -2{,}42$ (valor aproximado com erro inferior a 0,01)

O recurso à calculadora permite obter o valor exacto ou boas aproximações do logaritmo de base 10.

6

Determine valores aproximados, com erro inferior a 0,001 de:

a) $\log_{10} 3{,}5$

b) $\log 20$

c) $\log 0{,}6$

Exercício resolvido

A energia libertada num sismo pode ser dada, em joules, aproximadamente por:

$$E = 1{,}7 \times 10^{kM+5}$$

sendo M a magnitude do sismo.
Determine um valor aproximado de k com erro inferior a uma centésima, sabendo que um sismo de magnitude 5 liberta $2{,}7 \times 10^{12}$ joules de energia.

Resolução

$$E(5) = 2{,}7 \times 10^{12} \Leftrightarrow 1{,}7 \times 10^{5k+5} = 2{,}7 \times 10^{12} \Leftrightarrow 10^{5k+5} = \frac{2{,}7 \times 10^{12}}{1{,}7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{5k} \times 10^{5} = \frac{2{,}7 \times 10^{12}}{1{,}7} \Leftrightarrow 10^{5k} = \frac{2{,}7 \times 10^{12}}{1{,}7 \times 10^{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{5k} = \frac{2{,}7 \times 10^{7}}{1{,}7} \Leftrightarrow 5k = \log_{10} \frac{2{,}7 \times 10^{7}}{1{,}7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\log \frac{2{,}7 \times 10^{7}}{1{,}7}}{5} \Leftrightarrow k \approx 1{,}44$$

O valor de k, com erro inferior a 0,01, é 1,44.

7

Indique o valor de:

a) $\log_2 16 - \log_2 8$ e de $\log_2 (16 \div 8)$

b) $\log_2 8 + \log_2 32$ e de $\log_2 (8 \times 32)$

c) $\log_2 512 - \log_2 64$ e de $\log_2 \frac{512}{64}$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Atenção

- $\log_a (u + v)$ não é igual a $\log_a u + \log_a v$
- $\log_a u - \log_a v$ não é igual a $\frac{\log_a u}{\log_a v}$
- $\log_a u^v$ não é igual a $(\log_a u)^v$
- As propriedades estão enunciadas em $\mathbb{R}^+$ e só aí são válidas.

Seja a a base dos logaritmos (positiva e diferente de 1):

1. O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos factores:

$$\log_a (u \times v) = \log_a u + \log_a v \quad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

Demonstração:

$$a^{\log_a (uv)} = uv \quad \text{e} \quad a^{\log_a u + \log_a v} = a^{\log_a u} \times a^{\log_a v} = uv$$

por definição de logaritmo e pelas propriedades das potências.

Se, na mesma base, as potências são iguais, então os expoentes também são iguais:

$$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v \qquad \text{c.q.d.}$$

8

Use as propriedades dos logaritmos para encontrar o valor exacto de cada uma das expressões sem usar a calculadora:

a) $\log_{10} \sqrt{10}$

c) $\log_4 8 + \log_4 2$

2. O logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos dos termos:

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \quad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

Demonstração:

$$a^{\log_a \frac{u}{v}} = \frac{u}{v} \quad \text{e} \quad a^{\log_a u - \log_a v} = a^{\log_a u} \div a^{\log_a v} = u \div v = \frac{u}{v}$$

por definição de logaritmo e pelas propriedades das potências.

Sendo os resultados iguais, na mesma base, os expoentes também são iguais:

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \qquad \text{c.q.d.}$$

9

Escreva na forma de um único logaritmo:

a) $\log 9 + \log 3$

b) $3 \log_2 5 - 0{,}5 \log_2 25$

c) $\log_2 \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1}{x^2}, x > 0$

d) $\log_2 3 - \log_2 6$

e) $\frac{\log x}{2} - 2, x > 0$

Em particular, $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ visto que $\log_a 1 = 0 \ \forall a > 0 \wedge a \neq 1$

3. O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base:

$$\log_a u^v = v \times \log_a u \quad (u \in \mathbb{R}^+, v \in \mathbb{R})$$

Demonstração:

$$a^{\log_a u^v} = u^v \text{ e } a^{v\log_a u} = (a^{\log_a u})^v = u^v$$

por definição de logaritmo e pelas propriedades das potências.

Sendo os resultados iguais, também os expoentes são iguais:

$$\log_a u^v = v\log_a u \qquad \text{c.q.d.}$$

Exemplos

1. $\log_3(9\times 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 3^2 + \log_3 3^3 = 2+3=5$

2. $\log_2(32\times 64\times 16) = \log_2 32 + \log_2 64 + \log_2 16 =$
$= \log_2 2^5 + \log_2 2^6 + \log_2 2^4 = 5+6+4=15$

3. $\log_6\left(\dfrac{36}{46\,656}\right) = \log_6 36 - \log_6 46\,656 = \log_6 6^2 - \log_6 6^6 =$
$= 2-6=4$

4. $\log_{16}\left(\dfrac{4}{4\,096}\times 256\right) = \log_{16}\left(\dfrac{4}{4\,096}\right) + \log_{16} 256 =$
$= \log_{16} 4 - \log_{16} 4\,096 + \log_{16} 256 =$
$= \log_{16} 16^{\frac{1}{2}} - \log_{16} 16^3 + \log_{16} 16^2 =$
$= \dfrac{1}{2} - 3 + 2 = -\dfrac{1}{2}$

5. $\log(10\cdot x^5) - \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{100}{x^{-3}}\right) =$
$= \log 10 + \log x^5 - \dfrac{1}{2}(\log 10^2 - \log x^{-3}) =$
$= 1 + 5\log x - \dfrac{1}{2}\times 2 + \dfrac{1}{2}(-3\log x) = 5\log x - \dfrac{3}{2}\log x = \dfrac{7}{2}\log x$

6. $\log_a 3 + 2\log_a 5 = \log_a 3 + \log_a 5^2 = \log_a(3\times 5^2) = \log_a 75$

7. $\log_2(8x^2) - \log_2 x = \log_2 8 + \log_2 x^2 - \log_2 x = 3 + \log_2\dfrac{x^2}{x} =$
$= 3 + \log_2 x$

8. $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7 = \log_5 6\cdot\log_4 5\cdot\log_6 7 = \log_4 5^{\log_5 6}\cdot\log_6 7 =$
$= \log_4 6\cdot\log_6 7 = \log_6 7\cdot\log_4 6 = \log_4 6^{\log_6 7} = \log_4 7$

Mais propriedades (mudança de base)

4. O logaritmo de u numa base a é o quociente dos logaritmos de u e de a numa base b:

$$\log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a} \quad (u\in\mathbb{R}^+, b\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$$

10

Indique o domínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \log_2(5x+2)$

b) $g(x) = \log(x^2-10x)$

c) $h(x) = \dfrac{5}{\log_3(x+4)}$

d) $i(x) = \log_2 x + \log_2(x^2-6x+8)$

11

Calcule sem efectuar as operações dentro de parêntesis:

a) $\log_2(8\times 128)$

b) $\log_5(25\times 3\,125)$

c) $\log_3(81\times 729)$

12

Calcule sem efectuar as operações dentro de parêntesis:

a) $\log_2\left(\dfrac{128}{32}\right)$

b) $\log_3\left(\dfrac{2\,187}{27}\times 81\right)$

c) $\log_6\left(\dfrac{1\,296\times 216}{7\,776}\right)$

Demonstração:

$$\log_a u \cdot \log_b a = \log_b a^{\log_a u} \text{ (propriedade 3)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a u \cdot \log_b a = \log_b u \text{ (porque } a^{\log_a u} = u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a} \qquad \text{(repare que } \log_b a \neq 0 \text{ porque } a \neq 1) \text{ c.q.d.}$$

13

Calcule:

a) $\log_{10}(1\,000^2)$

b) $\log_2 \sqrt{32}$

c) $\log_3\left(\frac{27\sqrt{3}}{\sqrt[4]{81}}\right)$

d) $\log_2(16^5) + \log_3\left(\frac{243}{9}\right)$

Exemplos

O cálculo de $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7$ (exemplo 8, em cima) pode ser feito usando a mudança de base:

$$\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 = \cancel{\log_4 5} \cdot \frac{\cancel{\log_4 6}}{\cancel{\log_4 5}} \cdot \frac{\log_4 7}{\cancel{\log_4 6}} = \log_4 7$$

Corolário 1

O logaritmo de u numa base v é o inverso do logaritmo de v na base u:

$$\log_v u = \frac{1}{\log_u v} \quad (u, v \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$$

Demonstração:

$$\log_v u = \frac{\log_u u}{\log_u v} = \frac{1}{\log_u v} \quad \text{(propriedade 5, com } a = v \text{ e } b = u)$$

Corolário 2

$$\log_a u = \frac{\log u}{\log a} \quad (u \in \mathbb{R}^+)$$

Demonstração:

Basta, na propriedade 5, considerar $b = 10$.

É esta propriedade que permite usar a calculadora na determinação de valores (exactos ou aproximados) de logaritmos de números com bases diferentes de 10.

14

Use a «fórmula de mudança de base» para obter valores aproximados dos logaritmos seguintes, com 3 casas decimais.

a) $\log_4 29$

b) $\log_{19} 9$

c) $\log_{26} 0{,}7$

d) $\log_{\sqrt{3}} 18$

e) $\log_2 \frac{3}{5}$

f) $\log_3 \sqrt{0{,}5}$

Exemplos

1. $\log_2 8 = \dfrac{\log 8}{\log 2}$

   O quociente $\dfrac{\log 8}{\log 2}$ é obtido com a calculadora e comprova que

   $\log_2 8 = 3$

2. $\log_5 10 = \dfrac{\log 10}{\log 5} = \dfrac{1}{\log 5}$ e, usando a calculadora, obtém-se um valor aproximado: $\log_5 10 \approx 1{,}43$ (2 c.d.)

Exercícios resolvidos

Simplifique as expressões seguintes com $x, y, t \in \mathbb{R}^+$.

a) $\log_2 (4 \times 2^x)$ b) $3^1 - 3^{2\log_3 t}$ c) $2 \log (10t) - 2 \log t$

Resolução

Nota: Qualquer das simplificações pode ser feita por outros processos.

a) $\log_2 (4 \times 2^x) = \log_2 4 + \log_2 2^x = 2 + x$

b) $3^1 - 3^{2\log_3 t} = \dfrac{3^1}{3^{2\log_3 t}} = \dfrac{3}{3^{\log_3 t^2}} = \dfrac{3}{t^2}$

c) $2 \log (10t) - 2 \log t = 2 (\log (10t) - \log t) = 2 \log \dfrac{10t}{t} = 2 \log 10 = 2$

15

Simplifique as expressões seguintes:

a) $\log_{\sqrt{2}} (8 \times 2^x)$

b) $\log_4 x^2 + \log_2 x$, $x > 0$

c) $\log_b c^2 \times \log_c b^2$, $c, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

d) $\log_a 5 + \log_{\frac{1}{a}} 5$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Função logarítmica

A função que a cada número real positivo x faz corresponder o logaritmo de x na base a chama-se **função logarítmica de base a**:

$$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \smile y = \log_a x$$

Exemplos:

$f(x) = \log_2 x$; $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; $h(x) = \log_3 (x-1)$

16

Determine a de modo que o ponto P pertença ao gráfico de $f(x) = \log_a x$, sendo:

a) $P \smile (3, 2)$

b) $P \smile \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Função logarítmica de base > 1

Consideremos o estudo da função pela elaboração dos gráficos, das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Pela definição de logaritmo $y = \log_2 x \Leftrightarrow 2^x = y$.

Assim sendo será fácil obtermos a tabela da função, $f(x) = \log_2 x$.

Poderá verificar que os valores se obtêm trocando as colunas da tabela $y = 2^x$, já estudaste na unidade anterior.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

17

Esboce o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e obtém, a partir dele, o gráfico de $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

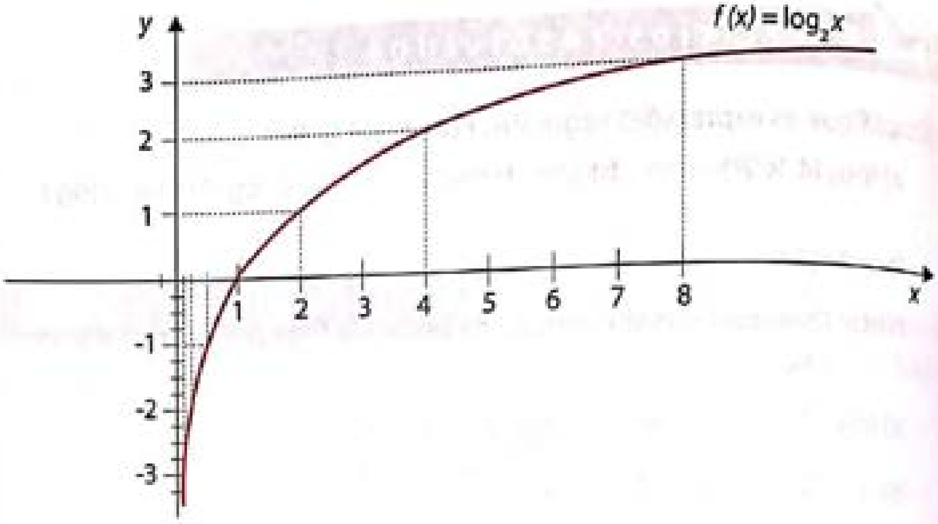
Faça para esta função um registo das principais características, idêntico ao que está feito para as funções logarítmicas de base $a > 1$.

18

Seja f a função definida por:

$f(x) = a + \log_2 x$ com $a \in \mathbb{R}$.

Determine a sabendo que o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2.



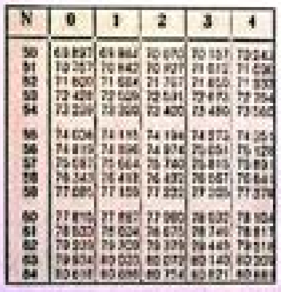
Observando o gráfico, concluímos que:

- O domínio é $\mathbb{R}^+$.
- O contradomínio é $\mathbb{R}$.
- É crescente.
- O gráfico da função não intersecta o eixo das ordenadas.
- A função tem um zero em $x = 1$.
- É positiva para $x \in \,]1, +\infty[$.
- É negativa para $x \in \,]0, 1[$.

NOTA

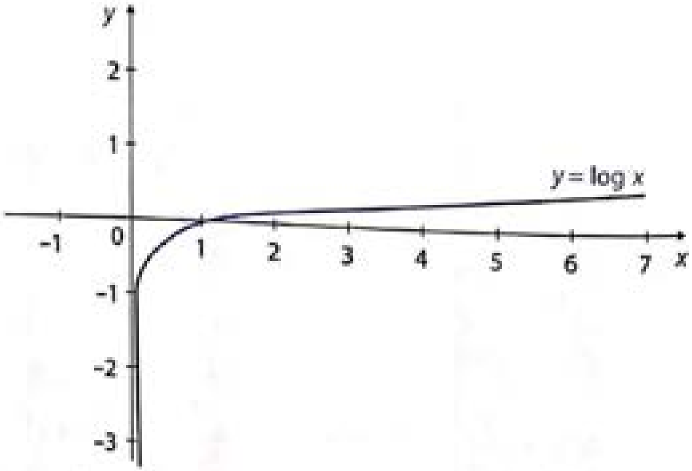
Até à utilização rotineira das calculadoras usavam-se tabelas de logaritmos naturais.

Apresenta-se um extracto de uma dessas tabelas.



Existem imensos fenómenos que são modelados por expressões com logaritmos, sendo o logaritmo de base 10 um dos mais utilizados.

Nos logaritmos de base 10 (logaritmos decimais), $\log_{10} a$ denota-se $\log a$.



Sobre qualquer função logarítmica de base $a > 1$ do tipo $y = \log_a x$, podemos afirmar que:

- O domínio é $\mathbb{R}^+$.
- O contradomínio é $\mathbb{R}$.
- É estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$:
$$x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2, \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$
- A função tem um zero em $x = 1$, ou seja, o ponto $(1, 0)$ pertence ao gráfico.
- É positiva para $x \in]1, +\infty[$.
- É negativa para $x \in]0, 1[$.
- O gráfico da função tem uma assimptota vertical de equação $x = 0$.

19

Investigue as características da família de funções logarítmicas do tipo:

$$y = \log_a x, \text{ com } 0 < a < 1$$

e apresente as suas conclusões num pequeno relatório.

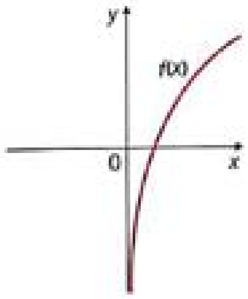
Exercícios resolvidos

1. Sem recorrer à calculadora, estabeleça uma correspondência entre as funções que a seguir se definem pelas suas expressões designatórias e os gráficos que se apresentam. Todos os gráficos podem-se obter a partir do gráfico de $f(x) = \log_2 x$, de domínio $\mathbb{R}^+$, por meio de translações e/ou simetrias.

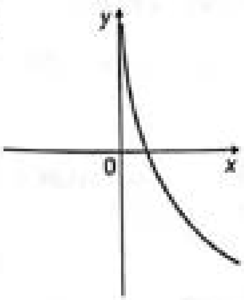
$g(x) = \log_2 (x + 2)$

$h(x) = \log_2 (-x)$

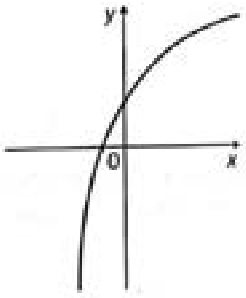
$r(x) = -\log_2 x$



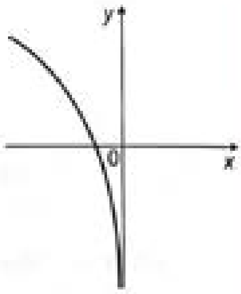
A



B



C



Resolução

$g(x) \rightarrow B$ $\quad$ $h(x) \rightarrow C$ $\quad$ $r(x) \rightarrow A$

20

Determine o domínio de existência das funções definidas por:

a) $f(x) = 4 + \log_2 (1 - x)$

b) $r(x) = \log_3 \dfrac{x + 1}{5 + x}$

c) $m(x) = \dfrac{x}{2 - \log (3 - x)}$

21

Determine, caso existam, os zeros das funções definidas por:

a) $f(x) = 1 - \log_2 (x + 3)$

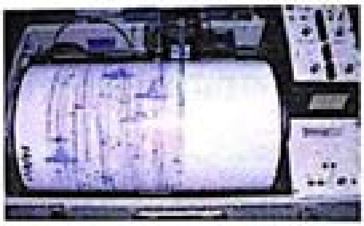
b) $h(x) = x - x \log_3 \left(\dfrac{x + 1}{2}\right)$

c) $r(x) = \dfrac{x - 1}{\log (x - 2)}$

2. A escala de Richter (apelido do cientista americano C. F. Richter) associa à magnitude de um sismo os efeitos que se espera que o sismo produza.

A magnitude de um sismo na escala de Richter é um número entre 1 e 9 que se obtém a partir das leituras nos sismógrafos.

Todos os tremores de terra são comparados com o nível zero de um sismo em que o sismógrafo regista uma amplitude máxima de 0,001 mm, a uma distância de 100 km de epicentro.



A magnitude M de um tremor de terra em que um sismógrafo situado a 100 km do seu epicentro regista uma magnitude máxima de x milímetros é dada por:

$$M(x) = \log(10^3 x)$$

a) Mostre que $M = 1$ para $x = 0{,}01$ mm.

b) Determine a magnitude de um sismo em que o sismógrafo situado a 100 km do epicentro fez um registo máximo de 0,1 mm.

c) Qual o registo máximo de um sismógrafo para um sismo de grau 4,5 na escala de Richter?

d) Qual a diferença de magnitude entre dois sismos sabendo que os sismógrafos acusaram para um deles uma amplitude máxima 5 vezes superior à do outro?

Resolução

a) $M(0{,}01) = \log(10^3 \times 0{,}01) = \log 10 = 1$

b) $M(0{,}1) = \log(10^3 \times 10^{-1}) = \log 10^2 = 2$. A magnitude é 2.

c) $4{,}5 = \log(10^3 x) \Leftrightarrow 10^{4,5} = 10^3 x \Leftrightarrow x = \frac{10^{4,5}}{10^3} \Leftrightarrow x = 10^{1,5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 31{,}6$ mm

d) Seja x_1 o registo máximo do sismógrafo para o sismo mais fraco então $5x_1$ é o registo máximo para o sismo mais forte.

$M(5x_1) - M(x_1) =$

$= \log(10^3 \times 5x_1) - \log(10^3 \times x_1) = \log \frac{10^3 \times 5x_1}{10^3 \times x_1} = \log 5 \approx 0{,}7$

A diferença de magnitude não chega a 1 grau na escala de Richter é aproximadamente 0,7.

22

Seja $M(x) = \log x + 3$ a expressão da magnitude de um sismo em função do registo da amplitude máxima em milímetros feita pelo sismógrafo.

a) Mostre que

$$M(x) = \log(10^3 x)$$

b) Qual a magnitude de um sismo que provoca no sismógrafo um registo máximo de 10 cm?

c) Exprima x em função de M.

d) Qual o registo máximo no sismógrafo num sismo de magnitude 6?

e) Dois sismos têm um grau de diferença de magnitude. Se a maior amplitude registada pelo sismógrafo para o sismo mais fraco é A, qual o registo máximo da amplitude do mais forte?

3. A Física define «intensidade de uma onda sonora» como a quantidade de energia que a onda transmite através de uma certa área. O som menos intenso que o ouvido humano pode detectar, numa frequência de 100 hertz, é cerca de 10^{-12} Wm^{-2}.

O nível $N(I)$, medido em decibéis[4], de um som de intensidade I (em watts por metro quadrado) é definido por:

$$N(I) = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ sendo } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Se, na equação anterior, considerarmos $I = I_0$, obtemos $N = 0$, ou seja, o nível zero corresponde ao limite de audibilidade do ouvido humano.

Seja então $N(I) = 10 \log (10^{12} \times I)$ o nível em decibéis de um som de intensidade I, em watts por m^2.

a) A partir de 100 decibéis é aconselhável proteger os ouvidos. Sabendo que a intensidade do som produzido por um martelo pneumático é 1 W/m^2, averigue se é necessário proteger os ouvidos com auscultadores quando se trabalha com um martelo pneumático.

b) O nível de ruído correspondente ao tráfego numa grande cidade é 90 decibéis. Se o ruído produzido pelo metropolitano tem uma intensidade 10 vezes superior ao produzido pelo tráfego, qual o nível do ruído do metropolitano, em decibéis?

c) Exprime a intensidade I de um som em função do seu nível N.

Resolução

a) $N(1) = 10 \log (10^{12} \times 1) = 10 \log (10^{12}) = 10 \times 12 = 120$

O nível correspondente é 120 decibéis e é, portanto, necessário usar protecção.

b) Seja I_c a intensidade, em W/m^2, do som produzido pelo tráfego citadino.

Então 10 I_c é a intensidade do som produzido pelo metropolitano e:

$$N(10 I_c) = 10 \log (10^{12} \cdot 10 I_c) = 10 (\log(10^{12} I_c) + \log 10)$$
$$= 10 \log (10^{12} I_c) + 10 = N(I_c) \times 10 = 90 + 10 = 100$$

O nível do ruído produzido pelo metropolitano é 100 decibéis.

c) O que se pretende é, afinal, a expressão da função inversa de N. Vamos resolver a equação $N = 10 \log (10^{12} I)$ em ordem a I.

➡

[4] Em homenagem a Alexandre Graam Bell.

23

Seja

$$N(I) = 10 \log (10^{12} I)$$

o nível de um som com intensidade I.

Se a intensidade de um som é 50 vezes superior à intensidade de outro, qual a diferença de nível entre ambos?

$$N = 10\log(10^{12}I) \Leftrightarrow \frac{N}{10} = \log(10^{12}I) \Leftrightarrow 10^{\frac{N}{10}} = 10^{12}I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{\frac{N}{10}}}{10^{12}} = I \Leftrightarrow I = 10^{\frac{N-120}{10}}$$

$I(N) = 10^{\frac{N-120}{10}}$ exprime a intensidade do som em watts por metro quadrado, sendo N o nível do som dado em decibéis.

4. A figura representa um reservatório. Considera que o reservatório está inicialmente vazio e vai ser ligado a uma torneira de débito constante que o vai encher de água.

O reservatório fica cheio ao fim de 24 horas. Admite que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas depois de se começar a encher, é dada por:

$$h(t) = a - \log_2(128 = 4t),\ t \in [0, 24],\ a \in \mathbb{R}^+.$$

Determine o valor de a e a altura do reservatório.

Resolução

Podemos determinar o valor de a atendendo a que o depósito está inicialmente vazio e, portanto, $h(0) = 0$:

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow a - \log_2(128 - 4 \times 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 128 = a \Leftrightarrow a = 7$$

A altura do reservatório é a altura da água ao fim de 24 horas e

$$h(24) = a - \log_2(128 - 4 \times 24) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(24) = a - \log_2 32 \Leftrightarrow h(24) = = a - 5$$

Como $a = 7$ concluímos que a altura do reservatório é 2 metros.

24

A massa de carbono-14 por grama de carbono num fóssil com t anos é dada, em gramas, por:

$$M(t) = \frac{10^{-6}}{2^{\frac{t}{5500}}}$$

a) Sendo $M = 2 \times 10^{-8}$ g qual a idade do fóssil com aproximação ao milhar?

b) Exprima t em função de M e explique o que essa função representa.

Transformações de gráficos de funções logarítmicas

Estudo da função $y = \log_a(cx + d) + e$

1. Funções do tipo $y = \log_a cx$

Dadas as funções $y = \log_2 x$ e $z = \log_2 2x$ faça a representação gráfica de cada função e indique:

a) O domínio e contradomínio da função

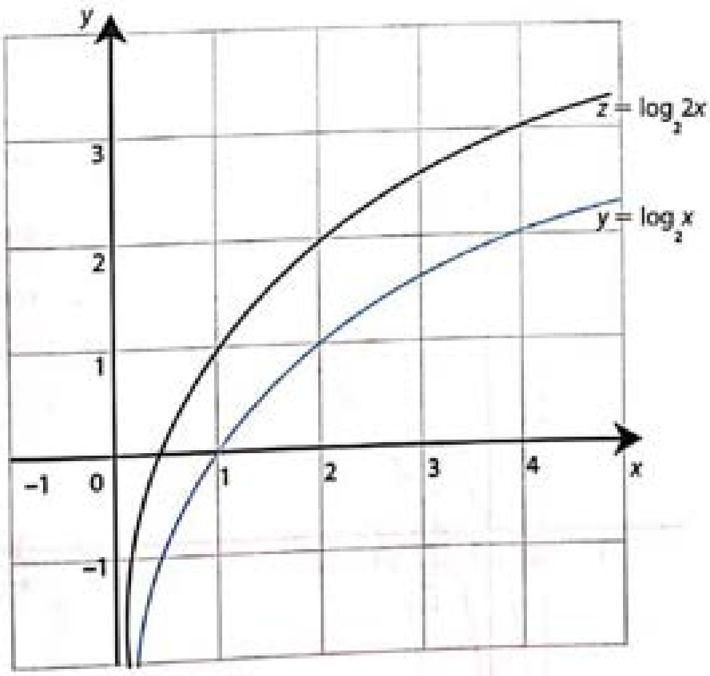
b) Os zeros da função

c) Os valores da função para os quais a função cresce ou decresce.

d) A variação do sinal

Resolução

x	$y = \log_2 x$	$z = \log_2 2x$
4	2	$z = \log_2 8 = 3$
2	1	$z = \log_2 4 = 2$
1	0	$z = \log_2 2 = 1$
$\frac{1}{2}$	-1	0
$\frac{1}{4}$	-2	-2
$\frac{1}{8}$	-3	-3
...	...	...



a) Os dois gráficos têm o domínio D = R e D' = R
b) Para $\log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$ e $\log_2 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
c) As duas funções são monótonas crescentes pois $a > 1$
d) A função $y = \log_2 x$ é negativa para $0 < x < 1$ e positiva para $x > 1$.
A função $z = \log_2 2x$ negativa para $0 < x < \frac{1}{2}$ e positiva para $x > \frac{1}{2}$.

2. Funções do tipo $y = \log_a(cx + d)$

Dadas as funções $h(x) = \log_2(2x - 1)$ e $i(x) = \log_2(2x + 1)$

a) Indique o domínio da função.
b) Determine os zeros de cada função.
c) Estude a monotonia de cada função.
d) Represente no mesmo sistema ortogonal as duas funções.

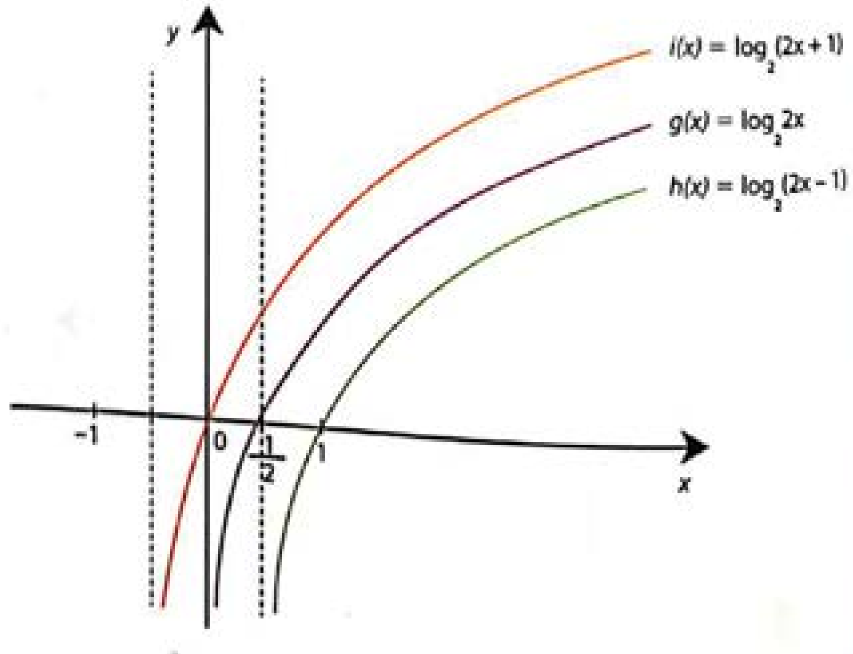
Resolução

a) $D_h = \{x \in R: 2x - 1 > 0\}$ $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$
$D_i = \{x \in R: 2x + 1 > 0\}$ $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

b) $\log_2(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x > 1 = 2^0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
$\log_2(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 2^0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) As funções são monótonas crescentes, pois a base é maior que a unidade.

d) Representação gráfica



Regra geral

O gráfico da função $y = \log_a(2x + d)$ obtêm-se do gráfico da função $y = \log_a cx$ pela translação ao longo do eixo dos x em d unidades para:

- Direita se $d < 0$
- Esquerda se $d > 0$

3. Funções do tipo $y = \log_a(cx + d) = + e$

Considere as seguintes funções $m(x) = \log_2(2x + 1) + 1$ e $n(x) = \log_2(2x + 1) - 1$

a) Indique o domínio da função.

b) Determine os zeros de cada função.

c) Estude a monotonia de cada função.

d) Represente no mesmo sistema ortogonal.

Resolução

a) $D_m = D_n = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0\}$

$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$

$x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

b) Zeros da função m:

$\log_2(2x + 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\log_2(2x + 1) = 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Zeros da função n:

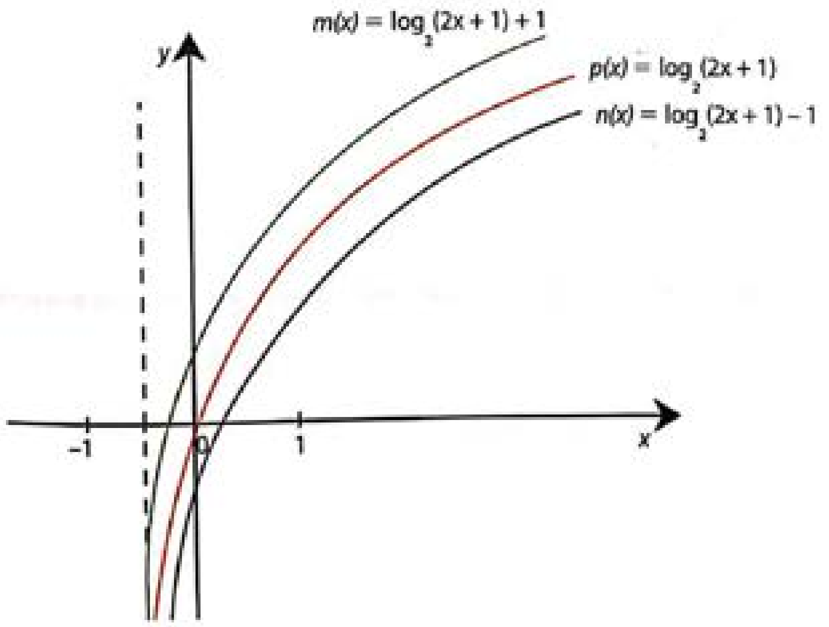
$\log_2(2x + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\log_2(2x + 1) = -1 \Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{1}{2}$

$2 \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$

c) Ambas funções são monótonas crescentes.

d) Representação gráfica



25

Considere as seguintes funções:

$y = \log_a(x - 1) + 1$ e

$y = \log_2(x + 1) - 1$

a) Faça o esboço gráfico das funções.

b) Determine o domínio e o contradomínio das funções.

c) Para que valores de x as funções são crescentes ou decrescentes?

d) Estudar a variação do sinal de cada função.

Regra geral

O gráfico da função $y = \log_a(2x + d) + e$ obtêm-se do gráfico da função $y = \log_a(2x + d)$ pela translação ao longo do eixo dos y em e unidades para:

- Baixo se $e < 0$
- Cima se $e > 0$

Exercícios resolvidos

Indique para cada uma das funções seguintes, o domínio de existência, o contradomínio e os zeros.

$g(x) = \log_2(x + 2)$

$h(x) = \log_2(-x)$

$r(x) = -\log_2 x$

Resolução

Função g(x)
$Dg = D'g = R$
Zeros:
$g(x) = \log_2(x + 2)$
$\log_2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^0 = x + 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -2 + 1$

Função g(x)
$Dh = D'h = R$
Zeros:
$h(x) = \log_2(-x)$
$\Leftrightarrow 2^0 = -x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1$

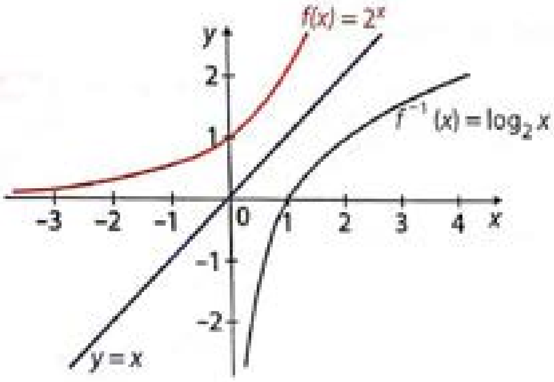
Função r(x)
$Dr = D'r = R$
Zeros:
$r(x) = \log_2 x$
$\Leftrightarrow 2^0 = x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1$

Função logarítmica como inversa da função exponencial

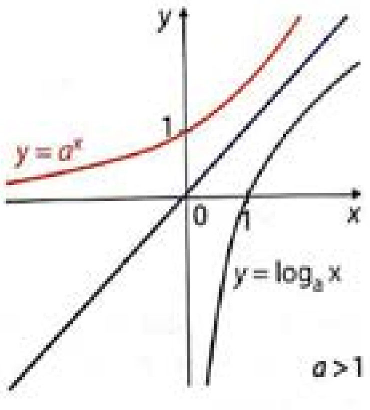
Dada a função exponencial $f(x) = 2^x$, sabemos também que pela definição do logaritmo de um número, a função inversa de f é a função logarítmica dada na base 2:

$$f^{-1}(x) = \log_2 x$$

O gráfico de f^{-1}, gráfico da função inversa de f, obtém-se a partir do gráfico de f por meio de uma simetria relativamente à recta $y = x$, bissectriz dos quadrantes ímpares. Se o ponto (a, b) pertence ao gráfico de f, então o ponto (b, a) pertence ao gráfico de f^{-1}.



No caso geral será:



Recorda

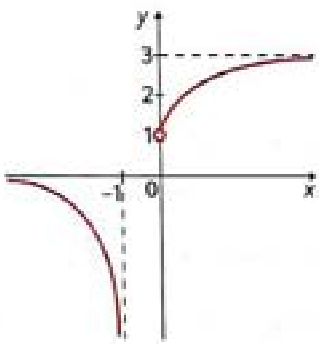
O domínio de existência, em $\mathbb{R}$, de uma função f é o conjunto dos números reais para os quais $f(x)$ representa um número real.

Exemplos:

- $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ se $f(x) = \frac{1}{x-2}$ porque $\frac{1}{x-2}$ não representa um número real se $x = 2$.
- $D_f = [1, +\infty[$ se $f(x) = \sqrt{x-1}$ porque $\sqrt{x-1}$ não representa um número real se $x < 1$.
- $D_f =]-\infty, 3[$ se $f(x) = \log_a(3-x)$ porque $\log_a(3-x)$ só representa um número real se $3 - x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

26

Seja f a função representada graficamente:



Esboce no mesmo referencial o gráfico da função inversa de f (função f^{-1}) e indique o seu domínio e contradomínio.

1. Um novo modelo de telemóvel desvaloriza 5% em cada mês. Se o seu valor inicial é 450 MT, qual é o seu valor, arredondado ao MT, ao fim de um ano?

   A. 127 MT   B. 180 MT   C. 225 MT   D. 243 MT

2. Se $\log_2 a = 3$, então $\log_4 a$ é igual a:

   A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 6   D. 9

3. Um exemplo de função f tal que $f(a+b) = f(a) \times f(b)$, $\forall\, a, b \in D_f$ pode ser a função f definida por:

   A. x^2 B. 2^x C. $\log_2 x$ D. $2x$

4. Indique, justificando, o valor lógico das afirmações seguintes:

   A. 2^x representa um número positivo se e só se x é um número positivo.

   B. $\log(a \times b)$ só representa um número real se a e b forem números positivos.

   C. O logaritmo de um número positivo pode ser negativo.

5. A intensidade I, em decibéis, de um som audível pode ser dada por $I(P) = 170 + 10 \log P$, onde P é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.

   a) Determine a intensidade de um som cuja potência é 10^{-8} na unidade considerada.

   b) Sabe-se que um som de intensidade superior ou igual a 100 decibéis é prejudicial à saúde. Calcule a partir de que potência devem ser usados meios de protecção auditiva.

   c) Dois sons de potências P e P_1 são emitidos por uma mesma fonte. Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo, mostre que $\frac{P}{P_1^2} = 10^{17}$.

   d) Determine o valor de x tal que $I(xP) = I(P) + 30$.

6. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = \log_4 x$. P é o ponto do gráfico de f com ordenada $\frac{1}{2}$. A abcissa do ponto P é:

   A. 2   B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}$

7. Numa fábrica de confecções, o número N de peças que um operador de determinada máquina produz por hora depende do número t de dias de experiência, de acordo com a lei:

$$N(t) = 40 - 32 \times 2^{-0{,}05t}$$

   a) Qual o número de peças que é de esperar que um operário sem experiência produza por hora?

   b) Um operário que produza mais de 256 peças num dia tem um prémio de produtividade. Sabendo que nessa empresa um dia de trabalho tem 8 horas, quantos dias de experiência deve um operário ter, no mínimo, para aspirar a esse prémio?

   c) Exprime t em função de N e explique o que essa expressão representa.

8. O tempo h, em horas, que uma bebida tirada do frigorífico a uma temperatura de T graus centígrados demora a atingir a temperatura ambiente A, pode ser dado pela função:

$$h = 2\log_2 \frac{A-T}{2}\text{, sendo } 0 < T < A - 2$$

a) Determine A sabendo que uma bebida que foi tirada do frigorífico a uma temperatura de 2 °C, demorou 8 horas a atingir a temperatura ambiente.

b) Supondo que a temperatura ambiente é nove vezes superior à do interior do frigorífico, mostre que h pode ser dado por: $h = 4 + \log_2 T^2$.

9. A zona de pele inflamada pela picada de um insecto cresce em círculos de centro no ponto onde ocorreu a picada. Supõe que t segundos depois de ocorrer a picada, a área de pele inflamada pode ser dado, em cm^2, por:

$$A(t) = a - \log_2\left(\frac{16}{b+t}\right)$$

sendo a e b números reais positivos.

a) Determine a e b supondo que seis segundos depois da picada do insecto a zona inflamada tem 2 cm^2 de área.

b) Os parâmetros a e b variam de acordo com o tipo de pele e a espécie do insecto. No caso de pele de criança e para uma certa espécie de insecto, tem-se $a = 3$ e $b = 2$. Quanto tempo depois da picada do insecto, a área inflamada atinge um sinal situado a cerca de 1,1 cm do local da picada do insecto? Apresente o resultado arredondado ao segundo.

10. Identifique o número representado por:

a) $\log_2 2^{\sqrt{5}}$ b) $\log_{27} \frac{1}{81}$ c) $5^{\log_5 \sqrt{7}}$

d) $\log_{\frac{1}{4}} 512$ e) $\log_{\pi}(\pi^{\sqrt{2}} : \pi^3)$ f) $3^{\log_3 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt{8}}$

11. Se $\log_4 a = x$, calcule, em função de x:

a) $\log_4 (4a)$ b) $\log_4 \frac{a}{2}$ c) $\log_4 a^3$

d) $\log_4 (8\sqrt{a})$ e) $\log_2 \frac{1}{a}$ f) $\log_4 \frac{a^2}{64}$

12. O nível do ruído provocado por uma onda de intensidade x W/m² é dado, em decibéis, por:

$$R(x) = 10\log\frac{x}{k},\ k \in \mathbb{R}^+$$

a) Se um som é 100 vezes mais intenso que outro, qual a diferença entre os seus níveis de ruído?

b) Se uma pessoa em conversa com outra provoca um ruído de 70 decibéis e a sussurrar ao ouvido provoca um ruído de 20 decibéis, qual a razão entre as intensidades da conversa e do sussurro?

c) Em que percentagem se tem que reduzir a intensidade de um som para que o nível desça 5 decibéis? (Apresente o resultado arredondado às unidades.)

13. Um tremor de terra de magnitude M na escala de Richter liberta, no epicentro, uma energia E dada, em joule, aproximadamente pela equação:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{2{,}5 \times 10^4}$$

a) Mostre que $M \approx 0{,}67 \log E - 2{,}93$.

b) Exprima E em função de M.

c) Calcule a energia libertada por um sismo de magnitude 4 e por outro de magnitude 5,6 e mostre que o segundo liberta uma energia aproximadamente 251 vezes superior ao primeiro.

d) Calcule $M_1 - M$ sendo M e M_1 as magnitudes correspondentes às energias E e E_1 com $E_1 = 2E$ (apresente o resultado aproximado às décimas).

14. Sem recorrer à calculadora esboça, no mesmo referencial, representações gráficas dos seguintes pares de funções e indique o número de pontos em que os gráficos se intersectam.

a) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x - 1$

b) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x$

c) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = x - 2$

d) $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \frac{x-2}{2}$

15. Num Instituto de Pesquisa Ecológica estudou-se a relação entre o oxigénio consumido por pequenos animais e o respectivo peso. Encontrou-se a fórmula aproximada:

$$\log y = \log 6 + 0{,}9 \log x$$

sendo y o volume de oxigénio consumido em microlitros por hora e x o peso do animal em gramas.

a) Escreva a expressão simplificada de y em ordem a x e a de x em ordem a y.

b) Se y_1 é o volume de oxigénio consumido por um animal de peso $x_1 = 10x$, calcule $\frac{y_1}{y}$, com aproximação às décimas, e interprete esse valor no contexto da relação descrita.

16. A procura de um certo produto é dada por:

$$P = 12^{1 - 0{,}1Q}$$

a) Como evolui a procura quando Q toma valores muito grandes?

b) Exprima Q em função de P e indique o seu domínio.

17. Dois reservatórios A e B começam a despejar no mesmo instante. Admita que a altura da água (em metros) em cada um dos reservatórios t horas depois de começarem a despejar é dada, respectivamente, por:

$$h_A(t) = \log_2\left(8 - \frac{t}{2}\right) \text{ e } h_B(t) = \log_4(8 - t) + 2$$

a) Determine para cada reservatório a altura inicial da água e o tempo que demora a despejar (em horas e minutos).

b) Mostre, por via analítica, que houve um instante em que a altura da água nos dois reservatórios era igual e indique, em horas e minutos (arredondado às unidades), quanto tempo depois de começar o despejo ocorreu tal situação. Qual era a altura da água?

Exercícios propostos

18. Se $\log_a x = p$ então $\log_a x^2$ é igual a:

A. p^2 B. $\sqrt{p}$ C. $2p$ D. $\frac{p}{2}$

19. Se $\log_a b = c$, então $\log_a \sqrt{b}$ é igual a:

A. $\frac{\sqrt{c}}{2}$ B. $\frac{c}{2}$ C. $\sqrt{c}$ D. $\frac{2}{c}$

20. Se $\log_6 2 = b$, qual das expressões representa $\log_6 (4 \times 12)$?

A. b^3 B. $b^2 + 6b$ C. $3b + 1$ D. $24b$

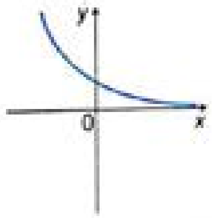
21. Sabendo que $\log_a c = 3{,}5$, o valor de $a^{3\log_a 2} - \log_a\left(\frac{a}{c}\right)$ é:

A. 3,5 B. 4,5 C. 8,5 D. 10,5

22. Sejam a, b e c três números reais tais que $c = \frac{2}{ab}$. O valor de $\log_2 (a^2\, b^2\, c^2)$ é:

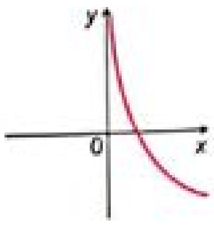
A. 2 B. 4 C. 16 D. 64

23. Considere a função g representada graficamente:

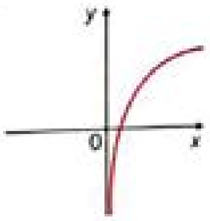


Qual das seguintes pode ser a representação gráfica da função inversa de g?

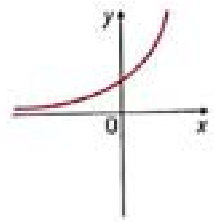
A.



B.



C.



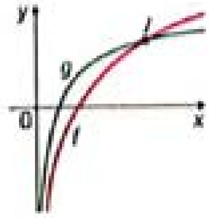
D.

24. Seja $f(x) = \log_2 (8x)$. Qual dos pontos seguintes não pertence ao gráfico de?

A. $\left(\sqrt{2}, \frac{7}{2}\right)$ B. $(5, 3 + \log_2 5)$ C. $(3, 3\log_2 3)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

25. Na figura estão representadas graficamente as funções f e g definidas em $\mathbb{R}^+$ por:

$f(x) = \log_3 x^2 - 1{,}5$ e $g(x) = \log_3 x$.



A abcissa do ponto I é:

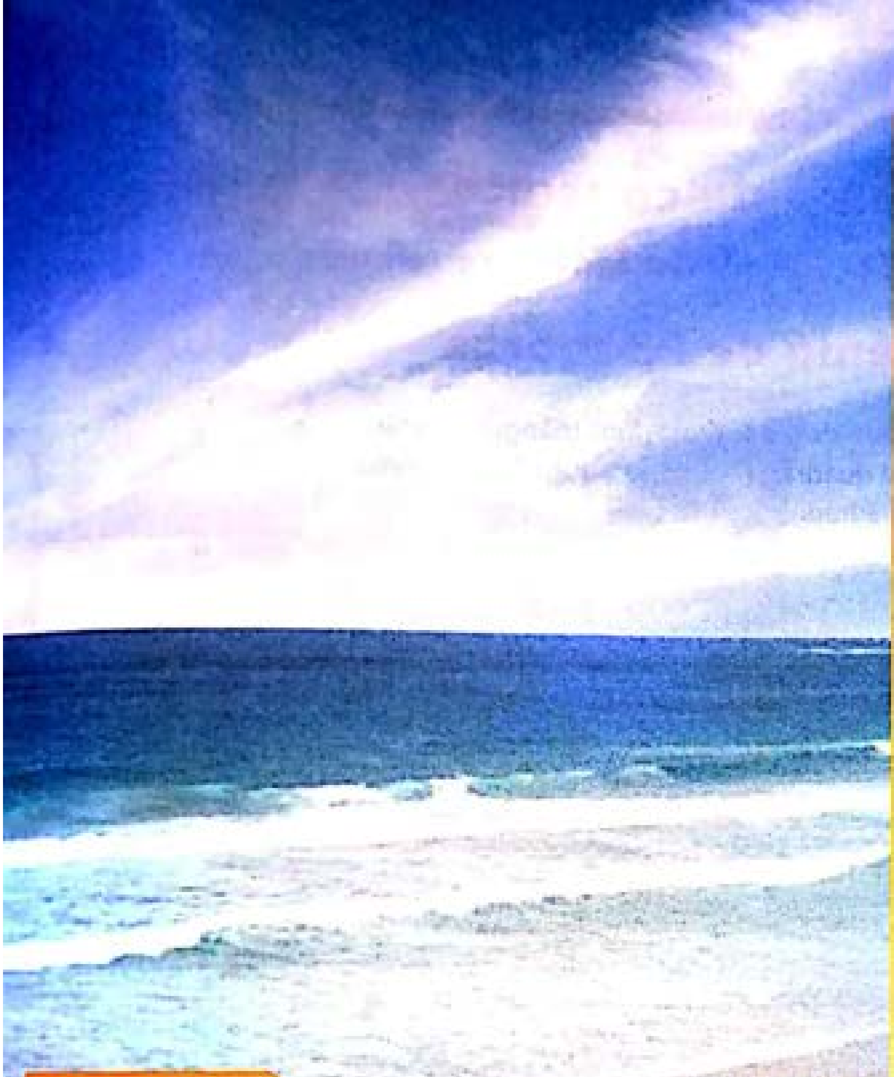
A. 1,5 B. $1{,}5^3$

C. 5,2 D. $3\sqrt{3}$

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Calcular as razões trigonométricas de um triângulo (seno, co-seno, tangente e co-tagente) de um ângulo agudo.
- Determinar um ângulo agudo, conhecida uma das razões trigonométricas.
- Determinar as razões trigonométricas de ângulos especiais: 0º, 30º, 45º, 60º e 90º.
- Relacionar as razões trigonométricas de ângulos complementares.
- Determinar as razões trigonométricas aplicando a relação fundamental entre seno e co-seno de um ângulo.
- Resolver equações trigonométricas simples.
- Determinar os elementos (lados e ângulos) de um triângulo rectângulo aplicando as razões trigonométricas.
- Resolver problemas práticos associados à vida real.
- Representar um ângulo qualquer num círculo trigonométrico.
- Converter a medida de um ângulo de graus em radianos e vice-versa.



Trigonometria

UNIDADE 8

Págs. 106 a 151

CONTEÚDOS

Revisão de conceitos sobre geometria

- Teorema de Pitágoras
- Triângulos semelhantes
- Critérios de semelhança

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

- Razões trigonométricas: seno, co-seno, tangente e co-tagente
- Relações entre as razões trigonométricas de ângulos agudos
- Razões trigonométricas de ângulos especiais: 0°, 30°, 45°, 60° e 90°
- Identidade fundamental da trigonometria
- Uso de tabelas trigonométricas de 0° a 90°
- Resolução de triângulos rectângulos
- Resolução de problemas concretos aplicando a resolução de triângulos rectângulos
- Resolução de equações trigonométricas do tipo sen $x = a$; cos $x = a$; tg $x = a$; e cotg $x = a$; sendo $a \in \mathbb{R}$ e x é um ângulo do 1.º quadrante.

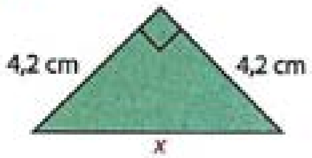
Revisão de conceitos sobre geometria

1

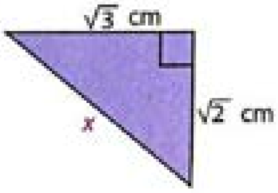
Calcule a hipotenusa (x) em cada um dos triângulos.

a)

b)

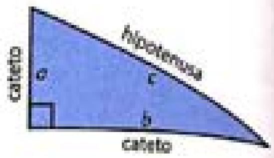


c)



Teorema de Pitágoras

- **Teorema de Pitágoras**: num triângulo rectângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Exercícios resolvidos

1. No triângulo $[ABC]$: $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm.

Será que o triângulo é rectângulo?

Resolução

Se o triângulo for rectângulo, o maior lado é a hipotenusa e verificar-se-á o Teorema de Pitágoras.

Então:

$$9^2 = 7^2 + 4^2$$
$$81 = 49 + 16$$
$$81 = 65$$

Falso, não se verifica o Teorema de Pitágoras.

Logo, o triângulo $[ABC]$ não é triângulo rectângulo.

Figuras semelhantes

- **Figuras semelhantes** têm a mesma forma.
- **Duas figuras dizem-se semelhantes** quando são geometricamente iguais ou quando uma é ampliação da outra.
- **Razão de semelhança** (r) ou **escala** é o quociente de dois comprimentos correspondentes, em figuras semelhantes.
  - Se $r = 1$ – as figuras são **geometricamente iguais**.
  - Se $r > 1$ – a semelhança é uma **ampliação**.
  - Se $0 < r < 1$ – a semelhança é uma **redução**.
- Construção de figuras semelhantes: **usando a mesma rede, redes diferentes e método da homotetia.**
- **Dois polígonos dizem-se semelhantes** quando têm ângulos geometricamente iguais e lados correspondentes proporcionais.

2

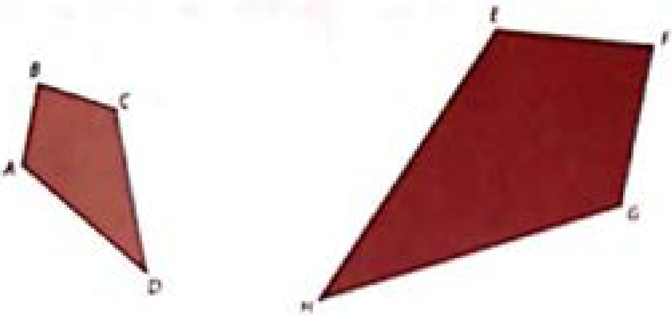
Acerca dos triângulos $[MAR]$, $[LUA]$ e $[SOL]$ sabe-se que:

- $\triangle[MAR]$ $\overline{AR} = 16$ cm $\overline{MA} = 30$ cm $\overline{MR} = 34$ cm
- $\triangle[SOL]$ $\overline{OL} = 9$ cm $\overline{SO} = 7$ cm $\overline{LS} = 11$ cm
- $\triangle[LUA]$ $\overline{UA} = 1{,}2$ cm $\overline{LU} = 3{,}5$ cm $\overline{AL} = 3{,}7$ cm

Averigue se são triângulos rectângulos.

Exemplos

Verifique, usando transferidor e régua, que [*EFGH*] é uma ampliação a 200% de [*ABCD*].



A **razão de semelhança** é a razão entre dois lados correspondentes, que neste caso é 2, isto é,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{AD}} = 2$$

Critérios de semelhança de triângulos

Às **condições mínimas** que garantem a semelhança de dois triângulos chamam-se **critérios** ou **casos de semelhança** de triângulos.

Dois triângulos são semelhantes se tiverem:

- Dois ângulos iguais.
- Três lados de um proporcionais aos três lados do outro.
- Dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

Exercícios resolvidos

1. Averigue se os triângulos [*LUZ*] e [*DIA*] são semelhantes.

Resolução

$\frac{\overline{UZ}}{\overline{IA}} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{\overline{LZ}}{\overline{DA}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{\overline{LU}}{\overline{DI}} = \frac{4}{7}$ $\quad$ logo $\frac{\overline{UZ}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{LZ}}{\overline{DA}} \neq \frac{\overline{LU}}{\overline{DI}}$

Como os lados correspondentes dos dois triângulos não são proporcionais, os triângulos não são semelhantes.

3

A diagonal do relvado rectangular de um estádio tem 125 m e uma das dimensões do campo é 105 m.

a) Calcule, com 1 c.d., a outra dimensão do campo.

b) Calcule, aproximada às décimas, a área de meio-campo.

4

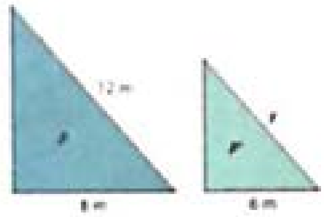
Observe a figura e calcule $\overline{AB}$.

5

Os dois triângulos são semelhantes.

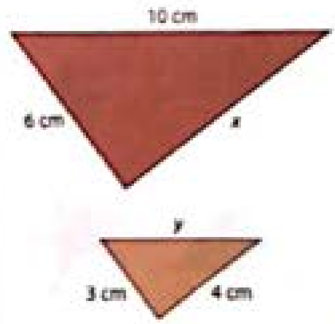
a) Qual a razão de semelhança que transforma P em P'?

b) Determine y.



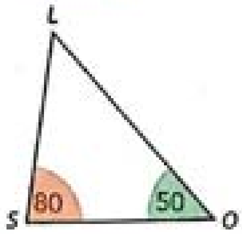
6

Os dois triângulos seguintes são semelhantes. Calcule *x* e *y*.



7

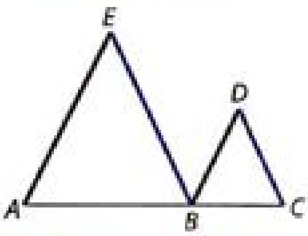
Observe o $\triangle[SOL]$:



Um outro, $\triangle[MAR]$, tem dois ângulos iguais, cada um de 50°.
Serão semelhantes os triângulos [SOL] e [MAR]? Justifique a resposta.

8

Observe a figura abaixo.
Sabe-se que as rectas com a mesma cor são paralelas.



a) Mostre que os triângulos são semelhantes.

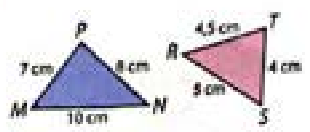
b) Se $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ e $\overline{CD} = 2$ cm, calcule $\overline{BE}$.

9

Averigue se são semelhantes os pares de triângulos seguintes. Justifique a resposta e indique a razão de semelhança.

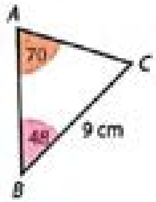
a)

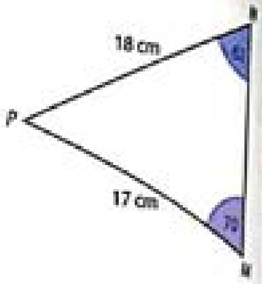
b)



2. a) Averigue se os triângulos [ABC] e [MNP] são semelhantes.

b) Calcule $\overline{AB}$.





Resolução

a) $A\hat{C}B = 180 - (70 + 48) = 180 - 118$

$A\hat{C}B = 62°$

$M\hat{P}N = 180 - (62 + 70) = 180 - 132$

$M\hat{P}N = 48°$

$\triangle[ABC] \sim \triangle[MNP]$ porque têm, de um para o outro, dois ângulos iguais.

b) Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são directamente proporcionais.

Os numeradores são os lados de um dos triângulos.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{NM}}$$

Os denominadores são os lados correspondentes do outro triângulo.

$$\frac{\overline{AB}}{17} = \frac{9}{18}$$

$$\overline{AB} = \frac{9 \times 17}{18}$$

$$\overline{AB} = 8{,}5 \text{ cm}$$

Semelhança de triângulos e paralelismo

Triângulos em posição de Tales são sempre semelhantes porque têm dois ângulos iguais.

Relações entre perímetros e entre áreas de triângulos semelhantes

- **Se dois polígonos são semelhantes:**
  - a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança:

$$\frac{P}{P'} = r$$

  - a razão das áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{A}{A'} = r^2$$

Exercício resolvido

A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é 12. Determine:

a) A razão entre dois lados correspondentes.

b) A razão entre as áreas.

Resolução

a) $\frac{P}{P'} = \frac{l}{l'} = r$ logo $\frac{l}{l'} = 12$ $\qquad r \rightarrow$ razão de semelhança

b) $\frac{A}{A'} = r^2$ logo $\frac{A}{A'} = 12^2 = 144$

Actividade

Construção do pantógrafo – sua utilização

O pantógrafo é utilizado para ampliar ou reduzir uma figura.

- Corte, em madeira de balsa, duas peças rectangulares de 22 cm × 2 cm e outras duas de 12 cm × 2 cm. Com uma lixa, arredonde os extremos das peças.
- Em cada peça, marque cinco pontos igualmente distanciados e fure-os.
- Com um parafuso e uma porca, una a extremidade de uma peça pequena com o furo do meio da peça grande; faça o mesmo com as outras duas peças. Com outro parafuso, una as duas peças grandes. Fure uma rolha e enfie-lhe um lápis aguçado. Coloque a rolha com o lápis de modo a unir as duas extremidades das peças pequenas.
- Afie outro lápis e enfie-o no furo da extremidade da peça grande, à direita – vai ser o seu apontador.
- Coloque o seu apontador na figura original e um papel branco por baixo do outro lápis. Com a mão esquerda, fixe a extremidade da peça grande da esquerda. Com a mão direita, vá contornando a figura original com o lápis apontador. No papel branco aparece uma figura semelhante à figura original.

NOTA

Esta actividade poderá ser realizada com a colaboração de um professor de Educação Visual.

10

a) Na figura:

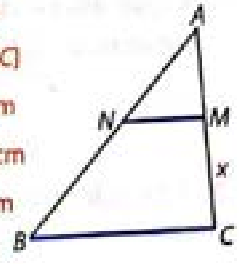
$[MN] \,//\, [BC]$

$\overline{AM} = 6$ cm

$\overline{NB} = 10$ cm

$\overline{AN} = 8$ cm

Calcule x.



b) Sabendo que:

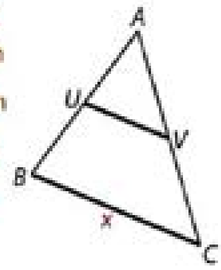
$\overline{AU} = 8$ cm

$\overline{AB} = 16$ cm

$\overline{UV} = 10$ cm

$[UV] \,//\, [BC]$

Calcule x.



11

A razão de dois lados correspondentes, em dois polígonos semelhantes, é 4. Determine:

a) A razão entre os perímetros.

b) A razão entre as áreas.

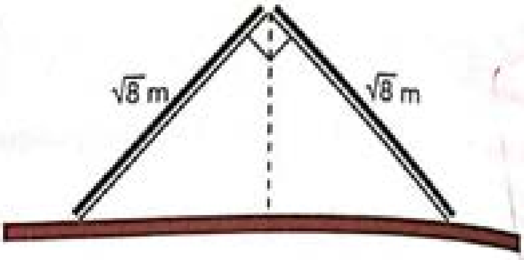
12

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é 64. Determine:

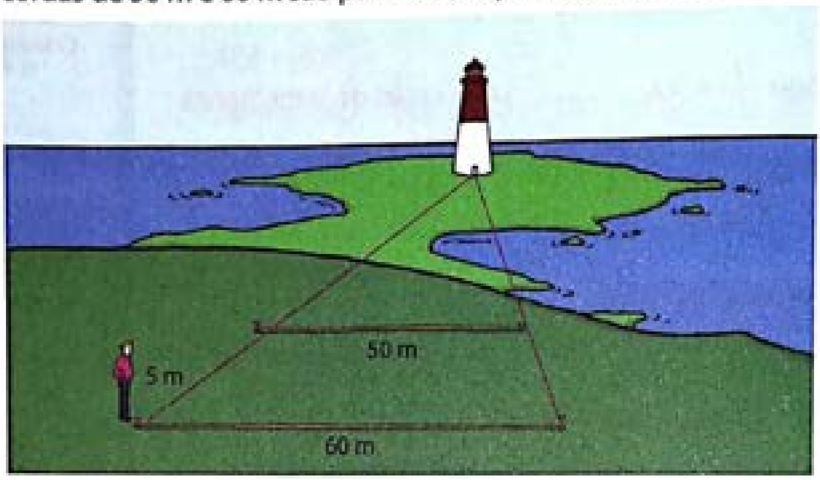
a) A razão entre os perímetros.

b) A razão da ampliação.

1. Duas vigas metálicas, com o mesmo comprimento e apoiadas no solo, estão colocadas perpendicularmente. A que altura do solo se tocam as vigas? Explique o seu raciocínio.

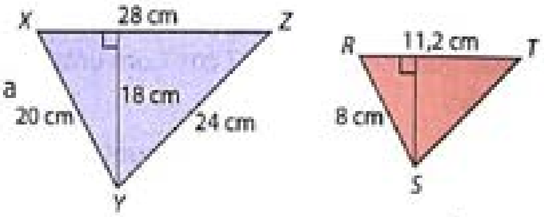


2. Sabendo que as cordas de 50 m e 60 m são paralelas, a que distância do farol se encontra o turista?

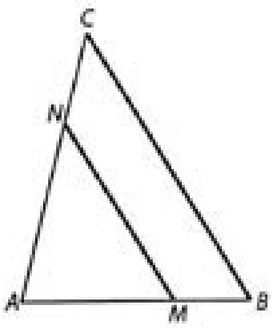


3. Os triângulos [XYZ] e [RST] são semelhantes.

Observe a figura ao lado e calcule o perímetro e a área do triângulo [RST].



4. Observe a figura dada:



Calcule o perímetro do triângulo [ABC], sabendo que:

$\overline{AM} = 6$ m

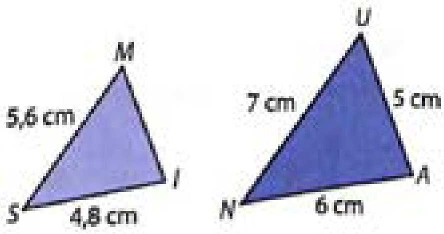
$\overline{AN} = 7$ m

$\overline{MN} = 8$ m

$\overline{BM} = 3$ m

[MN] // [BC]

5. Se os triângulos [SIM] e [NAU] são semelhantes, então:



A. $\overline{IM} = 5$ cm

B. $\overline{IM} = 6{,}25$ cm

C. $\overline{IM} = 4$ cm

D. $\overline{IM} = 3$ cm

6. As áreas de dois triângulos semelhantes são 50 m^2 e 128 m^2.
A razão de semelhança que transforma o triângulo maior no menor é:

A. $\frac{50}{128}$

B. 1

C. $\frac{5}{8}$

D. 2

Importância da Trigonometria

A **Trigonometria** é um dos domínios mais úteis da Matemática. Tem muitas aplicações na Engenharia, na Astronomia e em muitos outros ramos de actividade. Em particular, o seu uso é importante na determinação de distâncias que são difíceis ou impossíveis de obter directamente, como por exemplo, distâncias sobre o mar, altitudes em pontos inacessíveis e distâncias entre planetas.

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

A **Trigonometria** é o ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos ângulos e as medidas dos lados de um triângulo.

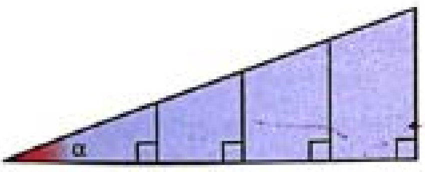
A palavra **«trigonometria»** tem origem grega e significa **«medida de triângulos»**.

Nesta unidade vai trabalhar com triângulos rectângulos, estabelecendo relações entre os seus lados e os seus ângulos agudos.

Seno, co-seno, tangente e **co-tangente** de um ângulo agudo são razões trigonométricas desse ângulo agudo.

Para determinar as razões trigonométricas de um ângulo α, usamos um qualquer triângulo rectângulo que tenha um ângulo geometricamente igual a α.

Trigono → triângulo
ou
triangular
metria → medida
Trigonometria
↓
medida de triângulos



Todos os triângulos rectângulos com um ângulo agudo de amplitude α são semelhantes entre si.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}$$

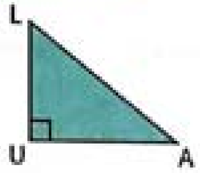
- «Oposto a…» é o mesmo que «em frente a…».
- «Adjacente a…» é o mesmo que «junto a…».

Estas razões só dependem do ângulo agudo considerado.

O seno e co-seno de qualquer ângulo agudo tomam valores entre zero e um.

13

Para o triângulo [*LUA*], copie e complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

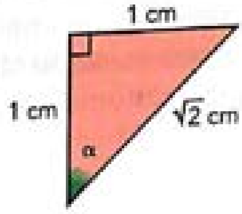


a) [*LU*] é o cateto oposto ao ângulo...
b) [*UA*] é o cateto adjacente ao ângulo...
c) [*UA*] é o cateto oposto ao ângulo...
d) [*LU*] é o cateto adjacente ao ângulo...

■ Racionalizar o denominador de uma fracção é tornar racional o denominador dessa fracção.

Exercício resolvido

Calcular os valores exactos de sen α, cos α, tg α e cotg α.



Resolução

• $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Racionalização do denominador em $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{então sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando o denominador, vem: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

logo, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{1} = 1$ • $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{1} = 1$

Tabelas de valores naturais

Ao longo da história da ciência, astrónomos e matemáticos determinaram valores para as razões trigonométricas de um ângulo agudo por processos experimentais que não eram rigorosos nem rápidos. Calcularam valores do seno, do co-seno, da tangente e da co-tagente de ângulos, de grau a grau ou até de minuto a minuto e, assim, construíram tabelas ou tábuas trigonométricas que, durante muito tempo, foram de grande utilidade.

É provável que tenha sido Hiparco o primeiro matemático e astrónomo a usar tabelas de valores naturais.

Nas **tabelas de valores naturais** encontra, na coluna da esquerda, os ângulos de 0° a 90° e, nas restantes colunas, os valores aproximados dos respectivos senos, co-senos, tangentes e co-tangentes.

São de fácil utilização e permitem:

1. Calcular valores aproximados do seno, co-seno, tangente e co-tangente de um ângulo agudo, conhecida a sua amplitude.
2. Determinar a amplitude de um ângulo agudo, conhecido o seu seno, co-seno, tangente ou co-tangente.

14

Para cada triângulo, calcule, aproximando às centésimas, sen α, cos α, tg α e cotg α.

a)

b)

Exercícios resolvidos

1. Determine, usando a tabela desta página:

- sen 19°
- tg 23°
- cos 20°
- cotg 22°

Resolução

Pela tabela

sen 19° ≃ 0,326 tg 23° ≃ 0,424

cos 20° ≃ 0,940 cotg 22° ≃ 2,356

2. Sabe-se que sen x = 0,36. Calcule x.

Resolução

Pela tabela:

$$\underset{21^\circ}{\underset{\downarrow}{0{,}358}} < 0{,}360 < \underset{22^\circ}{\underset{\downarrow}{0{,}375}}$$

Estando mais próximo de 21°, $x \simeq 21°$.

Extracto de uma tabela de valores naturais:

x	sen x	cos x	tg x	cotg x
18°	0,309	0,951	0,325	2,904
19°	0,326	0,946	0,344	2,748
20°	0,342	0,940	0,364	2,605
21°	0,358	0,934	0,384	2,475
22°	0,375	0,927	0,404	2,356
23°	0,391	0,921	0,424	2,246

No final do livro, encontra uma tabela de valores naturais completa (pág. 200).

Presentemente, há técnicas de cálculo que permitem obter as razões trigonométricas com tantas casas decimais quantas se quiser, mas que ultrapassam o âmbito deste estudo.

Seja qual for o ângulo, a calculadora permite-lhe obter as suas razões trigonométricas com uma aproximação enorme. Também pode calcular uma amplitude com determinado seno, co-seno ou tangente instantaneamente.

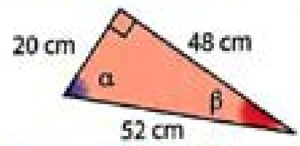
Como determinar experimentalmente

• Razões trigonométricas

Vamos determinar experimentalmente as razões trigonométricas do ângulo de, por exemplo, 38°. Comecemos por desenhá-lo com o transferidor;

15

Para o triângulo da figura, indique os valores exactos de:



a) sen α, cos α e tg α;

b) sen β, cos β e tg β.

16

[ABC] é um triângulo rectângulo em A, onde $\overline{AB}$ = 2,4 cm e $\overline{AC}$ = 1,8 cm.

a) Calcule $\overline{BC}$.

b) Indique os valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo [ABC].

17

Constrói um triângulo rectângulo com um ângulo de 32°.

a) Determine o seno, o co-seno e a tangente desse ângulo.

b) O mesmo triângulo que construiu permite determinar as razões de outro ângulo. Que ângulo? Indique qual o seno desse ângulo.

18

Com régua e esquadro, desenhe um ângulo cuja tangente seja $\frac{1}{2}$. Obtenha depois um valor aproximado da sua amplitude recorrendo ao transferidor.

19

Com régua, esquadro e compasso, desenhe um ângulo:

a) Com seno igual a $\frac{3}{7}$.

b) Com co-seno igual a 0,7.

20

Consultando a tabela de valores naturais que se encontra no final do livro, dê valores aproximados às milésimas de:

a) sen 65°

b) cos 89°

c) tg 11°

d) cotg 44°

21

Utilizando a tabela de valores naturais que se encontra no final do livro, indique os valores aproximados do ângulo β, tal que:

a) $\operatorname{sen} \beta = 0{,}945$
b) $\cos \beta = 0{,}300$
c) $\operatorname{tg} \beta = 11{,}428$
d) $\operatorname{cotg} \beta = 1{,}963$

22

Usando a calculadora ou a tabela de valores naturais, copie e complete:

a) sen 61° = ...

b) cos 13° = ...

c) tg 76° = ...

d) sen ... = 0,901

e) cos ... = 0,113

23

Utilizando a calculadora ou a tabela de valores naturais, diga se são **verdadeiras ou falsas** as afirmações seguintes, sabendo que $0 \leq x \leq 90°$.

A. $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

B. $0 \leq \cos x \leq 1$

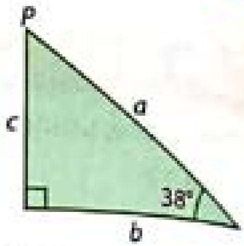
C. $\operatorname{tg} x \geq 0$

D. $\operatorname{sen} x = 1{,}2$

E. $\cos x = 13{,}4$

F. $\operatorname{tg} x = \frac{9}{5}$

depois, de um ponto qualquer P dum lado do ângulo, tiramos uma perpendicular sobre o outro lado.



Medem-se os lados a, b, c do triângulo obtido. Tomando o milímetro como unidade de comprimento, temos neste caso:

$$a = 58 \qquad b = 46 \qquad c = 35$$

Logo,

$$\operatorname{sen} 38° = \frac{c}{a} \approx 0{,}60 \qquad \cos 38° = \frac{b}{a} \approx 0{,}79 \qquad \operatorname{tg} 38° = \frac{c}{b} \approx 0{,}76$$

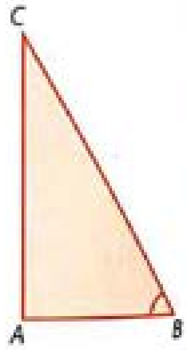
• Uma amplitude de ângulo com determinado seno, co-seno ou tangente

Exercícios resolvidos

1. Desenhar um ângulo com tangente $\frac{5}{3}$ e, em seguida, com o transferidor, medir a sua amplitude.

Resolução

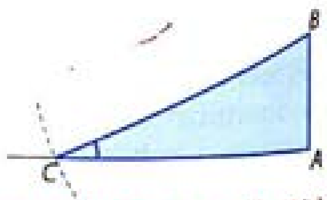
Podemos começar por traçar um segmento [AB] com 3 cm de comprimento e, por exemplo, a partir de A desenhar depois um segmento [AC], perpendicular a [AB], e com 5 cm de comprimento. Construindo o triângulo [ABC], tem-se $\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{5}{3}$ e, com o transferidor, obtemos para a amplitude do ângulo ABC o valor aproximado 59°.



2. Desenhar um ângulo cujo seno seja 0,4.

Resolução

Comecemos por ter em conta que $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Podemos então

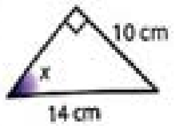
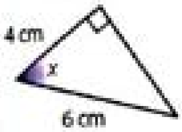
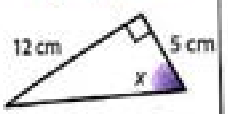
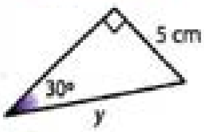
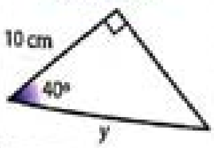
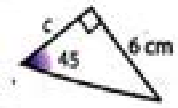


desenhar um triângulo rectângulo em que um cateto meça 2 unidades e a hipotenusa meça 5 unidades ou, por exemplo, 4 e 10 unidades se preferirmos uma figura maior. Depois de traçar [AB] com 2 cm de comprimento, traçamos uma semi-recta perpendicular a [AB] com origem, por exemplo, em A. Com o compasso, e fazendo centro em B, desenhamos um arco de circunferência com 5 cm de raio. Este arco intersecta a semi-recta que traçámos anteriormente no ponto C. No triângulo [ABC] tem-se $\operatorname{sen} \hat{C} = 0{,}4$ e, utilizando o transferidor, obtemos $\hat{C} \approx 23°$.

Resolução de triângulos rectângulos

Para utilizar a trigonometria, num triângulo, deve:

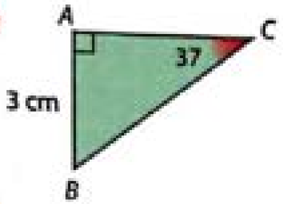
- Certificar-se de que o triângulo é rectângulo.
- Conhecer um lado e um ângulo agudo ou dois lados.

Para determinar	Conhecendo	Utilizando	Calcula-se
Ângulo agudo x 	• Hipotenusa • Cateto oposto ao ângulo x	sen x e Calculadora/tabela de valores naturais	$\text{sen}\, x = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ $x \approx 46°$
Ângulo agudo x 	• Hipotenusa • Cateto adjacente ao ângulo x	cos x e Calculadora/tabela de valores naturais	$\cos x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $x \approx 48°$
Ângulo agudo x 	• Cateto oposto • Cateto adjacente	tg x e Calculadora/tabela de valores naturais	$\text{tg}\, x = \frac{12}{5} = 2{,}4$ $x \approx 67°$
Hipotenusa 	• Ângulo agudo • Cateto oposto a esse ângulo	sen 30° e Calculadora/tabela de valores naturais	$\text{sen}\, 30° = \frac{5}{y}$ $y = \frac{5}{\text{sen}\, 30°}$ $y = 10$ cm
Hipotenusa 	• Ângulo agudo • Cateto adjacente a esse ângulo	cos 40° e Calculadora/tabela de valores naturais	$\cos 40° = \frac{10}{y}$ $y = \frac{10}{\cos 40°}$ $y \approx 13$ cm
Cateto c 	• Hipotenusa • Ângulo adjacente ao cateto a determinar	cos 25° e Calculadora/tabela de valores naturais	$\cos 25° = \frac{c}{15}$ $c = 15 \times \cos 25°$ $c \approx 14$ cm
Cateto c 	• Outro cateto • Ângulo adjacente ao cateto a determinar	tg 45° e Calculadora/tabela de valores naturais	$\text{tg}\, 45° = \frac{6}{c}$ $c = \frac{6}{\text{tg}\, 45°}$ $c = 6$ cm

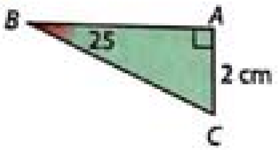
24

Nos triângulos que se seguem, calcule $\overline{BC}$ arredondado às centésimas:

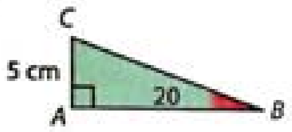
a)



b)



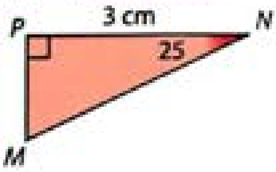
c)



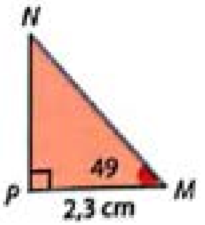
25

Nos triângulos que se seguem, calcule $\overline{MN}$ com 2 c.d.:

a)



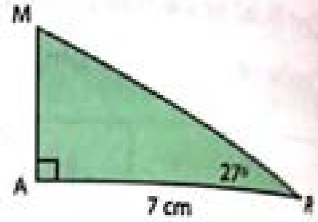
b)



c)

Exercícios resolvidos

1. Resolver o triângulo $[MAR]$.



Resolução

- Determinação de $\overline{MA}$ e de $\overline{MR}$:

$$\operatorname{tg} 27° = \frac{\overline{MA}}{7} \Leftrightarrow 7 \times \operatorname{tg} 27° = \overline{MA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} = 3{,}6 \text{ cm (1 c.d.)}$$

$$\cos 27° = \frac{7}{\overline{MR}} \Leftrightarrow \overline{MR} = \frac{7}{\cos 27°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MR} = 7{,}9 \text{ cm (1 c.d.)}$$

- Determinação de $A\hat{M}R$:

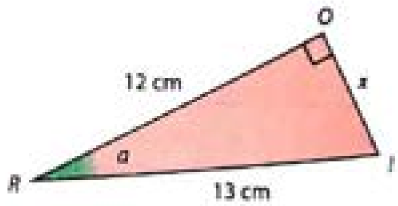
$$A\hat{M}R + 27° = 90° \Leftrightarrow A\hat{M}R = 63°$$

2. Resolver o triângulo $[RIO]$.

Resolução

- Determinação de α:

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$



$\alpha = 22{,}6°$ (1 c.d.) $= 22° \, 36'$

Caso não tenha calculadora fará:

$\cos \alpha = \frac{12}{13} \Leftrightarrow \cos \alpha = 0{,}923$ pela tabela de valores naturais veremos que:

$0{,}927 < 0{,}923 < 0{,}921$ logo $22° < \alpha < 23°$

- Determinação de x:

Pelo Teorema de Pitágoras, por exemplo:

$$12^2 + x^2 = 13^2 \Leftrightarrow x^2 = 13^2 - 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 169 - 144 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$$

$\Leftrightarrow x = 5 \rightarrow$ O lado do triângulo, para existir, tem que ser positivo.

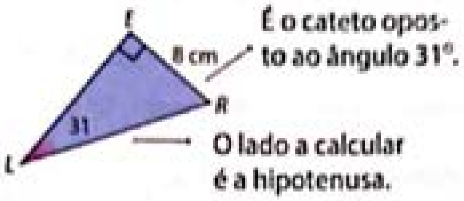
- Determinação de β:

$$90° - 22° \, 36' = 89° \, 60' - 22° \, 36' = 67° \, 24'$$

3. [*LER*] é um triângulo rectângulo em E, onde:

$E\hat{L}R = 31°$ e $\overline{ER} = 8$ cm

Calcular $\overline{LR}$, arredondando às centésimas.



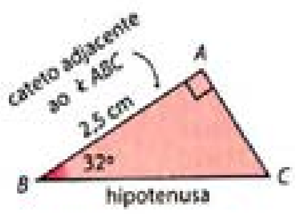
Resolução

$\text{sen } 31° = \dfrac{8}{\overline{LR}} \Leftrightarrow$ No triângulo rectângulo [*LER*] conhecemos $E\hat{L}R$ e o cateto oposto a este ângulo.

$\Leftrightarrow \overline{LR} = \dfrac{8}{\text{sen } 31°} \Leftrightarrow$ Para calcular a hipotenusa utilizamos o seno.

$\Leftrightarrow \overline{LR} = 15{,}53$ cm

4. [*ABC*] é um triângulo rectângulo em *A*, em que $A\hat{B}C = 32°$ e $\overline{AB} = 2{,}5$ cm. Calcular, com 2 c.d., $\overline{BC}$.



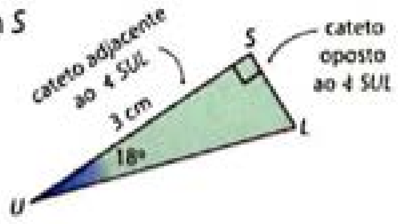
Resolução

$\cos 32° = \dfrac{2{,}5}{\overline{BC}} \Leftrightarrow$ Conhecemos $A\hat{B}C$ e o cateto adjacente a este ângulo.

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{2{,}5}{\cos 32°} \Leftrightarrow$ Para calcular a hipotenusa utilizamos o co-seno.

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 2{,}95$ cm (2 c.d.)

5. [*SUL*] é um triângulo rectângulo em *S* em que $S\hat{U}L = 18°$ e $\overline{SU} = 3$ cm. Calcular $\overline{SL}$ com 2 c.d.



Resolução

$\text{tg } 18° = \dfrac{\overline{SL}}{3} \Leftrightarrow$ Conhecemos $S\hat{U}L$ e o cateto adjacente a este ângulo.

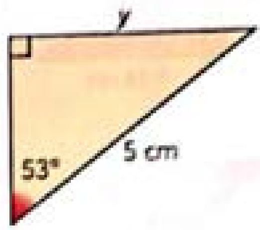
$\Leftrightarrow \overline{SL} = 3 \times \text{tg } 18° \Leftrightarrow$ Para calcular o cateto oposto utilizamos a tangente.

$\Leftrightarrow \overline{SL} = 0{,}97$ (2 c.d.)

26

Calcule *y*, com 2 c.d., em cada um dos triângulos rectângulos.

a)



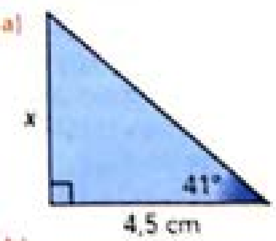
b)

c)

27

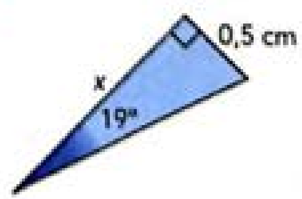
Nos triângulos que se seguem, calcule *x* com 2 c.d.

a)



b)

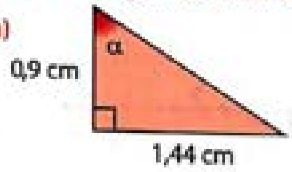
c)



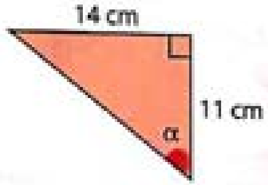
28

Em cada um dos seguintes triângulos rectângulos, calcule α:

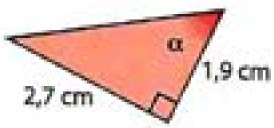
a)



b)



c)

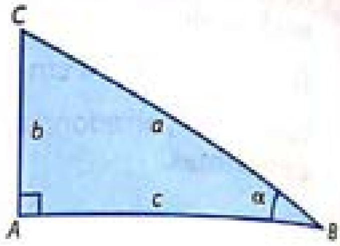


Fórmulas fundamentais

Observa o $\triangle[ABC]$ rectângulo em A.

Pelo Teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$

donde $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$



Como $\frac{b}{a} = \operatorname{sen} \alpha$ e $\frac{c}{a} = \cos \alpha$, vem

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

igualdade conhecida vulgarmente por **«fórmula fundamental da Trigonometria»**. Desta, deduzem-se imediatamente outras:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{e} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Dividindo ambos os membros por $\cos^2 \alpha$ e recordando que:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{obtemos:} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$\operatorname{sen}^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ são escritas abreviadas de $(\operatorname{sen} \alpha)^2$ e $(\cos \alpha)^2$.

Estas são as fórmulas básicas da Trigonometria, as quais permitem deduzir, sem auxílio de tabelas nem de máquinas, os valores exactos de todas as razões trigonométricas de um ângulo, conhecendo uma delas[1].

De seguida apresentam-se exemplos de aplicação das fórmulas.

[1] As razões trigonométricas cujo estudo faz parte do programa do 10.º ano são o seno, o co-seno, a tangente e a co-tangente.

Exercícios resolvidos

1. Sabe-se que $\operatorname{sen} x = 0{,}8$. Calcular $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ sem usar a calculadora.

Resolução

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}8^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{0{,}36} \Leftrightarrow$ Só interessa o valor positivo porque só trabalhamos com ângulos agudos.

$\Leftrightarrow \cos x = 0{,}6$

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ então $\operatorname{tg} x = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$

2. Seja α um ângulo agudo cujo seno é $\frac{1}{3}$. Calcule o co-seno e a tangente desse ângulo.

Resolução

De $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$ vem $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

Então, $\cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

De $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$ vem $\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou, racionalizando o denominador, $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

3. Calcule sen β e cos β, sendo β um ângulo agudo e $\text{tg}\,\beta = 4$.

Resolução

De $\text{tg}^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta}$ vem $4^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{17}$

Então $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, ou seja, $\cos\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$

De $\frac{\text{sen}\,\beta}{\cos\beta} = \text{tg}\,\beta$ vem $\frac{\text{sen}\,\beta}{\frac{\sqrt{17}}{17}} = 4 \Leftrightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$

Claro que também pode obter o sen β de $\text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta$.

Resolução de problemas que envolvem triângulos

Utilizando as razões trigonométricas pode calcular lados de triângulos rectângulos se conhecer as amplitudes dos seus ângulos.

Assim, é possível determinar distâncias inacessíveis tais como: alturas de prédios, de árvores, distância da Terra ao Sol, etc.

29

Calcule sen β, sendo:

a) $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$
b) $\text{tg}\,\beta = 2{,}5$
c) $\text{tg}\,(90^\circ - \beta) = 10$

30

Sendo x um ângulo agudo e $\cos x = 0{,}5$ determine, sem utilizar a calculadora:

a) sen x
b) tg x
c) $2\cos x + 3\,\text{tg}\,x$

31

A Margarida afirma que, para um ângulo de amplitude x, encontrou:

$\text{sen}\,x = \frac{1}{4}$ e $\cos x = \frac{3}{4}$

Comente a afirmação da Margarida.

32

Com o auxílio de um triângulo rectângulo, prove que:

$\cos 30^\circ = \text{sen}\,60^\circ$ e
$\text{sen}\,30^\circ = \cos 60^\circ$

33

Sendo x um ângulo agudo e $\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule, sem usar a calculadora:

a) cos x
b) $\text{sen}^2 x + 3\,\text{tg}^2 x$
c) $\cos(90^\circ - x)$

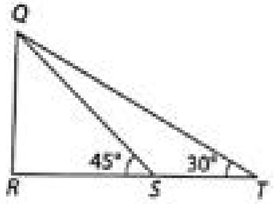
34

Calcule a distância de A a B, sabendo que o ângulo B é recto.

* De um modo geral, apresentamos os cálculos intermédios com 3 casas decimais.

35

Sabendo que $\overline{RS} = 40$ m,



calcule $\overline{RT}$ e $\overline{ST}$, com aproximação ao metro.

36

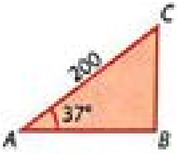
O vento conserva o fio do papagaio sempre esticado. Quando o vento mudou, o ângulo do fio com a horizontal passou de 60° para 70° e o papagaio subiu 3 metros. Qual o comprimento do fio e a que altura está agora o papagaio? (Dê aproximação ao centímetro).

Exercícios resolvidos

1. Um aviador voa 200 milhas no rumo 53° NE. De quantas milhas para Este e para Norte varia a sua posição? (Supõe-se a Terra plana).

Resolução

O rumo 53° NE é o indicado na figura.
Para responder à questão podemos considerar o triângulo rectângulo [ABC] com $\hat{A} = 37°$ e $\overline{AC} = 200$.



$\overline{AB}$ é o deslocamento para Este.
$\overline{BC}$ é o deslocamento para Norte.

$$\frac{\overline{BC}}{200} = \text{sen } 37° \Leftrightarrow \overline{BC} = 200 \times \text{sen } 37°$$

e atendendo a que sen $37° \approx 0{,}602$, tem-se $\overline{BC} \approx 120{,}4$

$$\frac{\overline{AB}}{200} = \cos 37° \Leftrightarrow \overline{AB} = 200 \times \cos 37° \text{ e porque}$$

$\cos 37° \approx 0{,}799$ tem-se $\overline{AB} \approx 159{,}8$.
O aviador deslocou-se 159,8 milhas para Este e 120,4 milhas para Norte.

2. Um cabo foi esticado entre dois postes, distantes de 45 m, fazendo um ângulo de 18° com o chão. Quando o cabo foi retirado media 47,5 m. De quantos centímetros aumentou o seu comprimento?

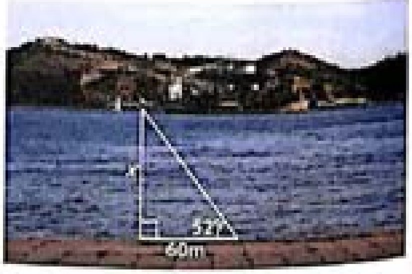
Resolução

Estando o cabo esticado, o seu comprimento d é tal que:

$$\frac{45}{d} = \cos 18° \Leftrightarrow d \cdot \cos 18° = 45 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{45}{\cos 18°}$$

Como $\cos 18° \approx 0{,}951$ tem-se $d \approx 47{,}3$ o que quer dizer que o comprimento do cabo aumentou, aproximadamente, 20 cm.

3. Da observação dos dados da figura, conclua qual a largura do rio na zona assinalada.



Resolução

Sendo x a largura do rio, $\frac{x}{60} =$
$= \text{tg } 52° \Leftrightarrow x = 60 \times \text{tg } 52°$.

Então, $x \approx 60 \times 1{,}280$, ou seja, $x \approx 76{,}8$ m.

8. Para determinar a altura de um rochedo à beira-mar, fizeram-se medições dos ângulos nos pontos A e B, que distam 20 m um do outro, focando o ponto mais alto da falésia. Obtiveram-se os valores indicados na figura. Determine a altura *h* da falésia.

Resolução

Podemos reconhecer que: $\frac{h}{x} = \text{tg } 50° \wedge \frac{h}{x+20} = \text{tg } 42°$

ou seja $\begin{cases} h = x \cdot \text{tg } 50° \\ h = (x+20) \cdot \text{tg } 42° \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \cdot \text{tg } 50° \\ x \cdot \text{tg } 50° = x \cdot \text{tg } 42° + 20 \text{ tg } 42° \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \cdot \text{tg } 50° \\ x(\text{tg } 50° - \text{tg } 42°) = 20 \text{ tg } 42° \end{cases} \begin{cases} h = x \cdot \text{tg } 50° \\ x = \frac{20 \text{ tg } 42°}{\text{tg } 50° - \text{tg } 42°} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 61{,}809 \times \text{tg } 50° \\ x \approx 61{,}809 \text{ m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 73{,}661 \text{ m} \\ x \approx 61{,}809 \text{ m} \end{cases}$

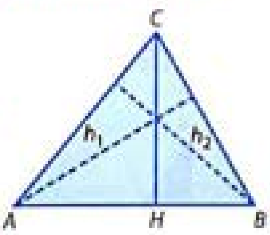
O rochedo tem aproximadamente 73,7 m de altura.

9. Num triângulo de base $\overline{AB} = 20$ cm, $\hat{A} = 50°$ e $\hat{B} = 60°$. Determine um valor, aproximado ao mm, da altura do triângulo relativa à base [AB] e investigue qual das outras alturas é maior.

Resolução

Seja $\overline{AH} = x$; então $\overline{HB} = 20 - x$ e, se $\overline{CH} = h$, podemos escrever:

$\begin{cases} \frac{h}{x} = \text{tg } 50° \\ \frac{h}{20-x} = \text{tg } 60° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \cdot \text{tg } 50° \\ h = (20-x) \cdot \text{tg } 60° \end{cases} \Leftrightarrow$



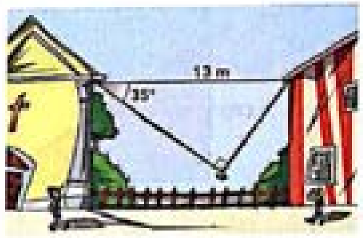
$\begin{cases} h = x \text{ tg } 50° \\ x \text{ tg } 50° = 20 \text{ tg } 60° - x \text{ tg } 60° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \text{ tg } 50° \\ x \text{ tg } 50° + x \text{ tg } 60° = 20 \text{ tg } 60° \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} h = x \text{ tg } 50° \\ x(\text{tg } 50° + \text{tg } 60°) = 20 \text{ tg } 60° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = x \text{ tg } 50° \\ x = \frac{20 \text{ tg } 60°}{\text{tg } 50° \cdot \text{tg } 60°} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h \approx 14{,}120 \\ x \approx 11{,}848 \end{cases}$

A altura relativa a [*AB*] mede, aproximadamente, 141 mm. A altura relativa a [*CB*] é h_1 e $h_1 = 20 \text{ sen } 60°$ e a altura relativa a [*AC*] é h_2, e $h_2 = 20 \text{ sen } 50°$. Então $h_1 > h_2$ porque $\text{sen } 60° > \text{sen } 50°$.

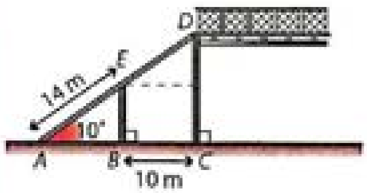
37

Uma lâmpada foi instalada para uma festa, como vê na figura seguinte. O Tiago garante que só gastou 16 metros de cabo para segurar a lâmpada.
Terá razão?



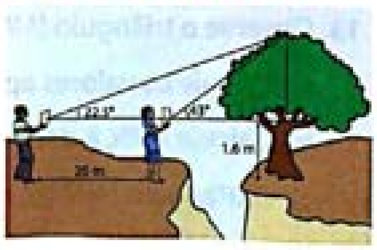
38

Observe o desenho de acesso a um viaduto.
Calcule:
a) Altura do pilar [BE].
b) Altura do viaduto.
c) A distância, em metros, do acesso [AD].

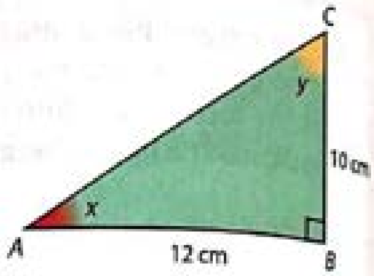


39

A figura representa a determinação da altura de uma árvore cuja base é inacessível. Observe a figura e calcule essa altura.



7. Observe a figura seguinte.



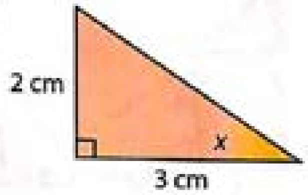
a) Calcule sen x, cos x, sen y e cos y. Que observa?

b) Copie e complete a frase:

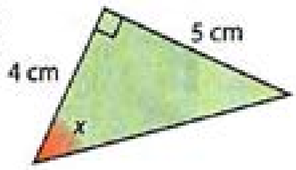
Se dois ângulos são complementares, o … de um ângulo é igual ao … do seu complementar.

8. Calcule os valores exactos de sen x, cos x, tg x e cotg x, em cada um dos triângulos:

a)



b)



9. Com a tabela de valores naturais determine (com 1 c.d.) o ângulo x tal que:

a) sen $x = 0{,}05$ b) tg $x = 3{,}867$ c) cos $x = 0{,}987$ d) tg $x = 0{,}637$

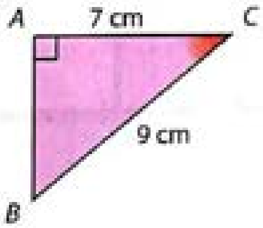
10. Usando a calculadora ou a tabela de valores naturais, copie e complete:

a) tg … = 204,63 b) cos 35º = … c) sen … = 0,457

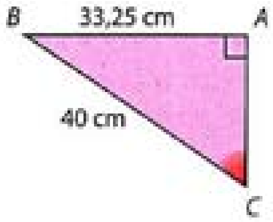
d) sen 89º = … e) sen 30º = …

11. Determine a amplitude do ângulo $A\hat{C}B$ em cada um dos triângulos:

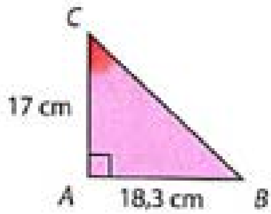
a)



b)

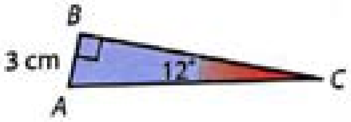


c)

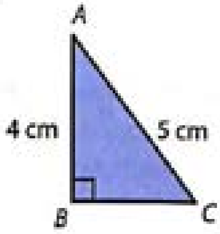


12. Resolva cada um dos triângulos rectângulos:

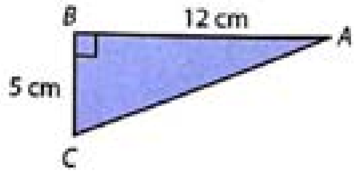
a)



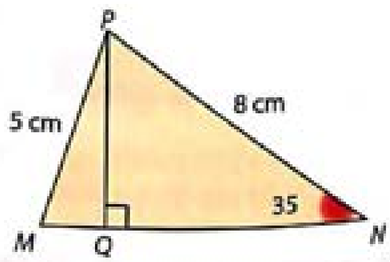
b)



c)



13. Observe o triângulo [MNP]:



a) Calcule os valores aproximados às décimas de $\overline{PQ}$ e $\overline{QN}$.

b) Calcule $P\hat{M}N$, à décima do grau.

c) O triângulo [MNP] é rectângulo? Justifique a resposta.

14. Um poste quebrou num temporal. A extremidade superior do poste ficou a 7 m da base e a parte caída faz um ângulo de 25° com o solo. O valor, aproximado ao metro, da altura do poste, antes de partir, é:

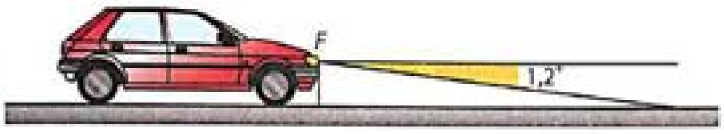
A. 9 m

B. 10 m

C. 11 m

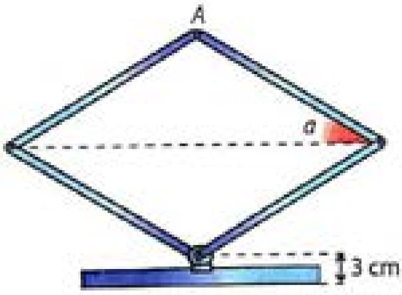
D. 12 m

15. O raio luminoso emitido pelo farol do automóvel, que está 68 cm acima do solo, faz um ângulo de 1,2° com a horizontal.



Será que os faróis deste automóvel iluminam entre 30 m a 50 m?

16. O macaco de um automóvel é um losango cujos lados medem 25 cm. A que altura do solo se encontra o ponto A, onde o macaco toca o automóvel, sabendo que $\alpha = 70°$?



17. Descubra a altura do hotel construído junto à praia.

Unidades de medida de ângulos e arcos

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$

As várias situações em que usamos hoje um sistema numérico sexagesimal, ou seja, de base 60, isto é, tendo como base o número 60 em vez do número 10, são vestígios do sistema de contagem babilónico. O exemplo mais comum e a forma como contamos o tempo: uma hora tem 60 minutos, um minuto tem 60 segundos. Também a medição de ângulos pode ser feita no sistema sexagesimal, isto é, em graus.

O **grau** é a unidade base do **sistema sexagesimal**; cada grau tem 60 minutos de grau e cada minuto tem 60 segundos de grau:

$$1^\circ = 60' \text{ e } 1' = 60''$$

Um grau pode ser definido como a nonagésima parte de um ângulo recto, ou seja, se dividirmos um ângulo recto em 90 ângulos iguais, cada um tem a amplitude de 1 grau.

Para além do sistema sexagesimal, existem outros sistemas utilizados na medição de ângulos, tais como, o sistema **centesimal** e o sistema **circular**.

O sistema centesimal, cuja unidade é o grado (^{g}), foi introduzido em França na época da Revolução Francesa (ao ser adoptado o sistema métrico). Actualmente quase não é utilizado.

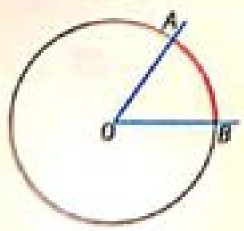
Pelo contrário, o sistema circular é aquele com que habitualmente se trabalha em trigonometria. A unidade de medida é o **radiano**.

Equivalência entre o sistema sexagesimal e o sistema centesimal:

$$90^\circ = 100^g$$

1 grado = 100′ de grado

1′ de grado = 100″ de grado



O ângulo $A\hat{O}B$ mede um radiano se o arco $\overset{\frown}{AB}$ tiver comprimento igual ao raio da circunferência.

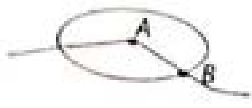
Actividade

Como fazer um radiano?

Nesta actividade, que deve ser realizada por pares de alunos, são precisos um copo, uma taça ou um prato, fio ou cordel e marcador.

Desenhe uma circunferência com um marcador e um copo.

Localize o centro e marca o raio num fio.



Volte a colocar o copo e enrole o fio à volta da base do copo assinalando os dois pontos A e B sobre a circunferência. Una-os com o centro.

Obteve um ângulo de amplitude 1 radiano.

Radiano é o ângulo que determina em qualquer circunferência com centro no seu vértice um **arco de comprimento igual ao raio**. O seu símbolo é **rad**.

O radiano é uma unidade de medida de amplitudes de ângulos que facilita o cálculo do comprimento de um arco de circunferência.

A correspondência 180º → π rad não quer dizer que π = 180º (o que, aliás, é falso). Significa que um ângulo que mede 180, em graus, mede π (≈ 3,14) em radianos.

Comprimento de um arco de amplitude α numa circunferência de raio *r*:

- $\frac{\alpha 2\pi r}{360^\circ} = \frac{\alpha \pi r}{180^\circ}$ se α for dado em graus
- αr se α for dado em radianos

Área de um sector circular de amplitude α num círculo de raio *r*:

- $\frac{\alpha \pi r^2}{360^\circ}$ se α for dado em graus
- $\frac{\alpha r^2}{2}$ se α for dado em radianos

Para além da simplicidade do cálculo do comprimento de um arco de circunferência, o radiano apresenta outras vantagens. Ao nível do nosso estudo podemos destacar:

- O radiano é uma unidade maior que o grau e, por isso, permite trabalhar com números mais pequenos: um ângulo que, em graus, mede 1 000, em radianos mede, aproximadamente, 17,5.
- O sistema circular é um sistema decimal (tal como o nosso sistema de numeração, monetário, ...).
- O cálculo da área de um sector circular também se torna mais simples.

Conversão sistema sexagesimal/sistema circular

De um modo geral, para converter graus em radianos ou radianos em graus, basta estabelecer uma proporção, usando por exemplo, a correspondência:

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radianos}}$$

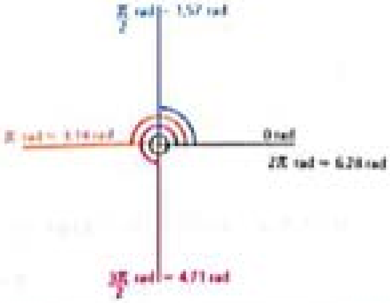
Como $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{raio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

uma circunferência contém o seu raio 2π vezes e tem-se:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad \text{e} \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

As correspondências seguintes são equivalentes à anterior:

- $180^\circ \rightarrow \pi$ rad (≈ 3,14 rad)
- $90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$ rad (≈ 1,57 rad)
- $270^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ rad (≈ 4,71 rad)



É o mesmo que escrever:

$\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{1}{2}\pi$

$\frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{3}{2}\pi$

$\frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{7}{6}\pi$

40

Complete a seguinte tabela:

Graus	Radianos
360°	2π
270°	
200°	
180°	π
	$\frac{5\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2}$
60°	
	$\frac{\pi}{4}$
30°	

41

Converta em radianos:

a) 60°

b) 30°

c) 45°

d) 240°

42

Converta em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{\pi}{3}$ rad

c) 3,14 rad

d) $\frac{5}{3}\pi$ rad

Exercícios resolvidos

1. Conversão de 15° em radianos.

Resolução

$$\begin{array}{l} 180° \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 15° \text{ — } x \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{15° \times \pi}{180°} = \frac{15\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$

2. Conversão de $\frac{3\pi}{4}$ rad em graus.

Resolução

$$\begin{array}{l} 180° \text{ — } \pi \text{ rad} \\ x \text{ — } \frac{3}{4}\pi \text{ rad} \end{array} \quad x = \frac{\frac{3}{4}\pi \times 180°}{\pi} = \frac{3 \times 180°}{4} = 135°$$

3. Determine a medida em radianos da amplitude de um ângulo de 100°.

Resolução

Se x é a medida em radianos estabelecemos a proporção:

$$\begin{array}{l} 180° \text{ — } \pi \text{ rad} \\ 100° \text{ — } x \text{ rad} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{100° \times \pi}{180°} \Leftrightarrow x = \frac{5}{9}\pi \text{ rad} \quad \text{pois } \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$$

Também podemos dizer que $x \approx 1{,}74$ rad substituindo π por 3,14.

4. Determine, em graus, a amplitude de um ângulo de:

a) 0,2 rad

b) $\frac{2\pi}{5}$ rad

Resolução

a) $$\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ 0{,}2 \text{ rad} \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{0{,}2 \times 180°}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{36}{\pi} \Leftrightarrow x \approx 11{,}5°$$

b) $$\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ \frac{2}{5}\pi \text{ rad} \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{\frac{2}{5}\pi \times 180°}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \times 180° \Leftrightarrow x = 72°$$

5. Vamos mostrar que 1 radiano corresponde, aproximadamente, a 57° 17′ 45″.

Resolução

$$\begin{array}{l} \pi \text{ rad} \text{ — } 180° \\ 1 \text{ rad} \text{ — } x \end{array} \quad x = \frac{180° \times 1}{\pi} \Leftrightarrow x \approx 57{,}2958°$$

ou seja, usando (ou não) as potencialidades da calculadora,

$$x \approx 57°\ 17'\ 44{,}81''$$

6. Uma circunferência tem 5 cm de raio. Determine o comprimento de um arco dessa circunferência de amplitude:

a) 160º b) 1,5 rad

Resolução

a) Temos que estabelecer a proporção:

360° — $2\pi 5$ (Perímetro do círculo, ou seja, comprimento da circunferência)

160° — c

$$c = \frac{160^\circ \times 10\pi}{360^\circ} \Leftrightarrow c \approx 14 \text{ cm}$$

b) Como 1 radiano corresponde a um arco de comprimento igual ao raio da circunferência, para obter o comprimento de um arco de 1,5 rad de amplitude, basta multiplicar 1,5 pelo raio da circunferência:

$$c = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5 \text{ cm}$$

43

Numa circunferência com o raio de 5 cm, qual é a amplitude, em radianos, de um arco de 10 cm de comprimento?

44

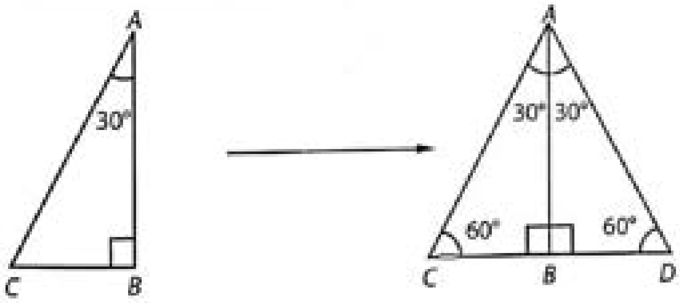
O perímetro de uma circunferência é 12π cm. Qual é a amplitude de um arco de circunferência com 3 cm de comprimento?

45

Numa circunferência com o raio de 4 cm, quanto mede um arco de amplitude 2,5 rad?

Razões trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$

Consideremos um triângulo [*ABC*] em que um dos ângulos agudos mede 30º. Desenhemos um triângulo rectângulo auxiliar [*ABD*], obtido através de uma simetria de eixo *AB*.

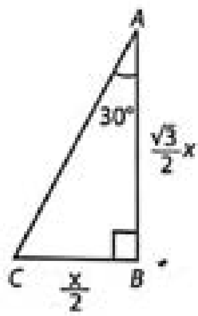


Relembre que, em qualquer triângulo, a ângulos iguais opõem-se lados iguais.

O triângulo [*ACD*] é equilátero pois tem todos os ângulos internos iguais. Designemos por x a medida de cada um dos seus lados. Então, $\overline{CB} = \overline{BD} = \frac{x}{2}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo [*ABC*] tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Leftrightarrow$$



Determinemos as razões trigonométricas de $\frac{\pi}{6}$ (30º):

• $\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ • $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

• $\text{cotg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\text{sen}\,\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ são ângulos complementares visto que

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Os valores das razões trigonométricas de $\frac{\pi}{3}$ (60º) podem obter-se de modo análogo, considerando o triângulo [*ABC*] ou tendo em atenção que:

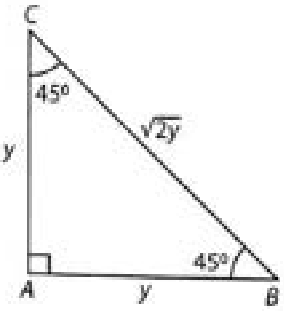
• $\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ • $\cos\frac{\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

• $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ • $\text{cotg}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Dois ângulos são complementares quando a soma das suas amplitudes é 90º; se um deles mede α° e o outro mede β° terá que ser:

$$\alpha° + \beta° = 90°\text{, ou seja,}$$
$$\beta° = 90° - \alpha°$$

Utilizando o mesmo tipo de raciocínio é possível calcular as razões trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$ (45º):



Sendo α e β ângulos complementares:

$\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$
$\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$

Designando por *y* cada um dos catetos do triângulo rectângulo isósceles [*ABC*] obtém-se:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = y^2 + y^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2y^2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{2}y$$

Assim,

• $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{y}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ • $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{y}{\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ • $\text{cotg}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

Resumindo:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

46

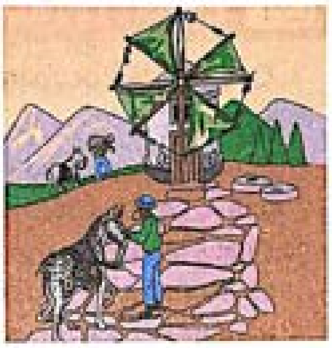
Calcule:

a) $2\cos\frac{\pi}{3} - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$

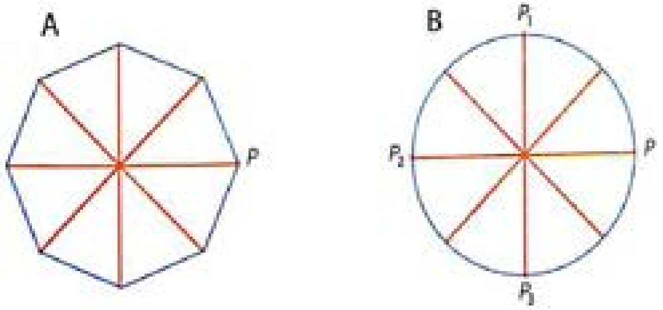
b) $\text{tg}\,45^\circ \times \text{sen}\,60^\circ \times \frac{1}{\text{tg}\,30^\circ}$

Generalização da noção de arco e de ângulo

As velas do moinho de vento giram no sentido dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário conforme a orientação em que se encontram. Cada um dos suportes das velas descreve um círculo ao rodar em torno do eixo.



Designemos por P o extremo de um dos suportes, tal como indica a figura seguinte (A).



Relembre que o ângulo ao centro e o arco correspondente têm a mesma amplitude.

Quando as velas giram, o ponto P vai tomando diferentes posições sobre uma circunferência.

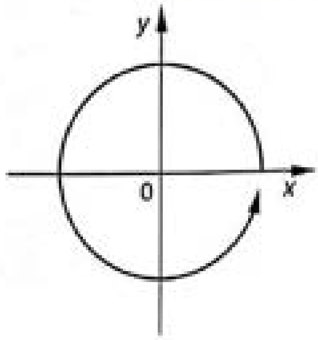
Se o vento fizer girar as velas de modo que o ponto P tome a posição P_1 (B), terá percorrido um arco de $\frac{\pi}{2}$ rad (90°). Assim sendo, o ângulo descrito pelo suporte de extremidade P é um **ângulo recto**.

O ângulo formado pelos suportes de extremidades P e P_2 diz-se um **ângulo raso** e mede π rad.

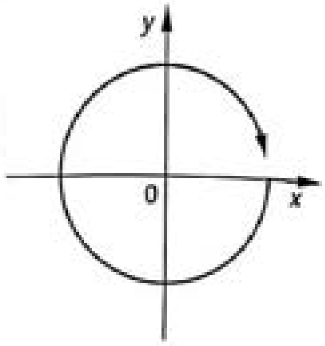
Quando a vela dá uma volta completa, o seu suporte descreve um ângulo de 360° que se denomina **ângulo giro**.

A um ângulo cuja amplitude é zero chama-se **ângulo nulo**. Corresponde à situação em que o ponto P não se desloca da sua posição.

Em todos os casos referidos as velas giraram no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio – **sentido positivo**. Se o movimento das velas tivesse sido efectuado no sentido dos ponteiros do relógio, o ponto P estaria a deslocar-se no **sentido negativo**.



Sentido positivo



Sentido negativo

Exercícios resolvidos

1. Que posição ocupará o ponto P se descrever um arco de amplitude $-\frac{\pi}{2}$?
2. Para que posição se desloca o ponto P_2 se percorrer no sentido negativo um arco de 1 170º?
3. Qual o ângulo que se obtém quando as velas descrevem duas voltas e um quarto no sentido negativo?
4. Para onde se deslocará o ponto P se descrever um arco de amplitude 5π?
5. Quantas voltas serão necessárias para que o ponto P descreva um arco correspondente a um ângulo 3π?
6. Se o ponto P_3 se deslocar até ao ponto P_1, passando pelo ponto P_2, qual a amplitude do arco descrito?

Resolução

	Origem	Extremidade	Sentido/Amplitude	Número de voltas
1.	P	P_3	$-\frac{\pi}{2}$	1 quarto de volta
2.	P_2	P_1	−1 170º	3 voltas e um quarto
3.	P	P_3	$-\frac{9\pi}{2}$	2 voltas e um quarto
4.	P	P_2	5π	2 voltas e meia
5.	P	P_2	3π	1 volta e meia
6.	P_3	P_1	1 980º	5 voltas e meia

Repare-se que as amplitudes consideradas podem ser escritas da seguinte forma:

1. $-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 0 \times 2\pi$
2. $-1\,170^\circ = -90^\circ - 3 \times 360^\circ$
3. $-\frac{9\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2 \times 2\pi$
4. $5\pi = \pi + 2 \times 2\pi$
5. $3\pi = \pi + 1 \times 2\pi$
6. $1\,980^\circ = 180^\circ + 5 \times 360^\circ$

Cada um destes três primeiros ângulos pode ser escrito como $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$, podendo os restantes exprimir-se como $\pi + k2\pi$.

Generalizando, a amplitude de um ângulo qualquer a pode ser expressa como a adição de um ângulo α, pertencente ao intervalo $]0, 2\pi[$, com um múltiplo, positivo ou negativo, de 2π ($\alpha + k \times 2\pi$).

Se $k \in \mathbb{Z}$, ao ângulo α são adicionadas k voltas no sentido negativo.

Ou seja:

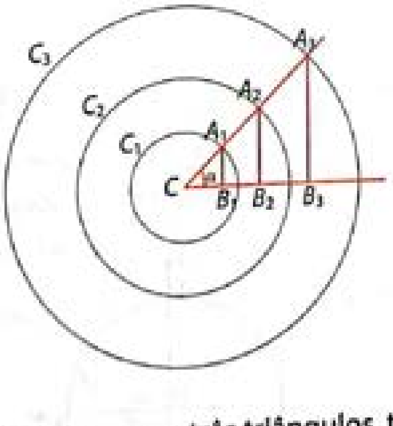
$$a = \alpha + 2k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \in]0, 2\pi[$$

No sistema sexagesimal ter-se-ia:

$$a = \alpha + 360^\circ k \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \alpha \in]0^\circ, 360^\circ[$$

Círculo trigonométrico

Consideremos um ângulo com vértice no centro C, as circunferências C_1, C_2 e C_3 e os triângulos $[CA_1B_1]$, $[CA_2B_2]$ e $[CA_3B_3]$.



$[A_1B_1] \perp [B_1C]$
$[A_2B_2] \perp [B_2C]$
$[A_3B_3] \perp [B_3C]$

Sendo α um ângulo comum aos três triângulos, tem-se:

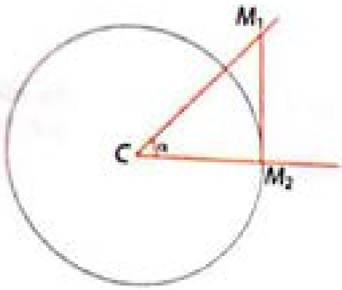
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{CA_3}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{CB_2}}{\overline{CA_2}} = \frac{\overline{CB_3}}{\overline{CA_3}}$$

Uma vez que, por construção, a hipotenusa de cada um dos triângulos coincide com o raio da circunferência correspondente, o cálculo do seno e do co-seno torna-se muito mais simples para uma circunferência de raio 1.

Por exemplo, se a circunferência c_2 tiver raio 1, isto é, se $\overline{CA_2} = 1$:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{A_2B_2}}{1} = \overline{A_2B_2} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{CB_2}}{1} = \overline{CB_2}$$



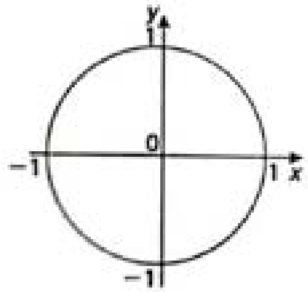
Assim, num círculo de raio 1, o valor de seno de um ângulo ao centro é igual à medida do cateto oposto. Da mesma forma, o valor do co-seno é igual à medida do cateto adjacente.

Tomando apenas a circunferência C_2 (cujo raio é 1) e desenhando um outro triângulo rectângulo $[CM_1\ M_2]$ (ver figura ao lado), podemos afirmar que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a }\alpha}{\text{medida do cateto adjacente a }\alpha} = \frac{\overline{M_1M_2}}{\overline{CM_2}} = \frac{\overline{M_1M_2}}{1} = \overline{M_1M_2}$$

ou seja, o valor da tangente também pode ser determinado a partir da medida de um segmento de recta.

Portanto, para facilitar o estudo das razões trigonométricas de um ângulo de amplitude qualquer e a visualização das relações existentes entre razões de ângulos diferentes, considera-se habitualmente um círculo de raio 1 centrado na origem de um referencial cartesiano. Este instrumento matemático – círculo trigonométrico – é bastante útil na medida em que permite uma visão global do comportamento do seno, do co-seno, da tangente e da co-tagente de qualquer ângulo. Para isso, o ângulo deve ser desenhado com o lado origem coincidente com o semi-eixo positivo Ox, traçando-se depois o lado extremidade de modo a obter a amplitude desejada, no sentido positivo ou no sentido negativo.



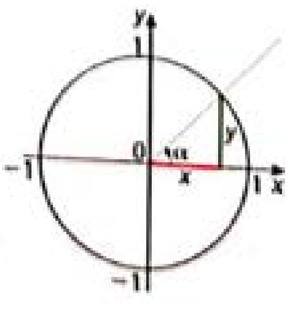
Círculo trigonométrico

O facto do círculo de raio 1 estar associado ao referencial cartesiano permite uma leitura mais fácil das medidas dos segmentos.

Seno e co-seno de um ângulo α

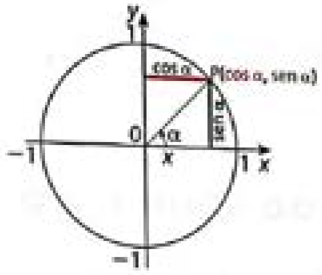
Seja P o ponto de intersecção do lado extremidade do ângulo α com a circunferência que limita o círculo trigonométrico:

$x = \cos\alpha$
$y = \text{sen}\,\alpha$



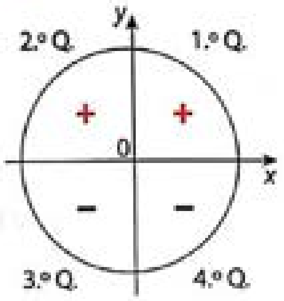
É importante salientar que existe uma correspondência entre a abcissa (x) do ponto P e o co-seno do ângulo α e entre a ordenada (y) do ponto P e o seno do mesmo ângulo.

1.º Quadrante

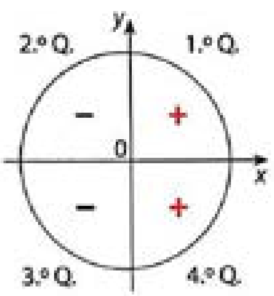


Quando se refere que um ângulo está num determinado quadrante significa que o seu lado extremidade é um segmento de recta situado nesse quadrante.

Pelo facto de estar associada a **ordenada ao seno** e a **abicissa ao co-seno**, a variação de sinal destas razões trigonométricas é a seguinte:

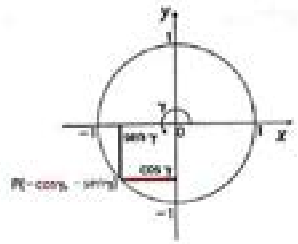


Sinal do seno



Sinal do co-seno

No caso do 3.º quadrante, por exemplo, ter-se-ia:

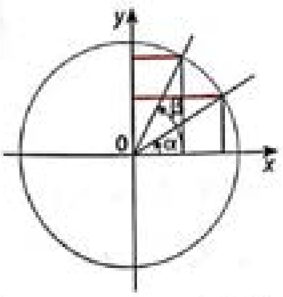


47

Averigúe se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: «A desigualdade $\text{sen } x \cdot \cos x < 0$ só se verifica para ângulos do segundo quadrante.»

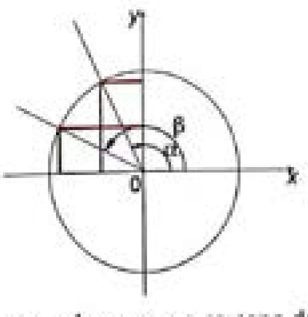
Variação do seno e do co-seno

1.º Quadrante



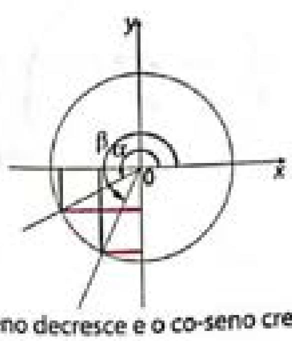
O seno cresce e o co-seno decresce.

2.º Quadrante



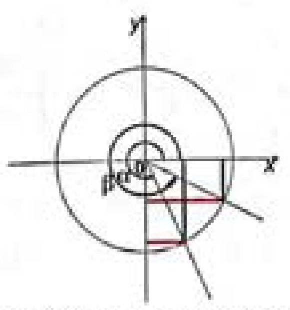
O seno decresce e o co-seno decresce.

3.º Quadrante



O seno decresce e o co-seno cresce.

4.º Quadrante



O seno cresce e o co-seno cresce.

Na tabela seguinte estão registados os valores do seno e do co-seno dos ângulos cujo lado extremidade coincide com os eixos ordenados.

α	$\text{sen } \alpha$	$\cos \alpha$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	−1
$\frac{3\pi}{2}$	−1	0

48

Em que quadrantes:

a) O seno e o co-seno têm o mesmo sinal?

b) O seno é crescente e o co-seno é negativo?

Analisando a variação do seno e do co-seno pode concluir-se que para qualquer amplitude do ângulo α:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$$

e

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Repare que 4π, 6π, -2π, -10π, etc., são também períodos do seno e do co-seno. No entanto, quando se refere o período destas razões trigonométricas é habitual considerar-se o menor de todos os períodos positivos.

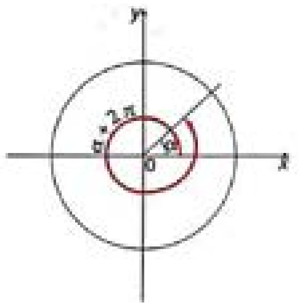
Periodicidade do seno e do co-seno

Quando se comparam os senos e os co-senos de ângulos que têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade, observa-se que:

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha + 4\pi) = ...$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 4\pi) = ...$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

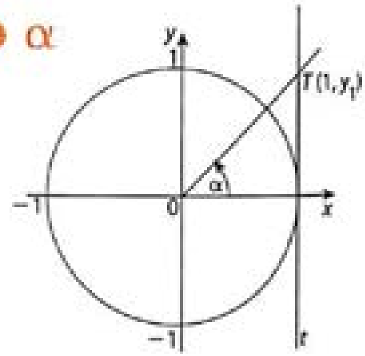


Assim, diz-se que 2π é o **perímetro positivo mínimo** do seno e do co-seno.

Tangente de um ângulo α

Para facilitar o estudo da tangente é habitual traçar no círculo trigonométrico a recta t, que se denomina por eixo das tangentes.

Consideremos a recta t, tangente ao círculo trigonométrico, no ponto de coordenadas (1, 0) e o ponto T onde esta recta intersecta o lado extremidade do ângulo α.



49

Indique um quadrante em que:

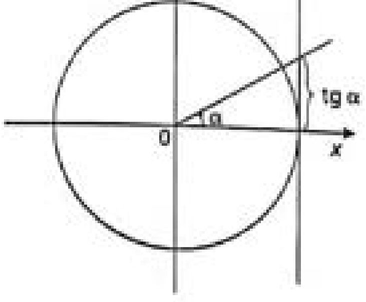
a) O seno seja decrescente e o co-seno seja negativo.

b) O seno e o co-seno sejam decrescentes.

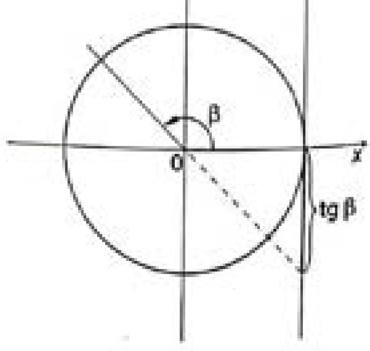
O valor da $tg\,\alpha$ corresponde à ordenada do ponto T, isto é, y_1.

A tangente obtém-se prolongando o lado extremidade do ângulo até intersectar o eixo das tangentes.

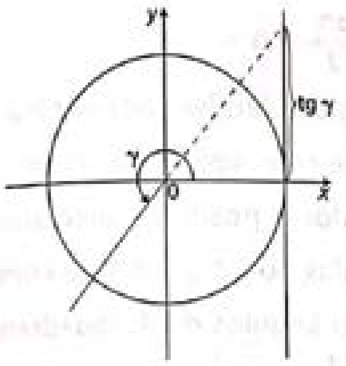
1.º Quadrante



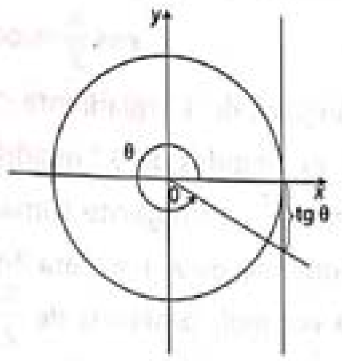
2.º Quadrante



3.º Quadrante



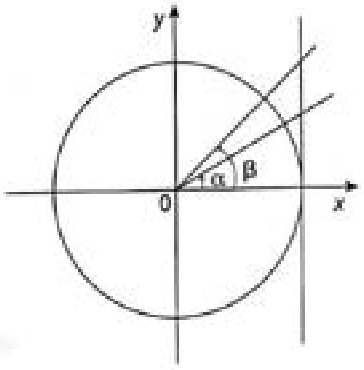
4.º Quadrante



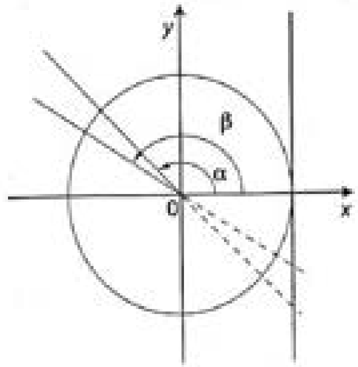
Através da utilização do eixo das tangentes podemos concluir o sinal da tangente.

Variação da tangente

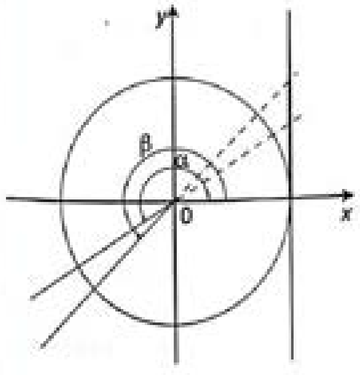
1.º Quadrante



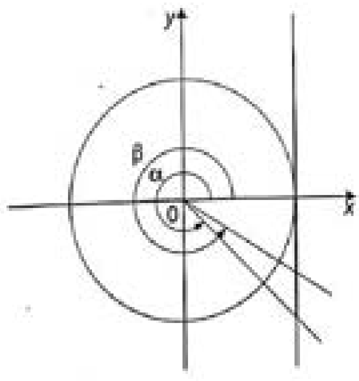
2.º Quadrante



3.º Quadrante



4.º Quadrante



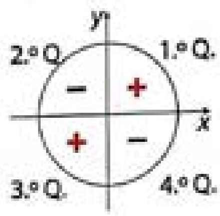
Como se pode observar nos esquemas apresentados, a tangente é **crescente em todos os quadrantes**.

No caso dos ângulos de amplitude $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ não existe intersecção entre o lado extremidade e o eixo das tangentes (uma vez que são rectas paralelas) pelo que não é possível definir qual a tangente destes ângulos.

50

Num determinado quadrante, o co-seno é negativo e crescente. Nesse quadrante:

A. A tangente é decrescente
B. A tangente é negativa
C. O seno é crescente
D. O seno é negativo



Sinal da tangente

51

Identifique os quadrantes em que:

a) O co-seno e a tangente têm o mesmo sinal.

b) Todos os ângulos têm seno maior que a tangente.

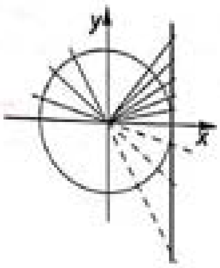
Para ângulos cujo lado extremidade coincide com um dos eixos coordenados, o comportamento da tangente é o seguinte:

α	$\operatorname{tg} \alpha$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	Não definida
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	Não definida

O facto de $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ vem confirmar esta conclusão, já que:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

Para ângulos do 1.° quadrante com amplitudes cada vez mais próximas de $\frac{\pi}{2}$ ou ângulos do 3.° quadrante com amplitudes cada vez mais próximas de $\frac{3\pi}{2}$, a tangente toma valores positivos sucessivamente maiores tendendo para $+\infty$. Para ângulos do 2.° quadrante com amplitudes cada vez mais próximas de $\frac{\pi}{2}$ ou ângulos do 4.° quadrante com amplitudes cada vez mais próximas de $\frac{3\pi}{2}$, a tangente toma valores negativos sucessivamente menores tendendo para $-\infty$.



52

Identifique os quadrantes onde:

a) O seno e a tangente são negativos.

b) O co-seno cresce e o seno é negativo.

c) A tangente é negativa e o co-seno positivo.

d) O seno cresce e o co-seno decresce.

e) O produto do seno pelo co-seno é negativo.

Periodicidade da tangente

Pela forma como a tangente de um ângulo é representada no círculo trigonométrico na recta das tangentes, é visível que qualquer ângulo que tenha, relativamente a α, uma diferença de amplitude de π ou de um múltiplo de π, tem a mesma tangente.

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) = \ldots$$

Generalizando: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}}$

Portanto, π é o **período positivo mínimo** da tangente.

A co-tangente de α pode definir-se por:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{abcissa de P}}{\text{ordenada de P}}$$

e não está definida se os pontos têm ordenada nula.

Exercícios resolvidos

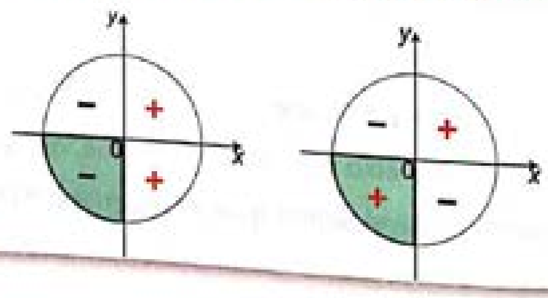
Investiguemos se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

a) $\exists\, \delta \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]: \operatorname{tg}\delta > 0 \wedge \cos\delta < 0$

b) $\forall\, \beta \in \left]0, \pi\right[: \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \operatorname{tg}\beta$

Resolução:

a) Para que um ângulo pertença ao intervalo exigido é necessário que o seu lado extremidade esteja nos 3.°, 4.° ou 1.° quadrantes. Atendendo a que o co-seno é negativo no 2.° e 3.° quadrantes e que a tangente é positiva no 1.° e no 3.°, existem realmente ângulos – todos os do 3.° quadrante – que asseguram a veracidade da afirmação, o que se pode confirmar pelas figuras seguintes:



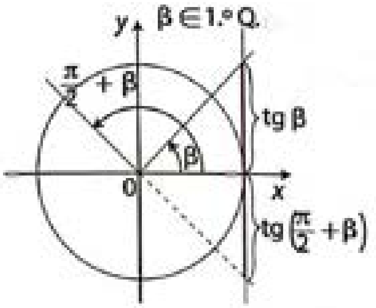
53

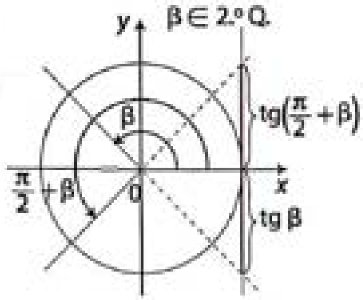
Determine:

a) $\operatorname{tg}\dfrac{10\pi}{2}$

b) $2\operatorname{tg} 1\,095° + \operatorname{tg} 900° - \operatorname{tg}(-195°)$ sabendo que $\operatorname{tg} 15° = -2-\sqrt{3}$

b) Se $\beta \in 1.^\circ$ Q., o ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2} + \beta$ situa-se no 2.º quadrante pelo que as suas tangentes jamais poderiam ser iguais visto terem sinais contrários. Se β estiver entre $\frac{\pi}{2}$ e π, a sua tangente será negativa, enquanto que $\frac{\pi}{2} + \beta$, situando-se no 3.º quadrante, terá uma tangente positiva. O mesmo se pode observar nas seguintes figuras:





Conclui-se assim que a afirmação é falsa.

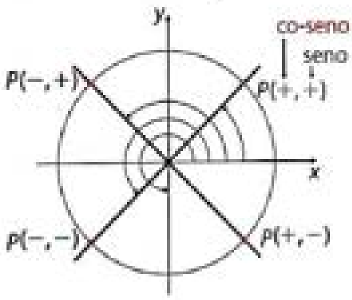
54

No círculo trigonométrico represente os ângulos em que:

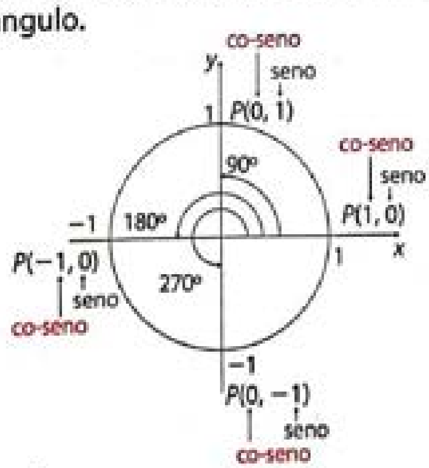
a) $\operatorname{sen} \alpha \geq \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$

- O **sinal das razões trigonométricas** depende do quadrante a que pertence o lado extremidade do ângulo.



- Para **determinar** as razões trigonométricas **0°, 90°, 180°, 270°**, observa-se no círculo trigonométrico as coordenadas do ponto associado ao respectivo ângulo.

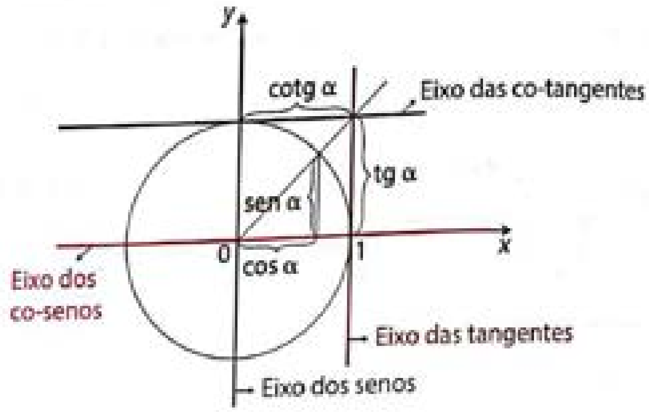


Assim, por exemplo:

- $\operatorname{sen} 270° = -1$
- $\operatorname{tg} 270°$ não existe
- $\cos 270° = 0$
- $\operatorname{cotg} 270° = 0$

Sabemos que o seno de α é igual à ordenada do ponto associado e o co-seno de α é igual à abcissa do ponto associado. Consequentemente, o eixo das ordenadas é, no estudo da trigonometria, muitas vezes designado **eixo dos senos** e o eixo das abcissas por **eixo dos co-senos**.

A linha vertical que contém o ponto (1, 0) é o **eixo das tangentes** e a linha horizontal contendo o ponto (0, 1) é o **eixo das co-tangentes**.



De acordo com a figura podemos afirmar que:

$$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos x \leq 1$$

As razões trigonométricas tangente e co-tangente, de acordo com as suas definições, podem tomar qualquer valor.

Não nos podemos esquecer que:

- A tangente não está definida para $x = 90°$ e $x = 270°$.
- A co-tangente não está definida para $x = 0°$ e $x = 180°$.

Razões trigonométricas dos ângulos 0°, 90°, 180° e 270°

Tendo em conta as definições das razões trigonométricas e de círculo trigonométrico, facilmente poderemos construir o quadro seguinte:

α	Seno	Co-seno	Tangente	Co-tangente
0° (0 rad)	0	1	0	–
90° $\left(\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$	1	0	–	0
180° (π rad)	0	−1	0	–
270° $\left(\frac{3\pi}{2}\text{ rad}\right)$	−1	0	–	0

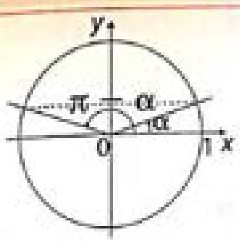
55

Simplifique o mais possível a expressão:
$\text{sen}(-2a) - 3\,\text{sen}(\pi - 2a)$

Redução ao 1.º quadrante

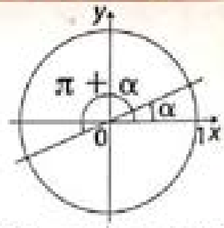
Aplicando a simetria do círculo, podemos determinar os valores das razões trigonométricas de ângulos pertencentes a outros quadrantes no 1.º quadrante:

Ângulo no 2.º quadrante



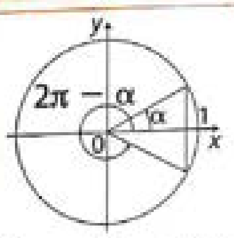
$\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,\alpha$
$\text{tg}\,(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

Ângulo no 3.º quadrante



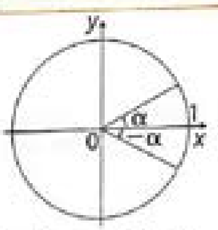
$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\,\alpha$
$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(\pi + \alpha) = \text{cotg}\,\alpha$

Ângulo no 4.º quadrante



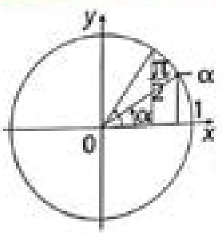
$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(2\pi - \alpha) = +\cos\,\alpha$
$\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(2\pi - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

Ângulo no 4.º quadrante



$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
$\cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha$
$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\text{cotg}\,(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

Ângulo no 1.º quadrante



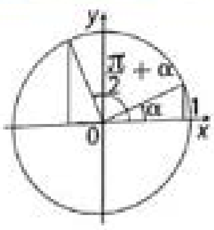
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha$

$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$

Ângulo no 2.º quadrante

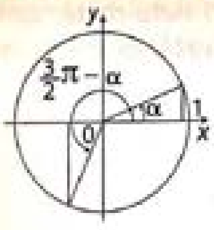
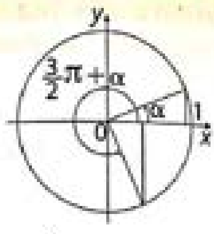


$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg}\,\alpha$

$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg}\,\alpha$

Ângulo no 3.º quadrante	Ângulo no 4.º quadrante
	
$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos\alpha$	$\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\text{sen}\,\alpha$	$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$
$\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha$	$\text{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\text{cotg}\,\alpha$
$\text{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = -\text{tg}\,\alpha$

56

Determine com 2 c.d. o valor de $x \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ que satisfaça:

a) $\cos x = -0{,}8$

b) $\text{sen}\,x = -0{,}75$

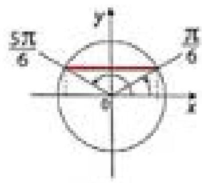
Exercícios resolvidos

1. Calcule o valor exacto de:

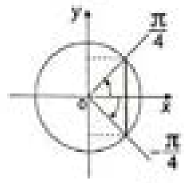
a) $\cos\frac{5\pi}{6}$ b) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}$ c) $\text{tg}\,\frac{22\pi}{3}$ d) $\text{sen}\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$

Resolução

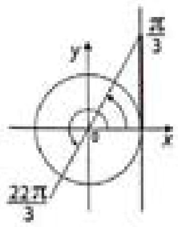
a) $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



b) $\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



c) $\text{tg}\,\frac{22\pi}{3} = \text{tg}\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$



d) $\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Sabendo que $\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, calcule o valor exacto de:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2\,\text{sen}(\pi + \alpha) + \text{tg}(\alpha + \pi).$$

Resolução

Sabemos que $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$, logo $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$. Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ e $\text{tg}(\alpha + \pi) = \text{tg}\,\alpha$, a expressão dada é equivalente a $\cos\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{tg}\,\alpha$. A determinação de $\cos\alpha$, conhecido $\text{sen}\,\alpha$, faz-se recorrendo à fórmula fundamental de trigonometria:

De $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$ vem $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

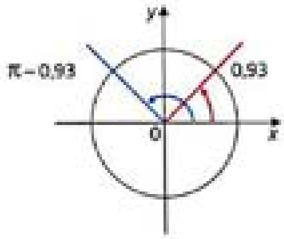
Como $\alpha \in 2.^\circ$ Q $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{8}}{8}$.

Então, o valor da expressão é $-\frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{16 - 11\sqrt{8}}{24}$.

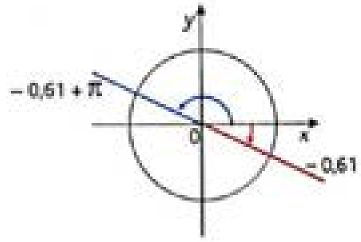
3. Determine um valor aproximado às centésimas do valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ que satisfaça:

a) $\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$ b) $\text{tg}\,\alpha = -0{,}7$

Resolução



a) Fazendo $\text{sen}^{-1}(0{,}8)$ obtemos o valor aproximado 0,93 que tem seno 0,8 mas que está no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
O valor de α pretendido é $\pi - 0{,}93 \approx 2{,}21$.

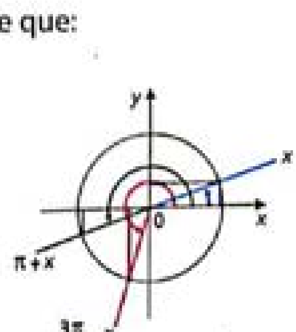


b) Fazendo $\text{tg}^{-1}(-0{,}7)$ obtemos o valor aproximado $-0{,}61$ pertencendo este valor ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.
A resposta pretendida é $x \approx -0{,}61 + \pi \approx 2{,}53$.

4. Determine o quadrante a que pertence um ângulo x acerca do qual se sabe que:

$$\text{sen}(\pi + x) < 0 \wedge \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$$

Resolução



Como $\text{sen}(\pi + x) = -\text{sen}\,x$ tem-se $-\text{sen}\,x < 0 \Leftrightarrow \text{sen}\,x < 0$ e porque $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, tem-se $-\cos x < 0 \Leftrightarrow \cos x < 0$.
Sendo o seno negativo e o co-seno negativo, o ângulo só pode estar no terceiro quadrante.

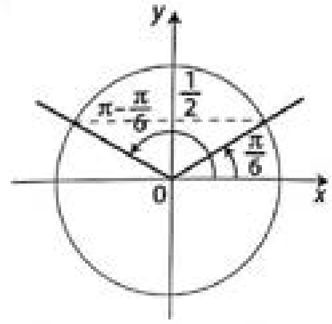
Equações trigonométricas

As **equações trigonométricas** podem ser resolvidas quer no universo das amplitudes de ângulo (expressas em graus ou em radianos), quer no universo $\mathbb{R}$, quer em qualquer subconjunto dos anteriores.

Já em exemplos e exercícios deste livro resolvemos várias equações, de um modo geral, em intervalos limitados.

Vamos trabalhar, preferencialmente, em $\mathbb{R}$, mas o caminho a seguir vai ser idêntico ao que usámos até aqui: recurso ao círculo trigonométrico e a simetrias e recurso à calculadora quando trabalharmos com valores aproximados.

1. Problema: Determinar as amplitudes de todos os ângulos cujo seno é $\frac{1}{2}$.



Resolução

Pretende-se resolver a condição $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Como $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ então $x = \frac{\pi}{6}$ é uma solução da equação dada.

Mas esta não é a única solução da equação, o que se pode confirmar recorrendo ao círculo trigonométrico.

$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ também é uma solução da equação pois $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Como o seno tem por período positivo mínimo 2π, a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ tem como soluções todos os ângulos que se podem obter a partir das expressões:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \vee x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Conclusão:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

ou, em graus,

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \vee x = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

ou ainda, sendo $a \in [-1, 1]$

$$\operatorname{sen} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{sen}^{-1}(a) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(a) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\text{ou } x = \operatorname{sen}^{-1}(a) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \vee x = 180^\circ - \operatorname{sen}^{-1}(a) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

sendo $\operatorname{sen}^{-1}(a)$ um valor que tem seno igual a a.

57

Resolva as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x = 0$

b) $2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3}$

c) $-1 + \operatorname{sen} x = 2$

d) $\frac{-3 \operatorname{sen} x}{5} = 0$

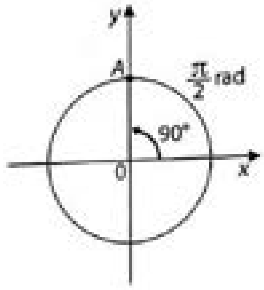
Exercícios resolvidos

Resolva as equações:

a) $\operatorname{sen} x = 1$ b) $\operatorname{sen}(2x) = 1$

Resolução

a) O ponto A é o único ponto do círculo trigonométrico que tem ordenada 1. Só os ângulos que têm o lado extremidade sobre $\dot{O}A$ têm seno igual a 1. Uma medida do ângulo $X\hat{O}A$ é 90º ou $\frac{\pi}{2}$ rad. Como a cada ângulo corresponde uma infinidade de medidas que diferem de múltiplos de 360º ou de 2π rad, as soluções da equação $\operatorname{sen} x = 1$ são os valores $x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$ (no universo das amplitudes do ângulo expressas em graus) ou $x = \frac{\pi}{2}$ rad $+ 2\pi k$ rad, $k \in \mathbb{Z}$ (no universo das amplitudes de ângulo expressas em radianos) ou $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ (no universo $\mathbb{R}$).

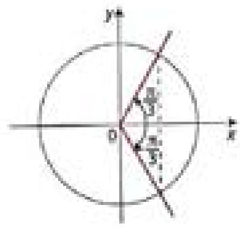


b) A equação é idêntica à anterior, apenas diferindo no argumento do seno:

$\operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$ ou

$\operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2. Problema: Determinar as amplitudes de todos os ângulos cujo co-seno é $\frac{1}{2}$.



Resolução

Sabemos que $x = \frac{\pi}{3}$ é uma solução da equação $\cos x = \frac{1}{2}$ que se pretende resolver.

Representando a situação no círculo trigonométrico conclui-se que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, logo $x = \frac{\pi}{3}$ torna verdadeira a igualdade $\cos x = \frac{1}{2}$.

As soluções da equação são:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

visto que 2π é o período positivo mínimo do co-seno.

Conclusão:

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ou, em graus,

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\alpha + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

ou ainda, sendo $a \in [-1, 1]$

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \cos^{-1}(a) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\cos^{-1}(a) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
ou $x = \cos^{-1}(a) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\cos^{-1}(a) + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

sendo $\cos^{-1}(a)$ um valor que tem co-seno igual a a.

58

Resolva as equações seguintes:

a) $\cos x = -1$

b) $2\cos x = \frac{3}{\sqrt{3}}$

c) $\cos x + \pi = 0$

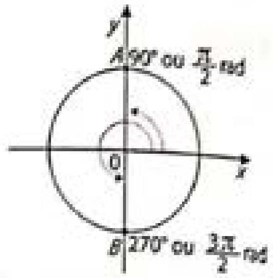
Exercícios resolvidos

1. Resolva as equações:

a) $\cos x = 0$ b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

Resolução

a) Há dois pontos no círculo trigonométrico com abcissa zero: os pontos A e B. Os ângulos com o lado extremidade sobre $\dot{O}A$ ou sobre $\dot{O}B$ têm amplitudes:



$$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$$

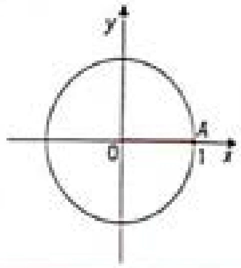
Mas, como os lados extremidade destes ângulos estão sobre a mesma recta, as soluções podem ser apresentadas numa única expressão:

$$x = 90° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\mathbb{R}$, $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

É claro que em vez de tomarmos $\frac{\pi}{2}$ para referência, podemos tomar $\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ou qualquer outro valor que tenha co-seno zero:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



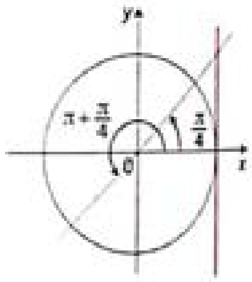
b) Em $\mathbb{R}$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Observe que entre 0 e 2π existem dois ângulos cuja tangente é 1: $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. Todos os ângulos cujos lados extremidade coincidam com os de $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ podem ser obtidos a partir de uma única expressão.

3. Problema: Determinar as amplitudes de todos os ângulos cuja tangente seja 1.

Tal como no caso do seno e do co-seno, também esta equação não tem uma única solução.

$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$ e como o período mínimo da tangente é π rad, as soluções da equação dada são da forma:



$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Conclusão:

$$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou, em graus,

$$\text{tg}\, x = \text{tg}\, \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 180°k, k \in \mathbb{Z}$$

ou ainda,

$$\text{tg}\, x = a \Leftrightarrow x = \text{tg}^{-1}(a) + k\pi \text{ (ou } + 180°k), k \in \mathbb{Z}$$

sendo $\text{tg}^{-1}(a)$ um valor que tem tangente igual a a.

59

Escreva a expressão geral dos ângulos em que:

a) $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$

b) $2 + 2\,\text{tg}\, x = 0$

c) $\text{tg}\, x$ não existe.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação: $\text{tg}\, x = 0$.

Resolução

A tangente é zero quando o seno é zero.

$\text{tg}\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ou

$\text{tg}\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + 180°k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 180°k, k \in \mathbb{Z}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\text{tg}\, x = \text{tg}\, \frac{\pi}{7}$

b) $\text{tg}\, x = \sqrt{3}$

Resolução

a) $\text{tg}\, x = \text{tg}\, \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{tg}\, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \text{tg}\, \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

60

Justifique as equivalências seguintes e resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\text{sen}\,(x + \pi) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = -1$

b) $1 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos x = -1$

Com a calculadora, em graus, $\text{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$ e

$60° \rightarrow \frac{\pi}{3}$ rad

61

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das equações seguintes e indique as soluções que pertencem ao intervalo $[-\pi, 2\pi]$:

a) $\cos \alpha = 0$

b) $3\, \text{sen}\, \frac{x}{2} = 0$

c) $\cos(2x) + 1 = 0$

d) $\text{sen}\, \beta \cdot \cos \beta = 0$

e) $\text{tg}\,(2\theta) = -1$

f) $\cos x = \frac{1}{2} \wedge \text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Equações trigonométricas cujas soluções, em $\mathbb{R}$, apresentam-se em duas expressões.

Exercícios resolvidos

1. Resolva as equações seguintes:

a) $\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{5}$

b) $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

Resolução

a) Como $\text{sen}\, \alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)$ e como ângulos com o mesmo lado extremidade admitem medidas que diferem de múltiplos de 2π tem-se,

$\text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

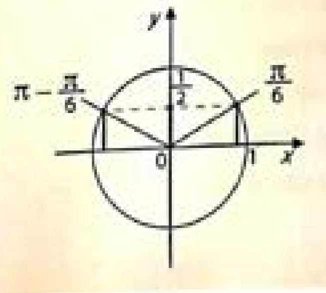
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{4\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

b) Depois de identificarmos um ângulo com seno igual a $\frac{1}{2}$, ficaremos numa situação idêntica à alínea a). Recorrendo à tabela de valores exactos ou à calculadora, temos que $\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Então, $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \text{sen}\, \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Com a calculadora, em graus, $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ e $30° \rightarrow \frac{\pi}{6}$ rad



62

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

b) $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$

c) $\operatorname{sen}(2\theta) = \cos -\frac{\pi}{3}$

d) $\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

e) $\operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen} x$

63

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\cos x = \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

b) $2\cos x + 1 = 0$

c) $\cos(2\alpha) = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos(3x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

e) $2\cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) - \sqrt{2} = 0$

64

Resolva as equações seguintes:

a) $2\cos x - 1 = 0$

b) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} = 0$

c) $\operatorname{tg} x = 0$

d) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

e) $2\operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$

f) $\operatorname{tg} x = 1$

g) $\operatorname{cotg} x = 1$

h) $\operatorname{cotg} x = 0$

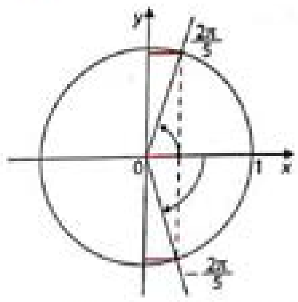
2. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\cos x = \cos\frac{2\pi}{5}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução

a) Como $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ e como ângulos com o mesmo lado extremidade admitem medidas que diferem de múltiplos de 2π tem-se:

$$\cos x = \cos\frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Nota: Se pretendermos as soluções do intervalo $[0, 4\pi]$, atribuímos valores convenientes a $k \in \mathbb{Z}$:

Para $k = 0$, obtemos $x = \frac{2\pi}{5} \vee x = -\frac{2\pi}{5}$, não nos interessando a solução $-\frac{2\pi}{5}$ por não pertencer ao intervalo indicado.

Para $k = 1$, temos $x = \frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{12\pi}{5} \vee x = -\frac{2\pi}{5} + 2\pi = \frac{8\pi}{5}$, pertencendo ambos os valores a $[0, 4\pi]$.

Para $k = 2$, as soluções são $x = \frac{2\pi}{5} + 4\pi$, que é superior a 4π e não pertence, portanto, ao intervalo $[0, 4\pi]$ e obtemos também $x = -\frac{2\pi}{5} + 4\pi = \frac{18\pi}{5}$ que é outra das soluções pretendidas.

Para $k > 2 \vee k < 0$ obtemos soluções fora do intervalo pretendido.

As soluções desta equação, no intervalo $[0, 4\pi]$, são então $\frac{2\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{12\pi}{5}$ e $\frac{18\pi}{5}$.

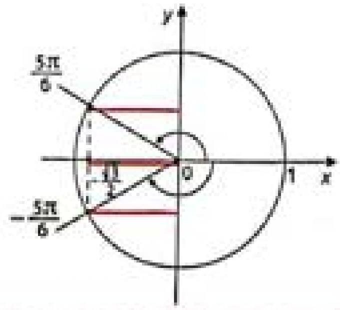
b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

C. a.

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150°$

$150° \rightarrow \frac{5}{6}\pi$ rad



18. Sendo x um ângulo agudo e $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcule sem usar a calculadora:

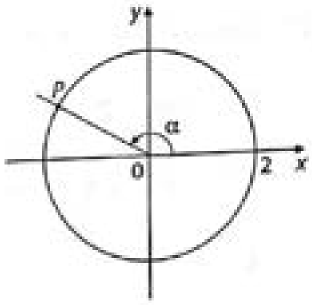
a) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - (1 - \cos^2 x)$, sendo $x = 45°$.

b) $2 \cos 30° + 3 \operatorname{tg} 30° + 4 \operatorname{sen} 30°$, sabendo que $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. O lado extremidade de um ângulo de amplitude $-2\,538°$ pertence ao:

A. 1.º quadrante B. 2.º quadrante C. 3.º quadrante D. 4.º quadrante

20. O círculo da figura tem raio 2. Se $\alpha = 150°$, as coordenadas do ponto P são:



A. $(-\sqrt{3},\ 1)$

B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

C. $(-1,\ \sqrt{3})$

D. $(-0{,}87;\ 0{,}5)$

21. No círculo trigonométrico, assinale os lados extremidade dos ângulos cujas amplitudes x satisfaçam as equações:

a) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$ b) $\operatorname{tg} x = 1{,}5$

22. Determine as amplitudes x entre 0° e 360° que são soluções das equações:

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 708°$ b) $\cos x = \cos(-250°)$ c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(1\,020°)$

d) $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(40°)$ e) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

23. Determine o valor exacto das expressões:

a) $\cos 540° - 2\cos 30° + \operatorname{sen}(-315°)$

b) $\frac{\cos 360° + \operatorname{sen} 45°}{1 - \cos 765°}$

c) $\cos 40° + \cos 140° + \cos 150°$

24. Sendo $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ com $270° < \alpha < 360°$, pode afirmar-se que:

A. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ B. $\alpha = -60°$ C. $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\alpha = 300°$

25. Determine os ângulos α entre 0° e 360° que satisfaçam:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(-160°)$ b) $\cos \alpha = \cos 410°$ c) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(-20°)$

d) $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha$ e) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

26. Determine a expressão geral dos ângulos que satisfaçam as equações:

a) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 35°$ b) $\cos \alpha = \cos 115°$

27. Quais as amplitudes que correspondem ao mesmo par de semi-rectas?

A. $\frac{7\pi}{6}$ rad e $\frac{\pi}{6}$ rad B. $-\frac{25\pi}{6}$ rad e $\frac{11\pi}{6}$ rad

C. $-\frac{\pi}{6}$ rad e $\frac{13\pi}{6}$ rad D. $-\frac{5\pi}{6}$ rad e $\frac{13\pi}{6}$ rad

28. Numa circunferência de raio 4 cm, um arco de 2 cm tem amplitude:

A. $\frac{\pi}{2}$ rad B. π rad C. $\frac{1}{2}$ rad D. 2 rad

29. A expressão $\text{sen}\,(\pi - \alpha) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ é equivalente a:

A. $\text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha$ B. $3\,\text{sen}\,\alpha$ C. $\cos\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha$ D. $-3\,\text{sen}\,\alpha$

30. O valor exacto da expressão $2\cos\frac{5\pi}{6} + \text{tg}\,\frac{7\pi}{6}$ é:

A. $\sqrt{3} - 1$ B. $1 - \sqrt{3}$ C. $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

31. Sabendo que θ é um ângulo agudo e sabendo que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{5}$, determine o valor exacto de:

$$\text{tg}\,\theta + \text{sen}\,(90° - \theta)$$

32. Recorrendo à calculadora, determine, com aproximação ao grau, as soluções entre 0° e 360° de cada uma das equações.

a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{2}\cos\alpha$ b) $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{4} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$

33. Numa circunferência de raio 2 cm, um arco de 2 cm tem amplitude:

A. $\frac{\pi}{2}$ rad B. π rad C. $\frac{1}{2}$ rad D. 1 rad

34. Um ângulo de amplitude 6 radianos pertence a que quadrante?

A. 1.° B. 2.° C. 3.° D. 4.°

35. Qual das seguintes equações tem uma única solução sendo $0° \leq x < 360°$?

A. $\cos x = 0$ B. $\text{sen}\,x = -1$ C. $\text{tg}\,x = 0$ D. $\text{tg}\,x = 1$

36. Qual dos seguintes pares é constituído por equações equivalentes em $\mathbb{R}$?

A. $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ e $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\text{sen}\,x = 1$ e $\cos x = 0$

C. $\text{tg}\,x = 1$ e $\text{sen}\,x = \cos x$ D. $\text{tg}\,x = 0$ e $\cos x = 1$

37. Determine as soluções de cada uma das equações seguintes, que pertencem ao intervalo $]-\pi, \pi[$.

a) $\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ b) $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ c) $\text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$

d) $\cos x = \cos\frac{5\pi}{4}$ e) $\text{tg}\,x = \text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$ f) $\text{tg}\,x = -\text{tg}\,\frac{\pi}{4}$

g) $\text{sen}\,x = \frac{1}{2}$ h) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$ i) $\text{tg}\,x = \sqrt{3} \wedge \cos x = -\frac{1}{2}$

38. Qual a amplitude em graus e em radianos do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 9 h 30 m?

39. Simplifique cada uma das expressões:

a) $\cos(\pi - \alpha) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

b) $\text{tg}(\pi + \alpha) + \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

c) $\text{sen}^2\theta + \cos^2(\pi + \theta)$

d) $\text{sen}(90° - \alpha) + \cos(\alpha - 540°)$

40. Indique a que quadrante pertencem os ângulos de amplitudes:

a) $1\,470°$

b) $-3\,210°$

c) $-500°$

d) 20 rad

e) $\frac{121}{3}\pi$ rad

f) $-\frac{313}{6}\pi$ rad

41. Calcule o valor exacto de:

a) $\text{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right) - 2\cos\frac{5\pi}{6} + \text{sen}^2\left(\frac{11}{4}\pi\right)$

b) $\frac{1}{2}\text{tg}\,\frac{29\pi}{3} + 2\,\text{sen}\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + \cos\frac{11\pi}{6}$

c) $\cos 210° - \text{sen}\,330° + \text{tg}\,225°$

d) $\text{sen}(\pi + x)$ sabendo que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{2}{3}$ e $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

e) $\cos(3\pi - x) - 2\,\text{tg}(\pi + x)$ sabendo que $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$ e $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$

42. Sendo a um ângulo do 2.º quadrante e tal que $\text{sen}\,a = \frac{2}{5}$, calcule $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ e $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$.

43. Indique uma expressão das soluções das equações seguintes (usa 2 c.d.):

a) $3\cos x = 1$

b) $\text{sen}(2x) = \frac{3}{4}$

c) $\text{tg}(x + 1) = 2$

44. Determine os valores de $t \in \mathbb{R}$ para os quais cada uma das equações seguintes é possível nos intervalos indicados:

a) $\text{sen}\,x = 2 - \frac{t}{3}$ em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

b) $\text{tg}\,x = t^2$ em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\text{tg}\,x = -2t$ em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

d) $\text{sen}\,x = \frac{t+3}{2}$ em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right[$

e) $\cos x = \frac{1 - 2t}{3}$ em $\left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$

f) $\text{sen}\,x = 3 - t^2$ em $\mathbb{R}$

45. Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das equações seguintes apresentando os valores aproximados com 2 c.d.:

a) $2\,\text{sen}\,x - 0{,}8 = 0$

b) $1 = 3\cos x + 1{,}8$

c) $\text{tg}(x - 3) = -10$

Noções gerais de Estatística

Neste capítulo, apenas faremos uma introdução aos conceitos mais básicos referentes à Estatística.

Chama-se **população** ao conjunto sobre o qual recai uma análise estatística. Note-se que o termo população não se refere só a pessoas, inclui também conjuntos de natureza diversa.

Exemplos

1. Conjunto de golos marcados durante a época futebolística 2004, em Moçambique.
2. Conjunto dos municípios de Moçambique.
3. Conjunto de pares de sapatos produzidos na fábrica Ipa durante o primeiro trimestre de 2005.

A população pode ser **finita** ou **infinita**, consoante o número dos seus elementos é finito ou infinito.

Chama-se **indivíduo** ou **unidade estatística** a cada elemento de uma população.

Chama-se **carácter estatístico** a uma propriedade que permita caracterizar os indivíduos de uma população.

Os caracteres estatísticos podem ser:

- Caracteres **qualitativos** ou não mensuráveis e não podem medir-se.
- Caracteres **quantitativos** ou mensuráveis e podem medir-se.

Exemplos

Caracteres qualitativos são: a cor dos olhos, o estado civil, a profissão, etc.
Caracteres quantitativos são: o peso, a altura, o salário, etc.

Pelo facto de serem susceptíveis de medir-se e poderem assumir diferentes valores numéricos, os caracteres quantitativos são também designados por **variáveis estatísticas.**

As variáveis estatísticas podem ser **discretas** ou **contínuas.**

Designa-se uma variável por **contínua** quando a mesma, pelo menos em termos teóricos, pode tomar todos os valores de um determinado intervalo real; caso contrário a variável diz-se **discreta.**

São **exemplos** de variáveis discretas as classificações atribuídas numa turma na disciplina de Matemática, os livros colocados numa estante, etc.

São **exemplos** de variáveis contínuas a velocidade de um carro em km/h, o peso dos alunos de uma escola, etc.

1

Indique se são finitas ou infinitas as seguintes populações estatísticas:

a) Alunos da Escola Secundária Josina Machel.
b) Extracção com reposição de uma carta de um baralho.
c) Número de pares de sapatos produzidos numa fábrica durante uma semana.
d) Conjunto de pessoas nascidas em 1990.

2

Complete com a palavra discreta ou contínua as seguintes expressões de forma a apresentarem o valor lógico V:

a) O número de divisões de uma casa é uma variável —.
b) O peso das crianças de um infantário é uma variável —.
c) O número de médicos de uma cidade é uma variável —.
d) A nota atribuída a cada um dos candidatos a exame da 10.ª classe em 2011 é uma variável —.
e) O número de gramas de açúcar, gastos num dia, por uma família é uma variável —.

A recolha dos dados para uma análise estatística pode ser feita de duas formas: por **recenseamento** ou **censo**, quando é observada toda a população e por **sondagem**, quando é observada uma parte da população (amostra).

Para que os dados de um inquérito estatístico sejam analisados, é importante que os mesmos sejam convenientemente ordenados. Para isso, recorre-se, muitas vezes, a uma tabela onde se registam os valores da variável estatística e o número de vezes que cada um desses valores se repete, que é a **frequência absoluta**.

Chama-se **frequência absoluta** ao número de vezes que se repete cada valor da variável.

Exemplo

Ao efectuar-se um inquérito sobre as classificações atribuídas a 35 alunos de uma turma da 10.ª classe na disciplina de Matemática, obtiveram-se os seguintes resultados:

10	16	9	14	15	8	12	10	17	11	15	8
10	12	12	10	15	9	12	10	12	15	12	12
12	13	8	14	10	18	8	12	12	10	10	

Neste caso, a variável estatística é discreta e toma os seguintes valores:
{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}

A soma de todas as frequências absolutas é o **cardinal da população** ou **frequência total**.

Sob o ponto de vista estatístico, as frequências absolutas têm reduzido interesse, devido ao facto de não permitirem a comparação com a população de diferente cardinal. Para se evitar esta inconveniência recorre-se às **frequências relativas** que se obtêm através da divisão de cada uma das frequências absolutas pelo cardinal da população.

Esbocemos agora a tabela de distribuição de frequências que contém os valores da variável e as respectivas frequências absolutas e relativas.

Valores da variável	Frequência absoluta (f_a)	Frequência relativa $\left(\frac{f_a}{N}\right)$
8	4	0,114
9	2	0,085
10	8	0,228
11	1	0,028
12	10	0,286
13	1	0,028
14	2	0,085
15	4	0,114
16	1	0,028
17	1	0,028
18	1	0,028
Total	N = 35	1

3

Sabendo que num inquérito feito a 10 pessoas sobre o seu estado civil foram obtidos os seguintes resultados:

casado	solteiro
solteiro	casado
viúvo	casado
solteiro	separado
divorciado	viúvo

Indique:

a) A população estatística.

b) O carácter estudado.

c) As modalidades do carácter estudado.

A tabela de distribuição de frequências é, por vezes, apresentada numa outra posição.

Exemplos

Considere as classificações finais na disciplina de Matemática dos alunos de uma turma, dadas pela seguinte tabela:

Classificação	18	16	14	11	8	4
N.º de alunos	2	10	20	2	4	1

Construa uma tabela de frequências absolutas e de frequências relativas:

Classificação	18	16	14	11	8	4	Total
Frequência absoluta	2	10	20	2	4	1	39
Frequência relativa	0,051	0,256	0,513	0,051	0,103	0,026	1,000

4

A quantidade de vitamina C, expressa em mg, em 10 amostras de concentrado de tomate, de igual peso, é a seguinte:

12, 16, 18, 15, 21, 18, 20, 18, 15, 20.

Construa a tabela de distribuição de frequências absolutas e relativas.

Muitas vezes, para a obtenção de um maior número de informações, recorre-se às **frequências absolutas acumuladas** e às **frequências relativas acumuladas**, sendo as frequências acumuladas a soma das frequências de um dado valor da variável com as frequências dos valores que o antecedem.

Considerando os valores da tabela de distribuição de frequências anteriores podemos formar a seguinte tabela, que contém as respectivas frequências acumuladas.

Valores da variável	Frequência absoluta	Frequência absoluta acumulada	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada
8	4	4	0,114	0,114
9	2	6	0,057	0,171
10	8	14	0,228	0,399
11	1	15	0,029	0,428
12	10	25	0,285	0,713
13	1	26	0,029	0,742
14	2	28	0,057	0,799
15	4	32	0,114	0,913
16	1	33	0,029	0,942
17	1	34	0,029	0,971
18	1	35	0,029	1,000

A generalização da tabela anterior para qualquer variável discreta é dada pela tabela seguinte:

Variável x_i	Frequência absoluta (f_i)	Frequência absoluta acumulada (F_i)	Frequência relativa $\left(\frac{F_i}{N}\right)$	Frequência relativa acumulada (F_n)
x_1	f_1	$F_1 = f_1$	$\frac{F_1}{N}$	$\frac{F_1}{N}$
x_2	f_2	$F_2 = f_1 + f_2$	$\frac{F_2}{N}$	$\frac{F_1 + F_2}{N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_i	f_i	$F_i = f_1 + f_2 ... f_n$	$\frac{F_i}{N}$	$\frac{f_i + f_2 + ... + f_i}{N}$
x_n	f_n	$F_n = f_1 + f_2 ... f_n$	$\frac{F_n}{N}$	$\frac{f_i + f_2 + ... + fn}{N}$
Total	$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$	$F_n = N$	$\sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{N} = 1$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{N} = 1$

As **variáveis contínuas** são susceptíveis de tomar quaisquer valores entre dois dados.

O número de observações é em geral, limitado, e consequentemente as frequências absolutas são muito pequenas, originando alguma dificuldade ao estudo. Devido a isso, para o tratamento deste tipo de variáveis recorre-se a **classes**, que são obtidas dividindo o conjunto de valores da variável em subconjuntos com a mesma extensão, disjuntos dois a dois.

A diferença entre o maior e o menor valor da variável do conjunto estudado é designada por **amplitude** do domínio da variável.

A amplitude de cada classe é obtida dividindo a amplitude do domínio pelo número de classes.

Consideremos os resultados de um inquérito efectuado a 35 alunos de uma turma da 10.ª classe, sobre as suas alturas, em centímetros:

150	146	144	150	146	144	150
151	148	148	151	147	150	148
147	151	150	147	144	147	150
148	150	145	146	149	155	147
152	147	151	152	153	143	149

Os elementos pertencentes a uma classe têm o mesmo valor, que será o valor médio dos extremos da classe e que se designa por **marca** ou **centro**.

5

As temperaturas máximas, em graus centígrados registadas, no mês de Setembro de 2012, num determinado distrito da Província de Tete, foram as seguintes:

25	32	30	26
26	26	28	27
31	32	33	33
31	34	28	29
27	30	29	32
30	34	33	33
32	31	33	32
35	34	33	31

a) Construa uma tabela de distribuição contendo: a variável, a frequência absoluta, a frequência absoluta acumulada e a frequência relativa.

b) Qual a temperatura máxima registada e qual a sua frequência absoluta?

c) Qual a frequência relativa da menor temperatura registada?

d) Quais as frequências acumuladas, em percentagem, abaixo de 30 °C. E acima de 31 °C, inclusive?

e) Qual a frequência acumulada entre 27 °C e 32 °C, inclusive?

Agrupando os dados do resultado do inquérito em seis classes, cada uma delas tem de amplitude 2 cm e a sua distribuição é a seguinte:

Classe (em cm)	Frequência absoluta	Frequência relativa	Marca (em cm)
[143, 145[	4	0,114	144
[145, 147[	4	0,114	146
[147, 149[	10	0,286	148
[149, 151[	9	0,257	150
[151, 153[	6	0,172	152
[153, 155[	2	0,057	154
Total	35	1,000	

Analisando a tabela é possível afirmar, por exemplo:

- A classe de maior frequência é [147, 149[.
- A classe de menor frequência é [153, 155[.
- 9 alunos têm a altura maior que 149 cm e menor que 151 cm.

É de notar que por este processo de agrupamento se perdem muitos detalhes particulares dos dados, porém conseguem-se evidenciar relações fundamentais entre eles.

Exemplo

Na 2.ª classe, a média de altura é 126 cm, mas desconhece-se a altura exacta de cada elemento.

Representações tabelares e gráficas

As representações tabelares e gráficas, muitas vezes, traduzem as informações contidas nas tabelas de distribuição de frequências de uma forma mais sugestiva e mais fácil de analisar e estudar. Vejamos as suas formas de representação.

Gráfico de barras

Para uma representação usando-se um gráfico de barras, é necessário dispor de uma tabela de frequências. Marcam-se sobre o eixo das abcissas os valores da variável, x_i, e sobre o eixo das ordenadas, os valores da frequência, f_i ou F_i.

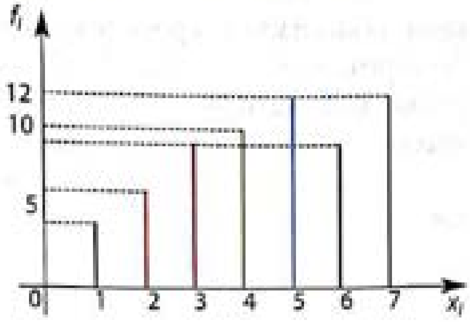
Tracemos os respectivos gráficos de barras, onde para cada um dos pontos marcados sobre o eixo das abcissas se traçam segmentos de recta de comprimento igual à frequência respectiva.

O gráfico de barras é indicado para a comparação de dados de tipo discreto.

Consideremos a seguinte tabela de frequências:

Variável x_i	Frequência absoluta f_i	Frequência acumulada F_i
1	4	4
2	6	10
3	8	18
4	10	28
5	12	40
6	8	48
7	12	60
Total	60	

Gráfico de frequências absolutas

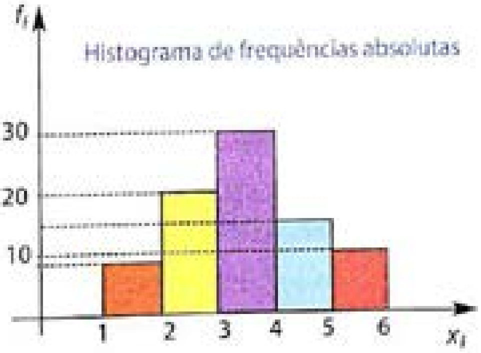


Histograma

Quando trabalhamos com uma variável contínua, o gráfico de barras toma o seguinte aspecto e é designado por histograma.

Para a construção do histograma são marcadas sobre o eixo das abcissas, as extremidades das classes consideradas e no eixo das ordenadas, as frequências das classes.

Classes x_i	Frequência absoluta
[1, 2[	8
[2, 3[	20
[3, 4[	30
[4, 5[	25
[5, 6[	10



6

Desenhe o histograma relativo à seguinte tabela de distribuição:

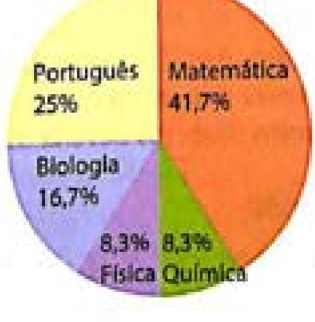
Classes	Frequência
]100, 110[	20
]110, 120[	25
]120, 130[	12
]130, 140[	15
]140, 150[	8

Gráfico circular

Também é utilizada a representação por gráficos circulares, onde as diferentes modalidades de um carácter são representadas mediante sectores circulares e a área de cada sector é proporcional à frequência absoluta correspondente.

Consideremos a distribuição dos professores de uma escola de acordo com a sua especialidade.

	Frequência absoluta f_i	Frequência acumulada F_i
Matemática	25	41,7%
Português	15	25,0%
Biologia	10	16,7%
Física	5	8,3%
Química	5	8,3%



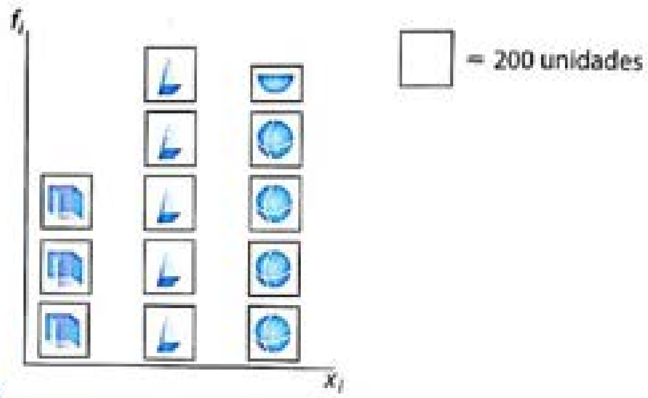
Pictograma

O **pictograma** é um tipo de gráfico onde a frequência absoluta de cada modalidade é representada por desenhos semelhantes entre si e de áreas proporcionais à respectiva frequência. Pode também, ser representado por um desenho relativo a cada modalidade em que é repetido o número de vezes proporcional à sua frequência.

Suponhamos que uma escola comprou num determinado ano os seguintes sólidos geométricos:

Cubos	600
Pirâmides de base quadrangular	1 000
Esferas	900

O pictograma respectivo é o seguinte:



7

Sabendo que o número de filhos de 10 famílias inquiridas é o seguinte:

3, 1, 0, 5, 2, 1, 2, 4, 0, 2

a) Construa uma tabela de frequências contendo os valores da variável, as frequências absoluta e relativa e a frequência relativa acumulada.

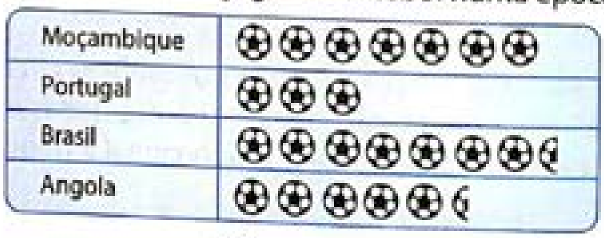
b) Desenhe o gráfico de barras para as frequências absolutas.

c) Desenhe o gráfico circular correspondente.

Exercícios resolvidos

O pictograma seguinte mostra o número de espectadores de jogos de futebol, numa época, em quatro países:

Espectadores de jogos de futebol numa época



= 200 000 pessoas

a) Qual o país onde o número de espectadores é um milhão e quatrocentos mil?

b) Quantos espectadores assistiram ao futebol naqueles quatro países?

c) Se nessa época, na África do Sul, houve um milhão de espectadores, quantos símbolos deveria usar para acrescentar este país ao pictograma?

Resolução

a) Moçambique b) 4 600 000 c) 5 símbolos.

Tabela de dupla entrada

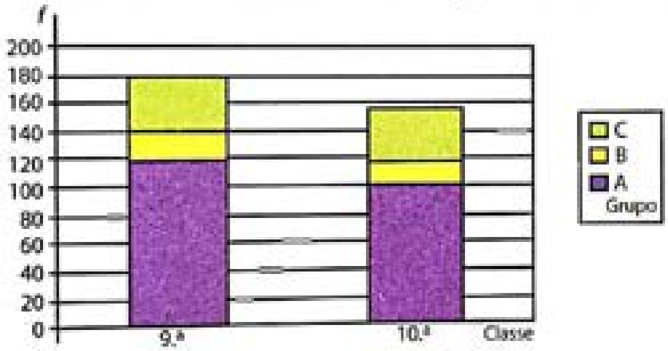
Numa tabela de dupla entrada mostram-se as frequências das duas variáveis da população considerada.

Consideremos a seguinte tabela das frequências absolutas, que mostra a distribuição das inscrições dos alunos da 9.ª e 10.ª Classes de uma escola do Ensino Secundário.

Classe / Turma	9.ª	10.ª	Total
A	120	100	220
B	20	18	38
C	40	38	78
Total	180	156	336

- 180 alunos estão matriculados na 9.ª Classe.
- 78 alunos estão matriculados na turmas C da 9.ª e 10.ª Classe.
- Estão matriculados na 9.ª e 10.ª Classes 336 alunos.

Representando os dados da tabela num diagrama de barras teremos:



8

A tabela que se segue mostra o aproveitamento de uma turma da 10.ª Classe na disciplina de Educação Física:

Sexo / Classificação	F	M	Total
M. Bom	3	4	7
Bom	5	7	12
Suficiente	10	8	18
Insuficiente	3	4	7
Total	21	23	44

a) Quantos alunos obtiveram a classificação positiva?

b) Represente as frequências absolutas através de um diagrama de barras.

Exercícios resolvidos

1. A tabela mostra o aproveitamento de uma turma da 10.ª Classe nas disciplinas de Matemática e Educação Física

Disciplina / Classificação	Matemática	Física	Total
M. Bom	8	4	12
Bom	5	10	15
Suficiente	12	12	24
Insuficiente	9	12	21
Total	34	38	72

a) Quantos alunos tiveram classificação «Bom» em Matemática?
b) Quantos alunos tiveram classificação «Insuficiente» em Física?
c) Quantos alunos tem a turma?
d) Quantos alunos tiveram uma classificação positiva?

Resolução

a) 10 **b)** 9 **c)** 72 **d)** 51

2. A tabela seguinte indica o número alunos matriculados em três das modalidades desportivas da Escola Secundária Samora Machel.

Género	Modalidade			
	Futebol de cinco	Atletismo	Ginástica	Total
Masculino	43	47	20	110
Feminino	25	30	35	90
Total	68	77	55	200

Responda às seguintes questões.

a) Qual é o total de alunos matriculados nas três modalidades?

b) Qual é o total de alunas matriculadas nas três modalidades?

c) Qual é a percentagem dos alunos do sexo masculino matriculados na três modalidades?

d) Qual é a percentagem das alunas matriculadas em futebol de cinco relativamente ao total dos alunos matriculados em futebol de cinco?

e) A maioria dos alunos matriculados nas três modalidades é de que sexo?

f) O atletismo é a modalidade com maior percentagem de alunos matriculados nas três modalidades?

g) A maioria dos alunos que praticam futebol de cinco é de que sexo?

h) A maioria dos alunos que praticam ginástica é de que sexo?

Resolução

a) 200 alunos
b) 90 alunas
c) $\frac{110}{200} = 100 = 55\%$
d) $\frac{25}{60} \times 100 = 36{,}8\%$
e) Sexo masculino
f) Sim
g) Sexo masculino
h) Feminino

3. Após um inquérito à porta do Hospital Central de Nampula, obteve-se a seguinte tabela de dupla entrada:

Género	Doenças			
	Tuberculose	Malária	Cólera	Total
Sim	32		58	
Não	68	25		135
Total		100	100	

a) Complete a tabela.

b) Indique o número de indivíduos inquiridos.

c) Quantas pessoas já contraíram tuberculose?

d) Quantos indivíduos nunca tiveram cólera?

e) O número de indivíduos que não contraíram malária é maior que o número de indivíduos que não contraíram tuberculose?

f) Qual a doença com maior percentagem de doentes?

g) Construa o gráfico de barras composto.

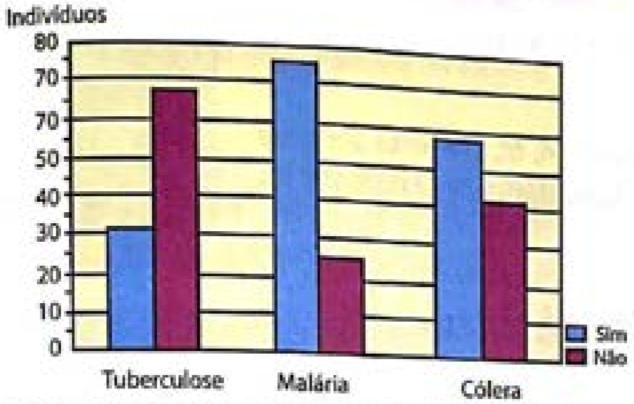
Resolução

a)

Género	Doenças			
	Tuberculose	Malária	Cólera	Total
Sim	32	75	58	165
Não	68	25	42	135
Total	100	100	100	300

b) 300 indivíduos c) 32 indivíduos d) 42 indivíduos e) Não f) A malária

g)



Medidas de centralização

As medidas de centralização permitem-nos caracterizar a distribuição por um número reduzido de parâmetros que evidenciem o que de mais significativo existe.

Chamam-se **medidas de centralização** a todas as medidas que tendem a situar-se no centro do conjunto de dados, depois de ordenados.

8

Considere as distribuições e para cada uma delas, indique a moda:

a) 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10

b) 3, 4, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 10

c) 2, 1, 1, 3, 5, 7, 2, 2, 4, 6

Moda

Chama-se **moda** ou **valor modal** de uma distribuição de frequências ao valor da variável estatística a que corresponde a maior frequência.

Caso existam diversos valores com a mesma frequência a moda não é única, dizendo-se **bimodal**, **trimodal**, etc., dependendo do número de modas: 2, 3, etc. Temos ainda casos em que a moda não existe.

Exemplos

1. Na distribuição

Variável x_i	1	2	3	4
Frequência f_i	5	7	10	8

a moda é 3, uma vez que 3 é o valor da variável que apresenta maior frequência.

2. Na distribuição

Variável x_i	1	2	3	4	5	6	7
Frequência f_i	7	5	4	7	2	6	5

as modas são 1 e 4 pois são os valores com maior frequência. A distribuição diz-se bimodal.

3. Na distribuição

Variável x_i	1	2	3	4
Frequência f_i	5	5	5	5

a moda não existe uma vez que não existe uma frequência maior que as outras.

Caso a variável seja contínua e todos os dados estejam agrupados em classes de igual amplitude, a classe de maior frequência designa-se por **classe modal**.

9

Determine a classe modal das seguintes distribuições:

a)

x_i	f_a	F_i
[0, 3[	15	15
[3, 6[	17	32
[6, 9[	18	50
[9, 12[	20	70
[12, 15[	13	83
[15, 18[	7	90

b)

x_i	f_a
[40, 46[	15
[46, 52[	18
[52, 58[	21
[58, 64[	12
[64, 78[	9

10

Dados os números 4, 10, 14, 20 e 10, determine:

a) A moda.

b) A mediana.

c) A média aritmética.

Exemplo

Na distribuição de frequências,

x_i	f_i
[0, 2[	5
[2, 4[	7
[4, 6[	12
[6, 8[	8
[8, 10[	5

a moda está na classe [4, 6[, por esta ser a de maior frequência. É, portanto, a classe modal.

Média aritmética

Chama-se **média aritmética** de um conjunto de valores $x_1, x_2, ..., x_n$ ao quociente obtido pela divisão da sua soma por n.

$$\text{Média aritmética: } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Se x é uma variável discreta que toma os valores $x_1, x_2, ..., x_n$ com frequências absolutas $f_1, f_2, ..., f_n$, respectivamente, a média aritmética é dada por:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... f_n}$$

$$\text{ou} \quad \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_nx_n}{n} \quad (1)$$

sendo n o número de observações.

Às vezes, associam-se os números $x_1, x_2, ..., x_n$ a certos **factores de ponderação** ou **pesos** $w_1, w_2, ..., w_0$, que dependem do significado ou importância atribuídos aos números. Neste caso,

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

tem a denominação de **média aritmética ponderada**. Note-se a sua semelhança com (1), que pode ser considerada uma média aritmética ponderada, com os pesos $f_1, f_2, ..., f_n$.

Exemplo

Se o exame final do 10.º ano tem peso 3 e as suas provas correntes peso 1, e um estudante tem nota 17 naquele exame e 14 e 18 nas provas. A sua nota média será:

$$\bar{x} = \frac{(1)(14) + (1)(18) + (3)(17)}{1 + 1 + 3} = \frac{83}{5} = 16,6$$

A média aritmética simples é um caso particular da média ponderada, considerando-se para tal todas as frequências absolutas iguais à unidade.

Tratando-se de uma variável contínua, já agrupada em classes, a média aritmética é obtida substituindo os valores da variável de cada classe pela marca respectiva.

Exercícios resolvidos

Determine a média aritmética, quando os valores estão agrupados em classes.

Altura (em cm)	N.º de Pessoas	Marca da classe
[150, 152[	10	151
[152, 154[	20	153
[154, 156[	12	155
[156, 158[	8	157
[158, 160[	15	159

Resolução

A altura média por pessoa, do conjunto considerado, é:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 151 + 20 \cdot 153 + 12 \cdot 155 + 8 \cdot 157 + 15 \cdot 159}{10 + 20 + 12 + 8 + 15}$$

$$\bar{x} = \frac{10.071}{65}$$

$$\bar{x} = 154{,}9$$

11

As classificações obtidas pelos 30 alunos de uma turma, na disciplina de Matemática foram as seguintes

Notas	8	9	10	11	13	15	17
Frequências	2	3	8	6	7	2	2

a) Determine a média aritmética.

b) Indique a mediana e a moda.

Mediana

Chama-se **mediana** de uma distribuição estatística e representa-se por $\tilde{x}$ ao valor da variável para a qual existem tantos valores superiores como inferiores.

Caso o número de dados seja **ímpar** o valor da mediana fica perfeitamente determinado.

Caso o número de dados seja **par**, existem dois termos centrais, escolhendo-se para mediana a média aritmética desses valores centrais.

Exemplos

1. A mediana do conjunto de números {3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} é 6.
2. A mediana do conjunto de números {3, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10} é

$$\tilde{x} = \frac{6 + 7}{2} = 6{,}5$$

3. No caso da tabela seguinte, a mediana será:

x_i	5	6	7	8	9
f_i	1	5	8	13	7

→

A mediana poderia ser calculada agrupando os valores como se fossem dados simples

5, 6, 6, 6, 6, 6, ...

e o processo seria moroso. Para estes casos, recorre-se à tabela de frequências acumuladas:

x_i	f_i	F_i
5	1	1
6	5	6
7	8	14
8	13	27 (>17)
9	7	34

A mediana, neste caso, é dada pelo valor da variável cuja frequência absoluta acumulada excede metade do número de dados. 17 é a metade do número de dados, sendo a mediana 8.

4. Se a variável estatística é contínua, a mediana pertence a uma classe designada por classe mediana e toma-se para o seu valor aproximado a marca da classe.

x_i	f_i	F_i
[0, 2[	5	5
[2, 4[	6	11
[4, 6[	8	19 (> 15)
[6, 8[	7	26
[8, 10[	4	30

Na distribuição, metade do número total dos dados é 15. O primeiro valor da variável cuja frequência absoluta acumulada excede 15 é a classe [4, 6[. A mediana está nesta classe e o seu valor é 5.

Medidas de dispersão

As medidas de centralização tornaram-se insuficientes para caracterizar uma distribuição estatística. Era necessário completar o estudo de uma distribuição estatística com outras medidas que permitissem determinar o grau de dispersão dos dados em torno dos valores centrais.

Intervalo de variação

Chama-se intervalo de variação ou variação à diferença entre os valores extremos da variável, num dado conjunto.

Exercícios resolvidos

No quadro ao lado encontra os resultados de um teste de Matemática de 50 perguntas aplicado a dois grupos de 10 alunos cada. Determina o intervalo de variação de cada grupo.

1.º grupo	2.º grupo	Alunos
20	10	1.º
23	13	2.º
33	20	3.º
35	23	4.º
38	27	5.º
40	30	6.º
43	34	7.º
43	34	8.º
47	38	9.º
48	40	10.º

Resolução

O intervalo de variação no primeiro grupo é 28, isto é, $48 - 20 = 28$, e do segundo grupo é 30, isto é, $40 - 10 = 30$.

Note-se que esta não é uma boa medida de dispersão pois depende exclusivamente dos valores extremos, bastando que um destes se afaste muito para que a variação fique sensivelmente afectada.

Desvio médio

Dados $x_1, x_2, ..., x_n$ valores de uma variável estatística e $\bar{x}$ a sua média aritmética. Chama-se desvio de x_1 relativamente à média $\bar{x}$ à diferença.

$$x_1 - \bar{x} \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Chama-se desvio médio de uma distribuição de frequências, e representa-se por $D_{\bar{x}}$ à média aritmética dos valores absolutos dos desvios em relação à média aritmética.

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + ... + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Exemplos

Dado o conjunto de valores seguinte: {7, 8, 10, 11, 14}.

- A média aritmética é: $\bar{x} = \frac{7 + 8 + 10 + 11 + 14}{5} = \frac{50}{5} = 10$
- Os desvios em relação à média são:

  $7 - 10; 8 - 10; 10 - 10; 11 - 10; 14 - 10$
- A soma dos valores absolutos dos desvios calculados anteriormente:

  $3 + 2 + 0 + 1 + 4 = 10$
- O desvio médio é: $D_{\bar{x}} = \frac{10}{5} = 2$

12

Calcule a classe mediana e a classe modal da seguinte distribuição:

x_i	Frequência absoluta	Freq. absoluta acumulada
[0, 3[	15	15
[3, 6[	17	32
[6, 9[	18	50
[9, 12[	20	70
[12, 15[	13	83
[15, 18[	7	90

13

Dados os números 3, 5, 7, 10, 11, determine:

a) A média aritmética.

b) O intervalo de variação.

c) O desvio médio.

d) A variância.

Se as frequências dos valores $x_1, x_2, ..., x_n$ forem $f_1, f_2, ..., f_n$, respectivamente, o **desvio médio** é dado por:

$$D_x = \frac{f_1|x_1 - \overline{x}| + f_2|x_2 - \overline{x}| + ... + f_n|x_n - \overline{x}|}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

Se a variável é contínua e os dados estiverem agrupados em classes toma-se para valores de x, a marca da classe.

Exercício resolvido

Calcule o desvio médio para a seguinte distribuição de frequências:

Classes	Frequências
[2, 6[	1
[6, 10[	3
[10, 14[	6
[14, 18[	8
[18, 22[	12

Resolução

• O desvio médio, como vimos, é dado pela fórmula:

$$D_x = \frac{f_1|x_1 - \overline{x}| + f_2|x_2 - \overline{x}| + ... + f_n|x_n - \overline{x}|}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

Neste caso, temos que começar por calcular a média aritmética por:

$$\overline{x} = \frac{4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 12 \cdot 6 + 16 \cdot 8 + 20 \cdot 12}{1 + 3 + 6 + 8 + 12} = \frac{4 + 24 + 72 + 128 + 240}{30} = \frac{468}{30} = 15{,}6$$

E em seguida substituir os valores na fórmula do desvio médio.

$$D_x = \frac{1|4 - 15{,}6| + 3|8 - 15{,}6| + 6|12 - 15{,}6| + 8|16 - 15{,}6| + 12|20 - 15{,}6|}{1 + 3 + 6 + 8 + 12}$$

$$= \frac{11{,}6 + 22{,}6 + 21{,}6 + 12{,}8 + 52{,}8}{30} = \frac{121{,}6}{30} = 4{,}05$$

Variância

Chama-se **variância** ou **flutuação** e representa-se por σ^2 à média aritmética dos quadrados dos desvios em relação à média aritmética.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

Se os valores da variável apresentam frequências f_i a expressão da variância é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

Exercício resolvido

Calcule a variância da seguinte distribuição:

Variável	2	3	4	5	6	7
Frequência	2	4	7	10	8	5

Resolução

Calculemos primeiro a média aritmética

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 5}{2 + 4 + 7 + 10 + 8 + 5} = \frac{4 + 12 + 28 + 50 + 48 + 35}{36} = \frac{177}{36} = 4{,}91$$

Apliquemos agora a fórmula para o cálculo da variância:

$$\sigma^2 = \frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + ... + f_n} =$$

$$= \frac{2\,(2 - 4{,}91)^2 + 4\,(3 - 4{,}91)^2 + 7(4 - 4{,}91)^2 + 10(5 - 4{,}91)^2 + 8\,(6 - 4{,}91)^2 + 5\,(7 - 4{,}91)^2}{36} =$$

$$= \frac{2 \cdot 8{,}47 + 4 \cdot 3{,}65 + 7 \cdot 0{,}83 + 10 \cdot 0{,}0081 + 8 \cdot 1{,}19 + 5 \cdot 4{,}37}{36}$$

$$= \frac{16{,}94 + 14{,}6 + 5{,}81 + 0{,}081 + 21{,}85}{36} = \frac{59{,}28}{36} = 1{,}65$$

Desvio padrão

Chama-se **desvio padrão**, e representa-se por σ, à raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \overline{x})^2 + f_2(x_2 - \overline{x})^2 + ... + f_n(x_n - \overline{x})^2}{f_1 + f_2 + ... + f_n}}$$

Tendo como exemplo o caso anterior $\sigma = \sqrt{1{,}65} = 1{,}28$.

Como é óbvio, o desvio padrão representa a raiz quadrada positiva da variância.

14

As classificações num teste de Matemática do Everest Academie de Maputo foram as seguintes:

Frequências	N.º de alunos
6	1
8	2
9	4
11	3
15	4
16	6
18	3

a) Quantos alunos tem a turma?

b) Determine a média e indique a moda.

c) Calcule os desvios médio e padrão.

15

Considere os valores 9, 10 e 11:

a) Calcule o desvio padrão.

b) Sem efectuar os cálculos do desvio, apresente uma amostra com o mesmo número de dados, de igual média, mas cujo desvio padrão seja maior.

Exercícios resolvidos

1. As classificações finais na disciplina de Matemática dos alunos de uma turma do Liceu Polana são dadas pela seguinte tabela:

Classificação	Excelente	MBom	Bom	Suficiente	Medíocre	Mau
Número	2	5	2	13	2	1

a) Construa uma tabela de frequências absolutas, e percentagens.

b) Calcule a percentagem de aprovações e de reprovações.

c) Construa o gráfico circular da distribuição.

Resolução

a)

Classificação	Excelente	MBom	Bom	Suficiente	Medíocre	Mau	
Freq. absoluta	2	5	2	13	2	1	25
Percentagem	8%	20%	8%	52%	8%	4%	100%

b) A percentagem de aprovações é 8% + 20% + 8% + 52% = 88% e a percentagem de reprovações é 100% − 88% = 12%.

c) Vamos construir o gráfico circular da distribuição, usando as frequências relativas. Para tal, temos de calcular o ângulo correspondente a cada distribuição:

Excelente: $\frac{2}{25} \cdot 360° = 28{,}8°$

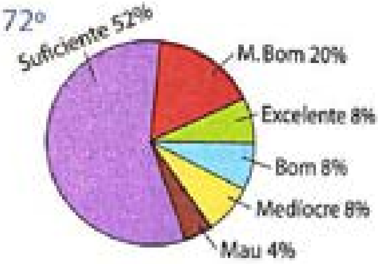
MBom: $\frac{5}{25} \cdot 360° = 72°$

Bom: 28, 8°

Suficiente: $\frac{13}{25} \cdot 360 = 187{,}2°$

Medíocre: 28, 8°

Mau: $\frac{1}{25} \cdot 360° = 14{,}4°$



2. Perguntou-se a cada um dos alunos da 10.ª classe da turma A, da Escola Secundária Josina Machel, quantas vezes viajou para o estrangeiro e com os dados recolhidos constrói-se a seguinte tabela:

Número de viagens ao estrangeiro	0	1	2	3	4
Efectivos	10	20	16	0	1

a) Qual a população em estudo?

b) Quantos alunos saíram do País no máximo uma vez?

c) Qual é o número de viagens ao estrangeiro mais frequente? Que nome dá a esse valor?

Resolução

a) Os alunos da 10.ª classe da turma A da Escola Secundária Josina Machel.

b) 20

c) 1; Moda

3. Constrói-se uma tabela de frequências com o número de tiros certeiros que os participantes de uma prova de tiro olímpico obtiveram:

Tiros certeiros	88	91	93	94	95	96	99
Participantes	1	1	2	3	4	1	1

a) Determine a média.

b) Calcule o desvio padrão.

c) Quantos participantes têm um número de tiros certeiros no intervalo $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$?

Resolução

a) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \dfrac{1\,222}{13} = 94{,}00$

b) $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{7} n_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{114\,948}{13} - (94{,}0)^2} = \sqrt{6{,}1538} = 2{,}48$

c) Calculemos os extremos do intervalo dado $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$. Temos $]94{,}0 - 2{,}48; 94{,}0 + 2{,}48[=]91{,}52; 96{,}48[$. Os tiros certeiros que estão neste intervalo são: 93, 94, 95, 96. O número de efectivos que corresponde a estes valores é: $2 + 3 + 4 + 1 = 10$.

4. As classificações num teste de Matemática de uma turma da 9.ª classe foram as seguintes:

Classificação	6	8	9	11	15	16	18
Número de alunos	2	4	8	6	8	12	6

a) Quantos alunos tem a turma?

b) Determine a média e indique a moda.

c) Calcule o desvio médio.

Resolução

a) 46

b) $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{8} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{8} n_i} = \dfrac{602}{46} = 13$

A moda é 16, pois é o valor que corresponde à maior frequência.

c) $D_{\overline{x}} = \dfrac{f_1|x_1 - \overline{x}| + ... + f_n|x_n - \overline{x}|}{f_1 + ... + f_2}$

$= \dfrac{2|6-13| + 4|8-13| + 8|9-13| + 6|11-13| + 8|15-13| + 12|16-13| + 6|18-13|}{2+4+8+6+8+12+6} =$

$= \dfrac{14 + 20 + 32 + 12 + 16 + 36 + 30}{46} = \dfrac{160}{46} = 3{,}47$

Exercícios propostos

1. A partir de cem jovens apurados para o serviço militar, constrói-se a tabela seguinte:

Altura em cm	Jovens
[160, 165[	9
[165, 170[	12
[170, 175[	27
[175, 180[	22
[180, 185[	16
[185, 190[	9
[190, 195[	5

a) Indique a população.

b) Qual a variável estatística? Classifique-a.

c) Construa uma tabela de frequências. Indique para cada uma das classes, a sua marca.

d) Construa o histograma de efectivos.

e) Indique o número de jovens que têm altura igual ou superior a 175 cm.

2. Perguntou-se a 100 pessoas como ocupam os fins-de-semana. Obtiveram-se os seguintes resultados: 35 vão ao cinema, 15 fazem desporto, 40 vão à discoteca e 10 vão ao teatro.

a) Qual a variável estatística? Classifique-a.

b) Construa uma tabela de distribuição de frequências absolutas, relativas e acumuladas.

c) Com base na alínea anterior e através de um gráfico circular, represente a distribuição dada.

3. Observe a tabela:

a) Calcule a média da distribuição.

b) Indique a moda.

c) Calcule a mediana.

x_i	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Efectivos n_i	6	12	13	2	3	2	8	1	4

4. Determine o valor de k de modo que a média dos valores 4; 5; 8; k; 2; 13 seja 7.

5. Observe o registo do peso de 55 patos:

Que percentagem de patos tem peso superior ou igual a 3,5 kg?

Peso (kg)	[2; 2,5[	[2,5; 3[	[3; 3,5[	[3,5; 4[	[4; 4,5[
f_i	5	15	24	7	4

6. As notas, em pontos, atribuídas no exame de recorrência da 10.ª classe, na disciplina de Matemática, a um conjunto de 60 alunos, foram as seguintes:

121	119	100	137	100	144
101	114	114	170	121	148
113	121	113	83	143	130
95	112	145	111	151	68
83	80	97	49	101	102
45	98	50	123	95	103
125	109	121	75	85	114
143	47	100	109	122	127
180	123	101	108	114	110
167	100	121	110	110	85

Depois de ordenar os dados, indique:

a) A nota mais alta. b) A nota mais baixa.

c) A amplitude de variação. d) A classe modal.

e) A classe mediana.

f) O número de alunos com nota não inferior a 135 pontos.

g) A percentagem de alunos entre 85 e 125 pontos, inclusive.

h) A percentagem de alunos com nota inferior a 100 pontos.

7. Dada a distribuição de frequências seguinte:

Classes	[0,3[	[3, 6[	[6, 9[	[9,12[	[12,15[
Frequências	2	7	5	8	3

Determine:

a) A marca de cada uma das classes.

b) A classe modal. c) A classe mediana.

d) A média aritmética. e) O desvio médio.

8. Se aos números 6, 7, 8, 9, 12 somarmos 6, obtém-se 12, 13, 14, 15, 18. Compare as médias aritméticas e as variâncias das duas séries estatísticas.

9. As quantidades de estabelecimentos comerciais existentes em sete ruas são as seguintes:

58; 112; 34; 96; 58; 100; 156

a) Calcule a média de estabelecimentos por rua.

b) Qual o valor mediano?

c) Indique o número de estabelecimentos mais frequentes. Que nome dá a esse valor?

10. Num inquérito efectuado a 1 000 alunos de uma escola, referente à distância do domicílio ao local de estudo, obteve-se a seguinte distribuição de frequências:

Distância	Alunos
[0, 1[	353
[1, 2[	159
[2, 3[	255
[3, 4[	147
[4, 5[	59
[5, 6[	27

Determine:

a) A amplitude total.

b) A variância.

c) O desvio padrão.

11. Na firma *Estrela do Mar* foi feito um inquérito sobre as habilitações literárias dos seus funcionários. Obteve-se a seguinte distribuição:

Hab. literárias (escalões)	Número de respostas
1	50
2	100
3	70
4	20
5	10

a) Quantos funcionários tem a firma?

b) Em que escalão se situa a maioria dos funcionários?

c) Faz sentido calcular a média desta distribuição? Porquê?

12. Para investigar o período de latência de um vírus, inocularam-se 100 cobaias e anotou-se o número de dias até aparecerem os primeiros sintomas.

Número de dias	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
Número de cobaias	8	12	25	20	35

a) Determine o período de latência média.

b) Localize a mediana da distribuição.

c) Indique a percentagem de cobaias que apresentaram sintomas antes de 8 dias de latência.

d) Calcule o número de cobaias que apresentaram sintomas depois de 12 dias de latência.

13. Para avaliar o fenómeno do absentismo na empresa *Phaphalate*, estudou-se uma amostra de 143 indivíduos de ambos os sexos e avaliou-se o número de horas não realizadas.

Número de horas em falta	Número de ind. com absentismo
0-15	30
15-30	90
30-45	11
45-60	12

a) Classifique a variável em estudo.

b) Calcule as medidas de tendência central.

c) Calcule a variância e o desvio padrão, indicando qual destas medidas é mais utilizada e porquê.

14. Os alunos da 10.ª classe de uma determinada escola obtiveram as seguintes classificações num teste de Biologia:

14	13	10	11	13	14
15	13	10	13	12	13
12	14	15	14	13	11
12	16	11	15	12	12

a) Qual a variável em estudo e como se classifica?

b) Construa a tabela de frequências relativas e o respectivo gráfico.

c) Calcule a média e o desvio padrão da distribuição.

15. Calcule a mediana da seguinte distribuição:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	10	5	1	3	5

OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Identificar e interpretar relações espaciais.
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico.

Geometria espacial

UNIDADE 10

Págs. 174 a 183

CONTEÚDOS

Conceitos primitivos
- Ponto
- Recta
- Plano

Postulados (axiomas)
- Axioma de existência
- Axioma de determinação
- Axioma de inclusão
- Axioma de intersecção

Posição relativa de rectas e planos
- Critérios de parelelismo de recta e plano
- Critério de perpendicularidade de recta e plano.

Posição relativa de planos
- Critérios de parelelismo de planos
- Critério de perpendicularidade de planos

Conceitos primitivos

Em geometria existe uma série de termos que não estão bem definidos como é o caso de ponto, recta e plano.

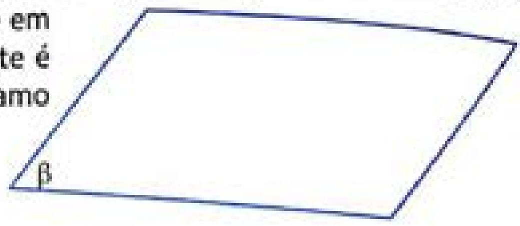
Ponto é um elemento minúsculo, só tem posição, não tem comprimento, largura, nem espessura. Não tem dimensão. Os pontos são normalmente designados por letras maiúsculas,

• A

A linha tem comprimento mas não largura e espessura. As rectas classificam-se em rectas, curvas e combinações entre rectas e curvas.

Linha recta é ilimitada, quer dizer, pode ser prolongada indefinidamente em qualquer um dos sentidos. As rectas são normalmente representadas por letras minúsculas e itálicas.

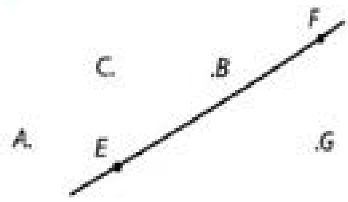
Plano convencionou-se como um conjunto de pontos sem espessura que se prolonga indefinidamente em todas as direcções. Normalmente é representado por um paralelogramo associado a uma letra grega.



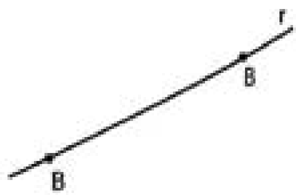
Postulados (Axiomas)

Axiomas da recta

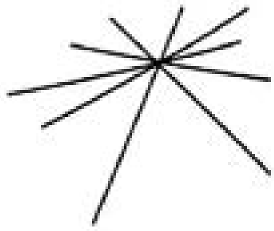
Axioma 1: Em uma recta e fora dela existem infinitos pontos.



Axioma 2: Por dois pontos distintos passa uma e só uma recta.

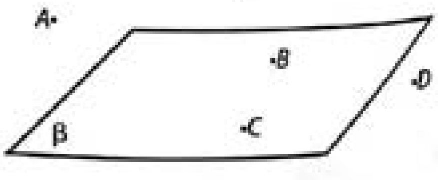


Axioma 3: Por um ponto passa uma infinidade de rectas.



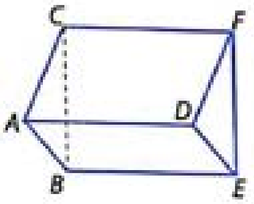
Axiomas do plano

Axioma 4: Em um plano e fora dele existem infinitos pontos.



1

Considere o prisma triangular cujas bases são triângulos equiláteros.



Complete:

a) As rectas AB, AC e BC pertencem ao mesmo plano? .

Então, podemos concluir que são ________________.

b) As rectas EF e AC pertencem ao mesmo plano? _______. Então podemos dizer que são ______.

c) As rectas AC e ED são ________ ________________

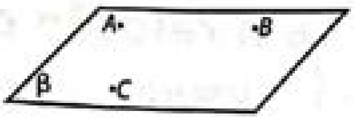
d) As rectas________ e________ são perpendiculares. _______

e) As rectas________ e________ são oblíquas.

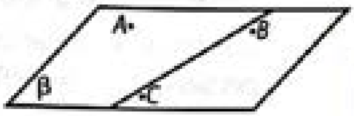
Axioma ou postulado é uma proposição sem demonstração ou justificação.
Teorema é uma proposição que carece de uma demonstração para ser aceite. A chamada geometria Euclediana assenta nos seguintes axiomas:

Definição 1: Os pontos que pertencem à mesma recta chamam-se pontos colineares.

Axioma 5: Três pontos distintos não colineares (que não pertencem à mesma recta) determinam um plano.



Axioma 6: Se dois pontos distintos de uma recta pertencerem a um plano, a recta está contida no plano.



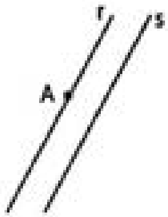
O 5.º axioma desencadeou muita polémica e só no século XIX Bolyai e Lobachewsky, trabalhando isoladamente, conseguiram «construir» uma Geometria que aceitasse todos os axiomas de Euclides excepto o 5.º. Não encontraram contradições e assim foram criadas as «Geometrias não Euclidianas».

Axiomas do espaço

Espaço (E) é o conjunto de todos os pontos .

Axioma 7: Um plano separa em dois semi-espaços cuja origem é o próprio plano.

Axioma 8 (*Postulado de Euclides*): Por um ponto fora da recta passa uma e só uma recta paralela à dada.



Definição 2: Duas rectas no espaço que pertencem ao mesmo plano chamam-se complanares.

Posição relativa de duas rectas complanares no espaço

Quanto à posição relativa de duas rectas complanares no espaço temos que:

Rectas complanares (estão contidas num mesmo plano.§)
- Paralelas
- Coincidentes
- Concorrentes
  - Perpendiculares
  - Oblíquas

Duas rectas não complanares dizem-se perpendiculares ou ortogonais quando, ao traçar uma paralela a uma delas por um ponto da outra, se obtêm duas rectas concorrentes perpendiculares. Caso tal não se verifique dizem-se oblíquas.

Posição de uma recta em relação a um plano

Uma recta em relação a um plano pode ocupar as seguintes posições:

- Aposta (a recta está contida no plano).
- Paralela (em sentido lato, quando a recta não tem qualquer ponto comum com o plano).
- Concorrente (a recta intersecta o plano num só ponto, podendo ser perpendicular ou oblíqua ao plano).

2

Observe a fotografia e indique a posição relativa de:

a) Rectas r e s.

b) Rectas s e t.

c) Rectas r e u.

d) Recta r e o plano α.

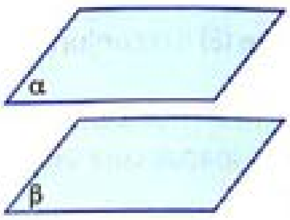
e) Recta t e o plano α.

f) Planos α e β.

Posição de dois planos

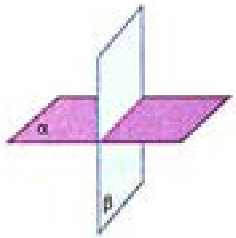
Dois planos podem ser:

- Estritamente paralelos

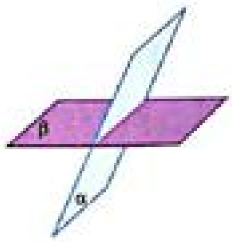


- Coincidentes

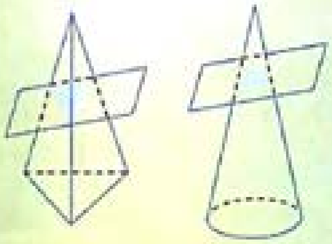
- Concorrentes ou secantes
  - Perpendiculares

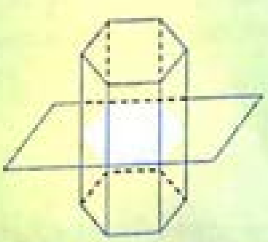


  - Oblíquos



Partindo dos sólidos já conhecidos podemos obter outros, a que chamamos troncos, seccionando os sólidos dados por planos que cortem todas as suas arestas laterais (ou geratrizes).





Exercícios resolvidos

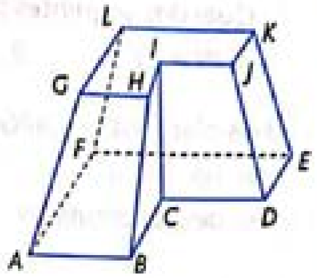
1. A figura representa o tronco de uma pirâmide quadrangular regular ao qual se retirou um dos seus cantos. Os pontos B, D, J e H são os pontos médios de quatro das suas arestas conforme a figura. Os pontos C e I são os centros dos quadrados que formavam as bases do tronco antes de ser retirado o canto.

   a) Qual a posição relativa das rectas LK e AB?

   b) Indique duas rectas não complanares.

c) Indique a recta de intersecção do plano da base com o plano JKE.

d) Qual a posição relativa dos planos AFL e CDJ?



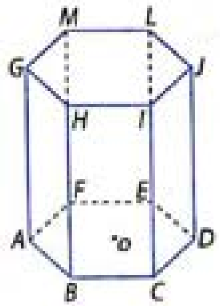
Resolução:

a) As rectas são paralelas.
b) Por exemplo, as rectas AG e DE.
c) A recta DE.
d) São perpendiculares. A recta LG é perpendicular às rectas concorrentes CI e IJ, logo qualquer plano que contenha LG, por exemplo o plano AFL, é perpendicular ao plano CDJ definido pelas duas rectas concorrentes.

2. Observe a figura ao lado.

Indique quais as afirmações que são verdadeiras:

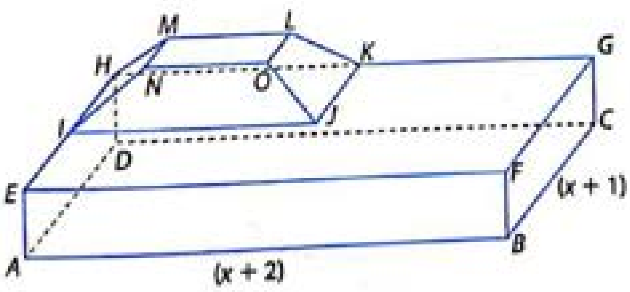
A. As rectas AB e DC são concorrentes.
B. As rectas HI e JC são paralelas.
C. As rectas AF e IJ são complanares.
D. As rectas GH e LJ são paralelas.



Resolução:

A. Verdadeira
B. Falsa, pois não são complanares.
C. Verdadeira, pois $AF // GM$, $GM // IJ$, logo $AF // IJ$; e como duas rectas paralelas definem um plano, AF e IJ são complanares.
D. Verdadeira.

3. Considere o sólido constituído por um paralelepípedo e um tronco de pirâmide representado na figura.



Relativamente a cada questão apresentada, escolha a opção correcta.

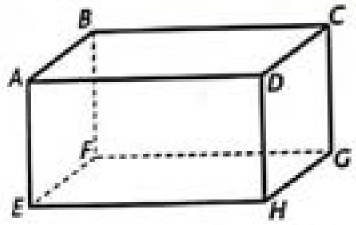
a) As rectas AB e DC são:

A. paralelas
B. perpendiculares
C. paralelas coincidentes
D. concorrentes não perpendiculares

3

A figura ao lado representa um paralelepípedo de base $[EFGH]$ em que a face $[ABFE]$ é um quadrado. Utilizando as letras da figura, indique:

a) Uma recta paralela a FG.
b) Uma recta perpendicular a EF.
c) Uma recta concorrente com BC.
d) Um plano perpendicular a ABC.

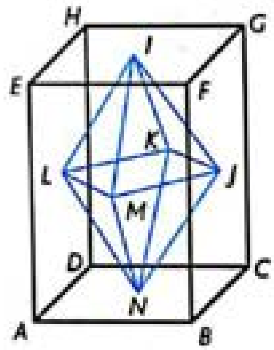


4

Observe o paralelepípedo quadrangular regular da figura abaixo e o respectivo dual.

Indique:

a) Duas rectas concorrentes.
b) Um plano paralelo à recta IJ.
c) Uma recta paralela ao plano LMN.



b) Qual dos seguintes pares de rectas são perpendiculares?

A. IN e JO B. EF e JO C. AD e BC D. AE e DC

c) Os planos ABC e ABG são:

A. paralelos B. concorrentes não perpendiculares

C. perpendiculares D. paralelos coincidentes

Resolução:

a) A. b) D. c) B.

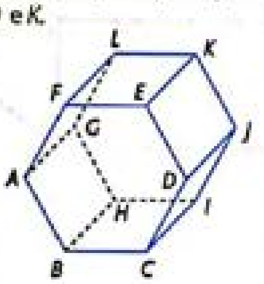
5

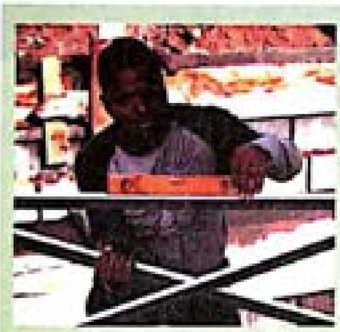
Observe o prisma hexagonal regular recto e indique:

a) A recta de intersecção do plano FCI com o plano JKL

b) Duas rectas paralelas que não contenham arestas de uma mesma face.

c) Desenhe a secção obtida no prisma pela intersecção do plano que passa pelos pontos F, D e K.





Para ter a certeza que a barra de protecção está na horizontal é preciso colocar o nível de bolha de ar de modo que a bolha fique centrada entre as duas marcas.

Estamos, assim, a aplicar o Critério de Paralelismo entre rectas e planos.

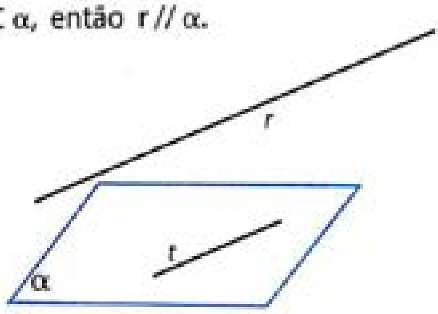
Critérios de paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos

Paralelismo

• Entre recta e plano

Se existir num plano uma recta t paralela a uma recta r dada, que não esteja contida nesse plano, a recta r e o plano são paralelos.

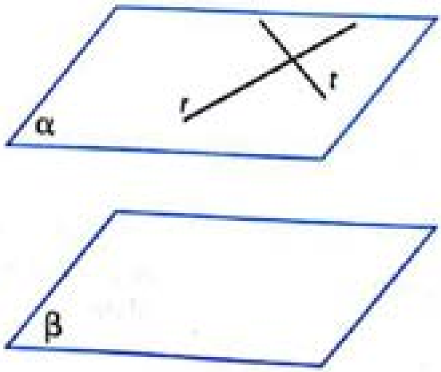
Se $r \parallel t$ e $t \subset \alpha$, então $r \parallel \alpha$.



• Entre dois planos

Se existirem num plano duas rectas r e t concorrentes, paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos.

Se r e t são rectas concorrentes do plano α e se $r \parallel \beta$ e $t \parallel \beta$, então $\alpha \parallel \beta$.



8

Dados dois pontos A e B, e um plano π, se $A \in \pi$ e $B \notin \pi$, então:

A. $AB \subset \pi$

B. $AB \not\subset \pi$

C. $[AB] \in \pi$

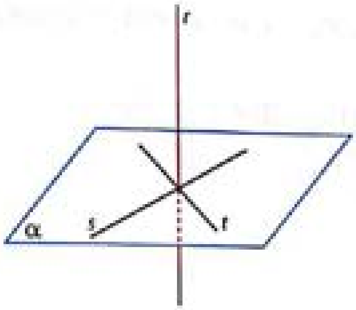
D. $AB \parallel \pi$

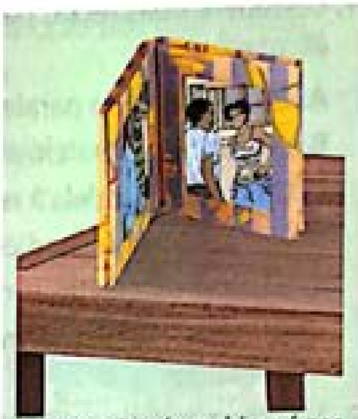
Perpendicularidade

• Entre recta e plano

Se uma recta r é perpendicular a duas rectas s e t concorrentes, existentes num plano, então r é perpendicular ao plano.

Se $r \perp s$ e $r \perp t$, em que s e t são duas rectas concorrentes do plano α, então $r \perp \alpha$.

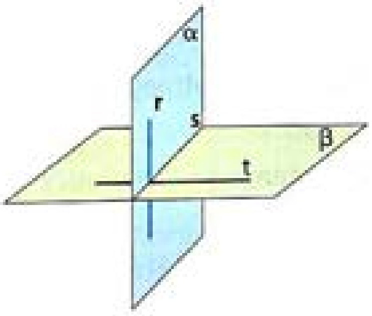




Como o eixo da moldura é perpendicular às bases dos rectângulos que a compõem, e a moldura está assente no plano da mesa, então o eixo da moldura é perpendicular ao plano da mesa.

• Entre dois planos

Se num plano existe uma recta perpendicular a outro plano, então os dois planos são perpendiculares.



Demonstremos este último critério:

Hipótese: $r \perp \beta$, $\alpha \cup \beta$, $r \subset \alpha$

Tese: $\alpha \perp \beta$

Demonstração:

Traça-se uma recta auxiliar t que pertença ao plano β e que seja perpendicular a s.

O plano definido por t e r é perpendicular a t por conter duas rectas concorrentes, perpendiculares a s.

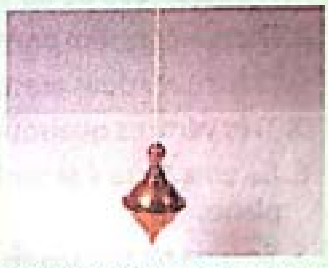
A recta r é perpendicular a t porque r é perpendicular a todas as rectas do plano β.

Logo, $\alpha \perp \beta$

Nota: A proposição de partida que se considera verdadeira é chamada hipótese.

A proposição que queremos provar é a tese.

Demonstrar o critério, é a partir da hipótese e através de uma sequência de raciocínios justificados, concluir a tese.



Para verificar se uma parede é perpendicular em relação ao chão, basta com um fio de prumo verificar que este fica encostado na parede. No plano da parede existe uma recta perpendicular ao lado do chão, logo os dois planos são perpendiculares.

6

Por um ponto P exterior a um plano α.

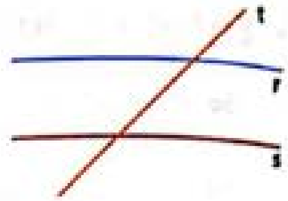
A. Passam uma infinidade de planos.

B. Passa apenas um plano.

C. Passam dois planos, um paralelo e outro perpendicular a α.

D. Não passa nenhum plano.

1. Considere duas rectas paralelas r e s intersectadas por uma recta t. Indique o valor lógico das seguintes afirmações:



A. Qualquer plano paralelo à recta t é paralelo às rectas r e s.

B. Um plano α paralelo ao plano definido pelas rectas s e t é paralelo à recta r.

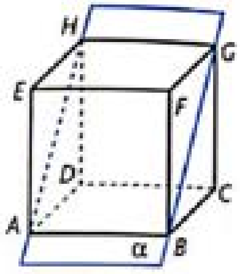
C. Uma recta paralela à recta t é complanar com a recta r.

D. Num plano perpendicular à recta r não existem rectas paralelas à recta s.

E. Não existem rectas simultaneamente perpendiculares a s e a t.

F. Se uma recta é concorrente com t no ponto de intersecção com a recta r também é concorrente com s.

2. Na figura ao lado está representado um cubo e um plano α que o intersecta.



a) Qual a posição relativa entre o plano α e o plano *ADH*?

b) Qual a posição da recta *EH* em relação ao plano α?

c) Indique a recta de intersecção do plano α com o plano *FBC*.

d) Indique uma recta perpendicular ao plano α.

e) Qual o polígono obtido pela intersecção do plano α com o cubo?

3. Indique o valor lógico das seguintes proposições e corrija as falsas.

A. A intersecção de dois planos não coincidentes é um ponto.

B. Duas rectas sem pontos comuns são paralelas.

C. Quaisquer duas arestas concorrentes num vértice de um tetraedro definem um plano.

D. Três vértices quaisquer de um cubo definem um plano.

E. Se uma recta é secante a um plano, então é concorrente com qualquer recta desse plano.

F. Se uma recta é paralela a um plano, é paralela a todas as rectas do plano.

4. Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

A. Três pontos definem sempre um plano.

B. Se *r* e *s* são duas rectas quaisquer, então r e s são paralelas.

C. Num prisma recto as arestas laterais são sempre perpendiculares ao plano da base.

D. Num paralelepípedo todos os ângulos são rectos.

E. A altura de um sólido é sempre perpendicular à base.

F. As arestas de um sólido são sempre perpendiculares à base.

G. Três pontos podem definir um triângulo.

H. Uma recta e um ponto definem sempre um plano.

5. Considere um plano α e uma recta r paralela a α. Então, podemos afirmar que:

A. Qualquer recta paralela a *r* é paralela a α.

B. Qualquer recta paralela a *α* é paralela a r.

C. Qualquer recta perpendicular a r é perpendicular a α.

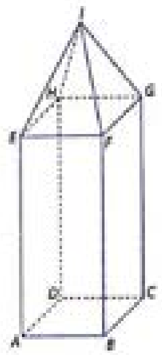
D. Qualquer plano que contenha a recta r é paralelo ao plano α.

6. Considere os dois planos perpendiculares α e β, sendo r a recta de intersecção dos dois planos. Então podemos afirmar que:
   A. Qualquer recta paralela a α é perpendicular a β.
   B. Qualquer recta, não contida em β, paralela à recta de intersecção r é paralela a β.
   C. Qualquer recta perpendicular a β é complanar com a recta r.
   D. Qualquer recta perpendicular a r é perpendicular a β.

7. No centro de uma praça encontra-se um coreto com a forma representada pela figura.

   Indique:
   a) Duas rectas paralelas.
   b) Duas rectas perpendiculares.
   c) Duas rectas oblíquas.

8. Considere o sólido representado na figura, constituído por um prisma quadrangular e uma pirâmide justaposta ao prisma.



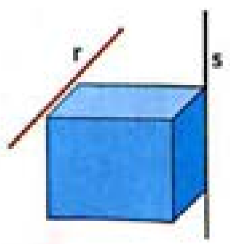
   a) O sólido é constituído por poliedros. Justifique a afirmação.
   b) Indique:
      b.1) Dois planos paralelos.
      b.2) Uma recta e um plano perpendiculares.
      b.3) Duas rectas não complanares.
      b.4) Dois planos oblíquos.
      b.5) Três rectas concorrentes.

9. Considere as afirmações:
   I. Duas rectas paralelas a uma terceira são perpendiculares entre si.
   II. Se duas rectas são paralelas, toda a recta que encontra a primeira encontra a segunda.
   III. Se dois planos são paralelos, toda a recta perpendicular ao primeiro é perpendicular ao segundo.
   IV. Se uma recta é paralela a um plano, ela é paralela a todas as rectas desse plano.

   Podemos dizer que:
   A. Todas são verdadeiras.
   B. Somente a IV. é falsa.
   C. Somente a III. é verdadeira.
   D. Somente a I. e a II. são falsas.
   E. Somente a II. e a III. são verdadeiras.

10. Qual é a afirmação correcta?
   A. Se dois planos forem perpendiculares, todo o plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.
   B. Se dois planos forem perpendiculares, toda a recta paralela a um deles será perpendicular ao outro.
   C. Duas rectas paralelas a um plano são paralelas.
   D. Se duas rectas forem perpendiculares cruzadas, toda a recta ortogonal a uma delas será paralela a outra.
   E. Se duas rectas forem perpendiculares, toda a recta paralela a uma delas será perpendicular à outra.

11. As rectas r e s foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como representado na figura:



   Sobre a situação colocada, assinale a afirmação incorrecta.
   A. r e s são rectas paralelas.
   B. r e s são rectas reversas.
   C. r e s são rectas ortogonais.
   D. Não existem planos contendo r e s.

Teoria de conjuntos

George Cantor
1845-1918

A teoria avançada dos conjuntos foi desenvolvida por volta do ano 1872 pelo matemático alemão George Cantor e aperfeiçoada no início do século XX por outros matemáticos, entre eles, os alemães Ernst Zermelo (1871-1956), Adolf Fraenkel (1891-1965), o austríaco Kurt Gödel (1906-1978), o húngaro Janos von Newman (1903-1957), entre outros.

Considera-se Cantor como um dos fundadores da moderna Teoria dos Conjuntos e um dos célebres matemáticos e lógicos do século passado.

Deve-se a Cantor a análise do conceito de infinito, que de resto fora iniciada no princípio do século por Bernard Bolzano, em *Paradoxos do Infinito*. Em 1877, Cantor provou que existiam vários tipos de conjuntos infinitos, introduzindo a noção de potência de conjuntos.

Em meados do século XX, a Teoria dos Conjuntos exerceu grande influência sobre o ensino da matemática.

Apesar de não se poder definir o conjunto, entenderemos que ele seja um ente primitivo, isto é, uma colecção ou uma lista bem definida de objectos, símbolos, etc.

Qualquer agrupamento pode ser chamado de conjunto. Assim, pois, dentro de um conjunto estão constituídos os elementos.

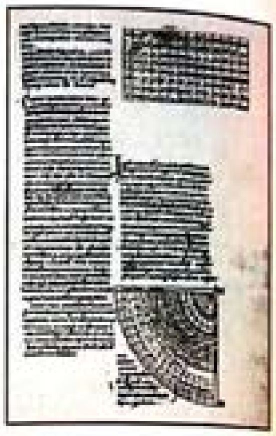
Uma das formas de simbolizar o conjunto e os seus elementos é representar o conjunto por uma letra maiúscula e seus elementos separados por vírgula e entre chavetas.

A representação em extensão pode ser usada para conjuntos finitos ou infinitos, mesmo que o número de elementos seja muito grande.

Também podemos representar um conjunto por meio de uma figura chamada Diagrama de Venn (John Venn, lógico inglês. Fazemos notar, ainda, que contrariamente ao que se considera normalmente nesta teoria, admite-se a existência de conjuntos com um só elemento (Conjunto Singular) e conjuntos sem elementos (Conjunto Vazio). Notamos, ainda, que um conjunto pode ter um número finito ou infinito de elementos.

John Venn
1834-1923

Equações quadráticas



Manuscrito latino de Al-Khwarizmi

O árabe Al-Khwarizmi (788-850), num livro sobre simplificação de equações com o título *Hisab al-jabr Wal-mugabala* («ciência da redução e da confrontação»), utiliza pela primeira vez a palavra *al-jabr*, donde derivou o termo «algébra», enquanto que o termo algoritmo deriva duma latinização do nome do próprio autor.

Al-Khwarizmi apresenta um método de resolução de equações do tipo:

$ax^2 = c$	$bx = c$
$ax^2 = bx$	$ax^2 + bx = c$
$ax^2 + c = bx$	$bx + c = ax^2$

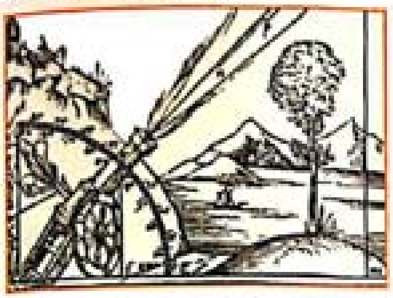
Os persas seguiram o seu exemplo e, entre outros, Al-Mahani, Al-Khazin e Omar Khayyam, dedicaram-se ao estudo da resolução de equações.

Função quadrática

Galileu estudou o movimento dos objectos, em particular o lançamento de projécteis como setas e balas de canhão.

Galileu acreditou que uma corrente presa nos dois extremos e pendendo livremente seria uma parábola. No entanto, hoje está provado que se trata de uma catenária.

Das conclusões dos seus estudos, salienta-se a demonstração de que a trajectória de um projéctil é uma curva chamada parábola, e não duas linhas rectas como Aristóteles pensava, pois acreditava que um objecto só podia realizar um movimento de cada vez.



A trajectória de Aristóteles (Gravura de 1561)

De acordo com Aristóteles, a trajectória de qualquer projéctil é formada por duas linhas rectas.

Quanto às propriedades da parábola, é curioso saber que se aplicam na construção de edifícios, como aconteceu no Capitólio dos E.U.A. projectado em 1792 por William Thornton.

A Câmara dos Representantes costumava reunir-se neste local até 1857 e conta-se que um membro desta Câmara, John Adams, verificou que, ao colocar-se em certos pontos, conseguia ouvir distintamente as conversas entre os outros membros desde que estivessem no ponto oposto da sala. As pessoas situadas no meio da sala não conseguiam escutar.

Este fenómeno baseia-se no facto de o som, ao incidir no tecto (reflector parabólico), ser devolvido paralelamente ao eixo para o outro reflector, indo depois convergir no ponto focal. John Adams colocou a sua secretária nesse ponto.

In Theoni Pappas, Fascínios da Matemática, Ed. Replicação

As utilizações tecnológicas são inúmeras. O funcionamento dos fornos solares, os faróis dos automóveis, as antenas parabólicas, os radiotelescópios, etc.

Farol de automóvel

Logaritmos

Desde o tempo dos babilónios que se tentava simplificar os cálculos, tendo como princípio básico que era mais fácil adicionar números do que multiplicá-los. Foi com esta civilização que surgiram as primeiras tabelas semelhantes às actuais tabelas de logaritmos.

Várias tentativas foram sendo feitas até que, no século XVII, John Napier (ou Neper, como é geralmente conhecido), nascido em 1550, proprietário escocês, Barão de Merchiston, administrador das suas propriedades e simultaneamente homem dedicado à Matemática, descobriu um método que permitia facilitar os cálculos.

Pormenor de uma tabela de logaritmos de Napier.

Publicou, em 1614, a obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (*Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos*).

Neste trabalho, Napier apresentou a definição de logaritmo e tabelas compiladas por multiplicações repetidas equivalentes a potências de 0,9999999.

Henry Briggs ao tomar conhecimento da obra de Napier, entusiasmou-se pelo tema e propôs-lhe um encontro para analisarem e discutirem em conjunto o assunto. No Verão de 1615, Briggs acabou por sugerir a Napier a base 10 como base do cálculo de logaritmos. Tal sugestão foi aceite, mas Napier já não teve tempo suficiente para alargar como queria o seu trabalho, pois em 1617 morreu.

Henry Briggs
1561-1630

Geometria

Euclides
330-260 a.C.

A primeira demonstração escrita de que apenas existem cinco poliedros regulares surge em *Elementos*, 13.º livro, de Euclides.

Pela originalidade e importância histórica, passamos a transcrever o texto de Euclides, mas antes é de notar que este:

- Chamava figuras também aos sólidos no espaço.
- Em vez de polígonos regulares, considerava polígonos equiláteros e equiângulos.
- Chamava ângulo sólido à figura formada por um vértice e pelas faces que nele se encontram.

«... Digo de seguida que mais nenhuma figura, para além das referidas cinco, pode ser construída por polígonos equiláteros e equiângulos iguais uns aos outros.

Pois um ângulo sólido não pode ser construído com dois triângulos, ou mesmo dois ângulos planos. Com três triângulos constrói-se o ângulo da pirâmide, com quatro o ângulo do octaedro e com cinco o ângulo do icosaedro; mas um ângulo sólido não pode ser formado por seis triângulos equiláteros e equiângulos colocados num mesmo ponto, pois, como o ângulo do triângulo equilátero é dois terços de um ângulo recto, os seis serão iguais a quatro ângulos rectos:

O que é impossível, pois qualquer ângulo sólido é formado por menos do que quatro ângulos rectos.

Pela mesma razão, também um ângulo sólido não pode ser construído por mais que seis ângulos planos.

Com três quadrados forma-se o ângulo do cubo, mas com quatro é impossível formar um ângulo sólido pois haveria outra vez quatro ângulos rectos.

Com três pentágonos equiláteros e equiângulos forma-se o ângulo do dodecaedro; mas, com quatro, é impossível formar qualquer ângulo sólido, pois o ângulo do pentágono equilátero sendo um ângulo recto e um quinto, os quatro ângulos serão maiores que quatro ângulos rectos: o que é impossível.

Da mesma forma, qualquer outro ângulo sólido não pode ser formado por outras figuras poligonais pelas mesmas razões de absurdo.»

in Elementos, Livro XIII

Unidade 1: Teoria de conjuntos pp. 6 a 21

Exercícios de consolidação

1. a) $A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$ b) $B = \{a, e, i, o, u\}$
c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$
d) $D = \{2\}$ e) $E = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
f) $F = \{-1, 1\}$ g) $G = \{8, 9, 10, \ldots\}$

2. a) $a \in A$ b) $A \subset B$ c) $A \supset B$
d) $A \not\subset B$ e) $a \notin B$ f) $A \not\supset B$

3. a) F b) F c) V d) V e) F

4. B. e D. 5. 16

6. a) $\left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$ b) $]-1, 3[$
c) $]1, 5]$ d) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

7. a) $\{1, 3, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

8. a) $\left]-\infty, \frac{7}{5}\right[$ b) $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$
c) $]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$ d) $[-2, 2]$

Exercícios propostos pp. 18 a 21

1. a) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ b) $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}_0^+$
d) $\mathbb{I}$ e) $\mathbb{Q}$ f) $\mathbb{Q}$ g) $\mathbb{Q}$

2. a) $]-2, 0]$ b) $[2, 5[$ c) $\emptyset$
d) $[3, 5]$ e) $]-2, 5]$

3. a) $\emptyset$ b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
c) $\{8, 10\}$ d) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
e) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

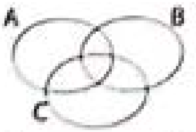
4. a) $A \cup B = [-4, +\infty[$

b) $A \cap \bar{B} = [-4, 6[$

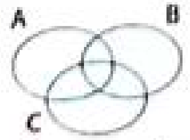
c) $A \setminus \bar{B} =]-\infty, -4[$

5. A. 6. B. 7. C. 8. D. 9. E.
10. E. 11. A. 12. D. 13. A. 14. A.
15. D. 16. C. 17. B. 18. C. 19. C.
20. B. 21. C. 22. A. 23. B. 24. E. 25. C.

26. a)

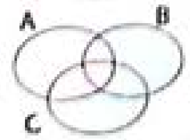


b)



c)

d)



27. a) $\bar{A} \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cup C$
c) $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ d) $B \cap (C \setminus A)$

28. 3 alunos

Unidade 2: Equações quadráticas paramétricas simples pp. 22 a 29

Exercícios de consolidação

1. a) $S = \{1, 2\}$
b) $S = \{-2, 3\}$
c) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$
d) $S = \left\{-\frac{1}{5}, 2\right\}$

2. a) $S = m > -\frac{7}{2}$ b) $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$
c) $S = m \geq -\frac{7}{2}$ d) $S = \{-3, 1\}$
e) $S = \{1\}$ f) $S = \{-3\}$ g) $S = \emptyset$

3. a) $S = m < 1$ b) $S = \{25, 9\}$

Exercícios propostos p. 29

1. $S = \{-3, 1\}$ 2. D. 3. B. 4. C. 5. B.
6. C. 7. A. 8. C. 9. C. 10. D. 11. C.

Unidade 3: Equações biquadradas pp. 30 a 37

Exercícios de consolidação

1. a) $S = \{-2, 2\}$ b) $S = \{-3, 3\}$
c) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ d) $S = \{-2, 2\}$
e) $S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ f) $S = \emptyset$
g) $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ h) $S = \{-3, 3\}$
i) $S = \emptyset$

2. $(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)$

3. a) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ b) $x^4 - 16x^2 = 0$

Exercícios propostos p. 37

1. a) $S = \{-2, 2\}$ b) $S = \{-1, 0, 1\}$
c) $S = \{-5, 5\}$ d) $S = \{-3, 0, 3\}$
e) $S = \{-2, 2\}$ f) $S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$
g) $S = \emptyset$ h) $S = \{-3, 3\}$
i) $S = \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ j) $S = \{-2, 2\}$
k) $S = \{-2, 2\}$ l) $S = \left\{-1, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1\right\}$
m) $S = \{-1, 1\}$ n) $S = \left\{-\frac{1}{a}, -a, \frac{1}{a}, a\right\}$
o) $S = \{-b, -a, a, b\}$ p) $S = \left\{-\frac{b}{c}, \frac{b}{c}\right\}$

2. a) $x^4 - 25x^2 = 0$
b) $x^4 - (11 + 2\sqrt{3})x^2 + 4 + 2\sqrt{3} = 0$

3. $(x-3)(x+5)$ 4. $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Unidade 4: Função quadrática pp. 38 a 51

Exercícios de consolidação

1. a) $1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $V(1, -4)$ c) $x = 1$

2. a) $g(x) = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -\frac{1}{4}$, logo $g(-1) = 2$ ou $g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$

b) $V\left(-\frac{5}{8}, \frac{23}{16}\right)$ **c)** $x = -\frac{5}{8}$

3. a) 4 s **b)** 6 m; 2 s

c) $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 6$ **d)** 1 s ou 3 s

4. Crescente: $[0, +\infty[$

Decrescente: $]-\infty, 0]$

5. $m \in]-\infty, 0]$

6. a) $V(0, 2)$; $D' =]-\infty, 2]$ **b)** $V(0, -5)$; $D' = [-5, +\infty[$

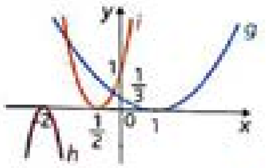
c) $V(0, 1)$; $D' = [1, +\infty[$ **d)** $V(0, -3)$; $D' =]-\infty, -3]$

e) $V(0, 45)$; $D' =]45, +\infty[$ **f)** $V(0, -30)$; $D' =]-\infty, -30]$

g) $V\left(0, -\frac{7}{34}\right)$; $D' = \left]-\infty, -\frac{7}{34}\right]$

7. a) h **b)** f **c)** g

8.



a) $V(1, 0)$; $x = 1$ **b)** $V(-2, 0)$; $x = -2$

c) $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $x = -\frac{1}{2}$ **d)** $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; $x = -\frac{1}{2}$

e) $V\left(\frac{5}{3}, 0\right)$; $x = \frac{5}{3}$

9. a) $V(-1, -1)$; $D' =]-\infty, -1]$; Eixo de simetria: $x = -1$

b) $V(3, 3)$; $D' = [3, +\infty[$; Eixo de simetria: $x = 3$

c) $V\left(\frac{1}{2}, -2\right)$; $D' = [-2, +\infty[$; Eixo de simetria: $x = \frac{1}{2}$

10. a) $]0, 6[$ **b)** $\left]-\frac{7}{2}, 1\right[$

11. a) $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{9}{4}\right[$

b) Negativa: $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$ Positiva: $]1, 2[$

c) O gráfico da função sofre um deslocamento vertical. Se $m < 0$, desce,

se $m > 0$, sobe em relação a $y = -x^2 + 3x$ o número de unidades indicada por $|m|$.

Exercícios propostos pp. 50 e 51

1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** C.

6. a) O gráfico da função desloca-se 1 unidade para a esquerda seguido de um deslocamento de 2 unidades para baixo.

b) O gráfico da função desloca-se 4 unidades para a direita seguido de um deslocamento de 5 unidades para cima.

7. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = \frac{1}{3}(x-3)^2$ $h(x) = -3x^2 - 1$

8. a) $4 \pm \sqrt{15}$

b) $]-\infty, 4-\sqrt{15}[\cup]4+\sqrt{15}, +\infty[$

c) $f(x) = (x-4)^2 - 15$

d) $D' = [-15, +\infty[$; Eixo de simetria: $x = 4$

9. $A(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x$ $V\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$

A área do espelho é $0{,}5625\ m^2$.

10. Área máxima $\approx 500{,}447\ m^2$.

Dimensões: 19,42 m por 25,77 m

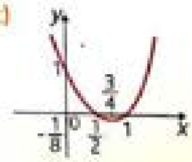
11. a) $f(x) = -4(x-1)^2 + 4$, $x \in [0, 2]$

b.1) $f(x) = -8(x-1)^2 + 8$, $x \in [0, 2]$

b.2) $f(x) = -\frac{4}{9}(x-3)^2 + 4$, $x \in [0, 6]$

12. a) Zeros: $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

b) $D'_f = \left[-\frac{1}{8}, +\infty\right[$ **c)**



13. a) C.S. $= \{2, 8\}$

Unidade 5: Inequações quadráticas pp. 52 a 63
Exercícios de consolidação

1. a) $]-\infty, 5]$ **b)** $]-\infty, -3]$ **c)** $\left[-\frac{3}{5}, +\infty\right[$

d) $\left]\frac{8}{9}, +\infty\right[$ **e)** $]-\infty, 9]$ **f)** $]-2, +\infty[$

g) $]5, +\infty[$ **h)** $]-6, +\infty[$ **i)** $\left[\frac{39}{10}, +\infty\right[$

j) $\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$

2. a) $\left]-\frac{16}{17}, +\infty\right[$ **b)** $\{1\}$

3. $\{-1\}$

4. a) $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$ **b)** $]-4, -1[$

c) $\varnothing$ **d)** $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

e) $]-\infty, 1-\sqrt{8}[\cup]1+\sqrt{8}, +\infty[$

5. a) $]-\infty, -3[$ **b)** $]-3, 2[$

6. a) $[0, 2]$ **b)** $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

c) $]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$ **d)** $[-3, 10]$

8. b) $]0, 8[$

9. a) $t \approx 2{,}48$ s **b)** 11 m **c)** $t \approx 3{,}48$ s

Exercícios propostos pp. 62 e 63

1. a) $x \in]0, 4[$ b) $x \in [2, 6]$

c) $x \in \left[-\infty, -\frac{2}{5}\right] \cup [1, +\infty]$ d) $x \in [-2, 1]$

e) $x \in]-4, -3[$ f) $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

g) $x \in]-4, -1[\cup]3, 4[$

2. a) $[-1, 2]$ b) $x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]$

3. $4\,500 < x < 9\,500$

4. $x \in]-3, 1[$ **5.** $\varnothing$ **6.** C.

7. a) $\left]0, \frac{3}{2}\right[$ b) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$

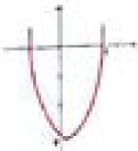
8. a) $R = 48{,}4\ \Omega$ b) $U \in]212, 240[$ V

9. a) 155 m b) 3 s; 20 m

c) Sim, a partir dos 7,3 s.

10. a) $\frac{3}{2}$, -1 b) $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

c) $(0, -3)$ d)



e) $x \in]-\infty, -1[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

11. a) 60 m b) $t = 5$ s c) $h = 80$ m

12. a) 40 unidades b) C = 1 400 MT

Unidade 6: Função exponencial pp. 64 a 81
Exercícios de consolidação

1. a) N.º de habitantes em 2000/01/01
b) N.º de habitantes em 2050/01/01
c) N.º de habitantes em 1990/01/01
d) Em 1 de Janeiro de 2100 a população duplica em relação à existente em 1 de Janeiro de 2000.

2. a) Três dias depois de surgir na televisão o anúncio já foi visto por 12×10^4 pessoas.
b) O número de pessoas que já viu o anúncio atinge e ultrapassa 10^5 exactamente ao segundo dia de exibição.
c) O número de pessoas que já viu o anúncio aumenta 20% em cada dia.

3. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^1$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ c) 2^3

4. a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$ c) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

5. a) $3^{-\frac{1}{2}}$ b) $4^{\frac{2}{3}}$ c) $a^{-\frac{1}{5}}$

6. C.

7. a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 10

8. a) 2 b) 4 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{3}{2}$

9. a) 4×5^x b) 3×2^{-x}

c) $\frac{33}{4} \times 2^{3x} = 33 \times 2^{3x-2}$ d) $2^x(2^x + 2)$

10.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2^x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32

12. a) 3 b) 3

15. a) $x = 1$ b) Não há c) $x = 0$ d) $x = 0$

16. a) $x = 1$ b. 1) -1; b. 2) 2

17. 1 528 toneladas.

18. ≈ 2541, $n(t) = 2000 \times 1{,}005^t$, t em horas.

19. ≈ 609 m²; $A(t) = 500 \times 1{,}02^t$

20. 1 160 MT e 54 cêntimos. O montante do juro é 160 MT e 54 cêntimos.

21. 3,9%

22. 6 6911,30 MT

23. C = 1 865,54 MT

24. P = 2 114,81 MT

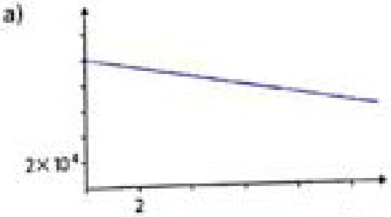
25. P ≃ 177 milhões

Exercícios propostos pp. 80 e 81

1. C. **2.** A. **3.** B. **4.** B.

5. f é monótona crescente se $a > 1$ e $k > 0$ ou se $0 < a < 1$ e $k < 0$.
f é monótona decrescente se $a > 1$ e $k < 0$ ou se $0 < a < 1$ e $k > 0$.

6. a)



b) Durante aproximadamente 10 meses; até ao início de Novembro

c) Aproximadamente, 5 meses e 18 dias.

7. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^1$

c) 4^2 d) $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$ e) $(-1)^5$

8. a) $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$ b) $\sqrt{2^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt{2}$

d) $3^{\frac{1}{2}}$ e) $a^{\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

9. a) $2^{\frac{3}{2}}$ b) $5^{-\frac{1}{3}}$ c) $6^{-\frac{1}{3}}$

10. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{36}$

11. a) $\frac{1}{49}$ b) $\frac{1}{28}$ c) $7\sqrt{7}$

12. Por exemplo:
a) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$
b) $f(x) = -2 \cdot 2^{-3x}$
c) $f(x) = 2^{3x}$
d) $f(x) = 8 \times 2^{2x}$

13. b) $10^6\,(1{,}02)^{33} \approx 1\,922\,231$

14. a) No início de 2000 havia
$830 \cdot (1{,}06)^{50} \approx 15\,289$ habitantes.
Se considerarmos que o início do século foi em 2001, a resposta é $830 \cdot (1{,}06)^{51}$.
b) 12 anos.
c) $p(x) = 830 \cdot (1{,}06)^{x-1950}$

15. $k = \frac{1}{6}$ N = 16 200 bactérias

Unidade 7: Logaritmo e função logarítmica pp. 82 a 105
Exercícios de consolidação

1. a) $x = \log_5 7$ b) $t = \log_{\sqrt{2}} 20$
c) $4 = 3^x$ d) $2 = a^y$
e) $x = 2^5$

2. a) -1 b) $\sqrt{12} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
c) 15 d) $\sqrt{3}$
e) $\sqrt{7}$ f) π^3

3. a) $2^{\log_2 7}$ b) $\log_{10} 10^7$
c) 7^1 d) $10^{\log_{10} 7}$
e) $49^{\frac{1}{2}}$ f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^7$

4. a) 3 b) 5
c) 0 d) $\frac{5}{2}$
e) $-\frac{1}{2}$ f) -2
g) $\frac{1}{6}$ h) $\frac{7}{6}$

5. a) -3 b) 8
c) $\frac{1}{2}$ d) $2\sqrt{3}$

6. a) 0,544 b) 1,301 c) $-0{,}222$

7. a) 1 b) 8 c) 3

8. a) $\log_{10} \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{2}$
b) $\log_4 (16) = \log_4 4^2 = 2$

9. a) $\log 27$ b) $\log_2 \frac{5^3}{25^{0,5}} = \log_2 25$
c) $\log_2 x$ d) $\log_2 6$ e) $\log \frac{\sqrt{x}}{100}$

10. a) $D = \left]-\frac{2}{5}, +\infty\right[$ b) $D =]-\infty, 0[\, \cup\,]10, +\infty[$
c) $D =]-4, +\infty[\, \setminus \{-3\}$ d) $D =]0, 2[\, \cup\,]4, +\infty[$

11. a) 10 b) 7 c) 10

12. a) 2 b) 8 c) 2

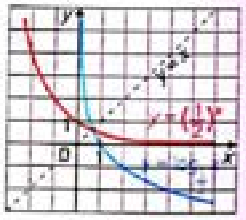
13. a) 6 b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{13}{6}$
d) 23

14. a) 2,429 b) 0,746 c) $-0{,}109$
d) 5,262 e) $-0{,}737$ f) $-0{,}315$

15. a) $2x + 6$ b) $2\log_2 x = \log_2 x^2$ ou $2\log_4 x^2 = \log_4 x^4$
c) 4 d) 0

16. a) $\sqrt{3}$ b) 2

17. Função logarítmica de base $a \in]0, 1[$.
$D = \mathbb{R}^+$; $D' = \mathbb{R}$;
tem um único zero em $x = 1$; é decrescente, o gráfico tem a concavidade virada para cima.



18. a) $a = -1$

20. a) $]-\infty, 1[$ b) $]-\infty, -5[\, \cup\,]-1, +\infty[$ c) $]-\infty, 3[\, \setminus \{2\}$

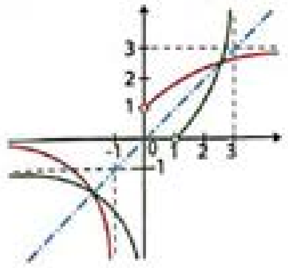
21. a) -1 b) 0 e 5 c) Não tem zeros.

22. a) $\log x + 3 = \log x + \log 10^3 = \log (x \cdot 10^3)$
b) $M(100) = 5$ c) $x = 10^{M-3}$
d) 1 metro = 1000 mm
e) 10A pois $x(M+1) = 10^{M+1-3} =$
$= 10^{M-3} \cdot 10 = x(M) \cdot 10 = A \cdot 10$

23. $N(50I) - N(I) = 10 \log 50 \approx 17$ decibéis

24. a) ≈ 31 milhares de anos
b) $t = 5\,500 \log_2 \frac{10^{-6}}{M}$ com M em gramas e t em anos; t representa a idade em anos de um fóssil em função da massa M de carbono-14 por grama de carbono.

26.



$D_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]1, 3[$

$D'_{f^{-1}} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

Exercícios propostos pp. 102 a 105

1. D. 2. B. 3. B.

4. A. Falso; $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

B. Falso; se a e b forem ambos números negativos, $\log(a \times b)$ também representa um número real, porque o produto de dois números negativos é positivo.

C. Verdadeiro, numa base maior que 1, os números entre 0 e 1 têm logaritmo negativo.

5. a) 90

b) Como a função é crescente, a partir de $P = 10^{-7}$

c) $I(P) = 2\,I(P_1) \Leftrightarrow 170 + 10 \log P =$

$= 340 + 20 \log P_1 \Leftrightarrow 10 \log \frac{P}{P_1^2} = 170 \Leftrightarrow \frac{P}{P_1^2} = 10^{17}$.

d) $x = 1\,000$

6. A.

7. a) $N(0) = 8$ b) $N(t) = 32 \Leftrightarrow t = 40$

c) $t = 20 \log_2 \frac{32}{40-N}$

exprime o número de dias de experiência (t) em função do número de peças produzido por hora (N).

8. a) $8 = 2 \log_2 \frac{A-2}{2} \Leftrightarrow A = 34$

b) $A = 9T \Rightarrow h = 2 \log_2 \frac{8T}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 2 \log_2 (4T) = 2(\log_2 4 + \log_2 T)$

$= 2(2 + \log_2 T) = 4 + 2 \log_2 T = 4 + \log_2 T^2$

9. a) $A(0) = 0 \wedge A(6) = 2 \Leftrightarrow a = 3 \wedge b = 2$

b) $r = 1{,}1 \Leftrightarrow A = 1{,}21\,\pi$

$3 - \log_2\left(\frac{16}{2+t}\right) = 1{,}21\pi \Leftrightarrow t \approx 26$ segundos

10. a) $\sqrt{5}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\sqrt{7}$

d) $-\frac{9}{2}$ e) $\sqrt{2} - 3$ f) 4

11. a) $1 + x$ b) $x - 0{,}5$ c) $3x$

d) $\frac{x+3}{2}$ e) $-2x$ f) $2x - 3$

12. a) 20 decibéis b) 10^5 W/m^2 c) $\approx 68\%$

13. a) $M \approx \frac{2}{3} \log E - \frac{2}{3} \log (2{,}5 \times 10^4)$

$M \approx 0{,}67 \log E - 2{,}93$

b) $E \approx 2{,}5 \times 10^{1{,}5M + 4}$

ou $E = 10^{\frac{M + 2{,}93}{0{,}67}}$

c) Usando a primeira equação da alínea b):

$E(4) = 2{,}5 \times 10^{10}$ J

$E(5{,}6) = 2{,}5 \times 10^{12{,}4}$ J

$\frac{E(5{,}6)}{E(4)} = 10^{2{,}4} \approx 251$

d) $M_1 - M = \frac{2}{3} \log \frac{2E}{2{,}5 \times 10^4} -$

$- \frac{2}{3} \log \frac{E}{2{,}5 \times 10^4} = \frac{2}{3} \log 2 \approx 0{,}2$

14. Deve ter em atenção que o crescimento da função logarítmica é muito lento quando $x \to \infty$.

a) 2 b) 0 c) 2 d) 2

15. a) $y = 6 \cdot x^{0{,}9}$ $x = \left(\frac{y}{6}\right)^{\frac{10}{9}}$ b) $\frac{y_1}{y} = 10^{0{,}9} \approx 7{,}9$

Um animal de peso 10 vezes superior a outro gasta 7,9 vezes mais microlitros de oxigénio por hora.

16. a) Tende para zero.

b) $Q = 10 - \log_{12} P^{10}$ $D =]0, 12]$

17. a) A → altura 3 m; demora 14 horas a despejar

B → altura 3,5 m; demora 7 horas e 56,25 minutos a despejar

b) $\approx$ 6 h 38 m depois do início do despejo; altura da água $\approx$ 2,23 m

18. C. 19. B.

20. C. 21. D.

22. A. 23. A.

24. C. 25. D.

Unidade 8: Trigonometria pp. 106 a 151

Exercícios de consolidação

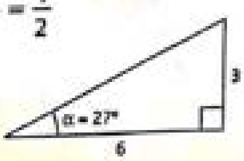
1. a) $\approx 2{,}8$ cm b) $\approx 5{,}9$ cm c) $\approx 2{,}2$ cm
2. São: [*MAR*] e [*LUA*].
3. a) 67,8 m b) 3 559,5 m^2
4. 65 m
5. a) $r = \dfrac{3}{4}$ b) $y = 9$ cm
6. $x = 8$ cm; $y = 5$ cm
7. Sim, porque têm dois ângulos iguais.
8. a) Porque têm dois ângulos iguais:
   $B\hat{A}E = C\hat{B}D$; $A\hat{B}E = B\hat{C}D$ são ângulos agudos de lados paralelos.
   b) $\overline{BE} = 4$ cm
9. a) São: $\dfrac{27}{3} = \dfrac{18}{2} = \dfrac{36}{4} = 9$; $r = 9$
   b) Não: $\dfrac{10}{5} \neq \dfrac{7}{4} \neq \dfrac{8}{4{,}5}$
10. a) $x = 7{,}5$ cm b) $x = 20$ cm
11. a) 4 b) 16
12. a) 8 b) 8

Exercícios propostos p. 112

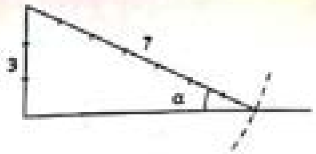
1. 2 m
2. 30 m
3. P = 28,8 cm; A = 40,32 cm^2
4. P = 31,5 m
5. C.
6. C.

Exercícios de consolidação

13. a) $L\hat{A}U$ b) $L\hat{A}U$ c) $U\hat{L}A$ d) $A\hat{L}U$
14. a) 0,385; 0,923; 0,417; 2,498 b) 0,56; 0,80; 0,7; 1,428
15. a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{12}{13}$ $\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$ $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{12}{5}$
    b) $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{5}{13}$ $\cos \beta = \dfrac{12}{13}$ $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{5}{12}$
16. a) 3 cm
    b) $\operatorname{sen} \hat{B} = 0{,}6$ $\cos \hat{B} = 0{,}8$ $\operatorname{tg} \hat{B} = 0{,}75$
    $\operatorname{sen} \hat{C} = 0{,}8$ $\cos \hat{C} = 0{,}6$ $\operatorname{tg} \hat{C} = 1{,}3$
17. a) $\operatorname{sen} 32° \approx 0{,}53$; $\cos 32° \approx 0{,}85$; $\operatorname{tg} 32° \approx 0{,}63$;
    b) $90° - 32° = 58°$
    $\operatorname{sen} 58° \approx 0{,}85 \approx \cos 32°$
18. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

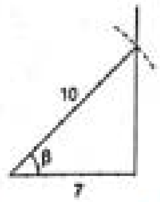


19. a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{7}$



$\alpha \approx 25°$

b) $\cos \beta = \dfrac{7}{10}$



$\beta \approx 46°$

20. a) 0,906 b) 0,017 c) 0,194 d) 1,036
21. a) $\approx 71°$ b) $\approx 73°$ c) $\approx 85°$ d) $\approx 27°$
22. a) 0,875 b) 0,974 c) 4,011 d) 64,3° e) 83,5°
23. A. V B. V C. V D. F E. F F. V
24. a) 4,98 cm b) 4,73 cm c) 14,62
25. a) 3,31 cm b) 3,51 cm c) 9,54 cm
26. a) 3,99 cm b) 13,16 cm c) 10,29 cm
27. a) 3,91 cm b) 2,16 cm c) 1,45 cm
28. a) 58° b) 51,8° c) 54,9°
29. a) $\operatorname{sen} \beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{29}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$
30. a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $1 + 3\sqrt{3}$
31. É falsa porque $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \neq 1$.
32. $\cos 30° = \dfrac{b}{c}$ e $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{b}{c}$; $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{a}{c}$ e $\cos 60° = \dfrac{a}{c}$
33. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
34. $\overline{AB} \approx 16{,}3$ km
35. $\overline{RT} = 40\sqrt{3} \approx 69{,}28$ m
    $\overline{ST} = 40\sqrt{3} - 40 \approx 29{,}28$ m
36. $c \approx 40{,}72$ m e $h \approx 38{,}27$ m
37. Não, gastou cerca de 18 m.
38. a) 2,43 m b) 4,19 m c) 24,16 m
39. $h \approx 16{,}5$ m

Exercícios propostos pp. 124 e 125

7. a) $\operatorname{sen} x = \cos y = 0{,}64$; $\cos x = \operatorname{sen} y = 0{,}77$
   b) … seno … co-seno
8. a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos x = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3}$; $\operatorname{cotg} x = \dfrac{3}{2}$
   b) $\operatorname{sen} x = \dfrac{5\sqrt{41}}{41}$; $\cos x = \dfrac{4\sqrt{41}}{41}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{5}{4}$; $\operatorname{cotg} x = \dfrac{4}{5}$
9. a) 2,9° b) 75,5° c) 9,2° d) 32,5°

10. a) 89,72° b) 0,819 c) 27,2° d) 0,9998 e) 0,5

11. a) 38,9° b) 56,2° c) 47,1°

12. a) 3 cm; 14,11 cm; 14,43 cm 78°; 90°; 12°
b) 3 cm; 4 cm; 5 cm 36,9°; 53,1°; 90°
c) 13 cm; 12 cm; 5 cm 67,4°; 22, 6°; 90°

13. a) $\overline{PQ} = 4{,}6$ cm; $\overline{NQ} = 6{,}5$ cm b) 66,9°
c) Não é, porque $P\hat{M}Q \neq Q\hat{P}N$

14. C.

15. Sim, iluminam cerca de 32,5 m

16. 50 cm **17.** 22 m

Exercícios de consolidação

40.

Graus	Radianos
360°	2π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
200°	$\frac{10}{9}\pi$
180°	π
450°	$\frac{5}{2}\pi$
90°	$\frac{\pi}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
30°	$\frac{\pi}{6}$

41. a) $\frac{\pi}{3}$ rad b) $\frac{\pi}{6}$ rad c) $\frac{\pi}{4}$ rad d) $\frac{4\pi}{3}$ rad

42. a) 30° b) 60° c) $\approx 180°$ d) 300°

43. 2 rad **44.** 0,5 rad **45.** 10 cm

46. a) 0 b) $\frac{3}{2}$

47. Falsa, pois também se verifica no 4.° Q.

48. a) 1.° e 3.° b) Impossível

49. a) 2.° e 3.° b) 2.°

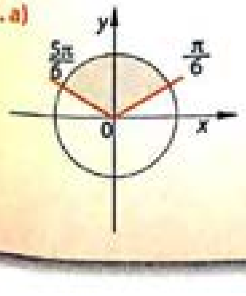
50. D.

51. a) 1.° e 2.° b) 2.° e 4.°

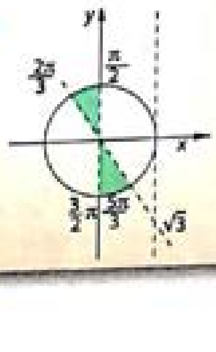
52. a) 4.° b) 3.° e 4.° c) 4.° d) 1.° e) 2.° e 4.°

53. a) $\sqrt{3}$ b) $6 - 3\sqrt{3}$

54. a)



b)



55. $-4\,\text{sen}\,(2a)$

56. a) $\approx 3{,}79$ b) $\approx 3{,}99$

57. a) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
c) Impossível d) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

58. a) $x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
c) Impossível

59. a) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

60. a) $\text{sen}\,(x + \pi) = -\text{sen}\,x$
$-\text{sen}\,x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\,x = -1 \Leftrightarrow$
$x = \frac{3}{2}\pi + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$
$1 - \cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

61. a) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
b) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $S = \{0, 2\pi\}$
c) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $S = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ d) $\beta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$S = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$
e) $\theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ $S = \left\{-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$
f) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}\right\}$

62. a) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5}{4}\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
d) $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\,2\pi, k \in \mathbb{Z}$
e) $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

63. a) $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
c) $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
d) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
e) $x = 3 + 12k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -3 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

64. a) $x = 60°$ ou $x = \frac{\pi}{3}$ b) $x = 30°$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

c) $x = 0$ d) $x = 30°$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

e) $x = 45°$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ f) $x = 45°$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

g) $x = 45°$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ h) $x = 90°$ ou $x = \frac{\pi}{2}$

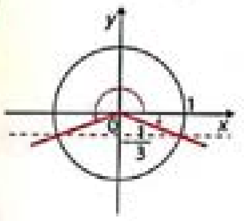
Exercícios propostos pp. 149 a 151

18. a) $\frac{1}{2}$ b) $2\sqrt{3} + 2$

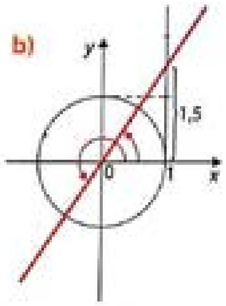
19. D.

20. A.

21. a)



b)



22. a) 348° e 192° b) 110° e 250°

c) 300° e 120° d) 320° e 220° e) 60° e 120°

23. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \sqrt{3}$ b) $3 + 2\sqrt{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

24. D.

25. a) 200° e 340° b) 50° e 310° c) 160° e 340°

d) 45° e 225° e) 120° e 240°

26. a) $\alpha = 35° + k360°,\ k \in \mathbb{Z} \vee \alpha = 145° + k\,360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = 115° + k\,360°,\ k \in \mathbb{Z} \vee \alpha = -115° + k\,360°, k \in \mathbb{Z}$

27. B. 28. C. 29. B. 30. C.

31. $\text{tg}\,\theta + \text{sen}\,(90° - \theta) = \text{tg}\,\theta + \cos\theta = \sqrt{\frac{22}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{5}$

32. a) $\approx 77°$ e $\approx 283°$ b) $\approx 24°$ e $\approx 156°$

c) $\approx 304°$ e $\approx 124°$

33. D. 34. D.

35. B. 36. C.

37. a) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$

d) $-\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ f) $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$

g) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ h) $-\frac{5\pi}{6}$ e $-\frac{\pi}{6}$ i) $-\frac{2\pi}{3}$

38. 105° ou $\frac{7\pi}{12}$

39. a) 0 b) 0 c) 1 d) 0

40. a) 1.º b) 1.º c) 3.º d) 1.º e) 1.º f) 4.º

41. a) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ b) -1 c) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ e) $\frac{20 - \sqrt{5}}{5}$

42. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{-\sqrt{21}}{5}$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

43. a) $x \approx \pm 1{,}23 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x \approx 0{,}42 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x \approx 1{,}15 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x \approx 0{,}11 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

44. a) $[3, 9[$ b) $[-1, 1]\backslash\{0\}$ c) $]0, +\infty[$

d) $]-2, -1]$ e) $\left[-1, -\frac{1}{4}\right[$

f) $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$

45. a) $x \approx 0{,}41 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x \approx 2{,}73 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $x \approx 1{,}84 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -1{,}84 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $x \approx 1{,}53 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Unidade 9: Estatística pp.152 a 173

Exercícios de consolidação

1. a) Finita b) Infinita c) Finita d) Finita

2. a), c), d) e e) Discretas; b) Contínua

3. a) Conjunto de 10 pessoas b) Estado civil

c) Solteiro, viúvo, casado, divorciado, separado

4.

x_i	Frequência absoluta	Frequência relativa
12	1	0,1
15	2	0,2
16	1	0,1
18	3	0,3
20	2	0,2
21	1	0,1
Total	10	1,0

5. a)

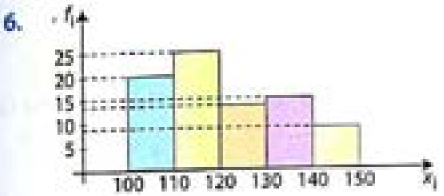
Variável x_i	Frequência absoluta	Frequência acumulada F_i	Frequência relativa f_{ri}
25	1	1	0,031
26	3	4	0,094
27	2	6	0,063
28	2	8	0,063
29	2	10	0,063
30	3	13	0,094
31	4	17	0,125
32	5	22	0,156
33	6	28	0,188
34	3	31	0,094
35	1	32	0,031
Total	32		1

b) 35 °C; 1 **c)** 0,031

d) Menos que 30 °C – 31,4%; maiores que 31 °C – 59,4%

e) 0,500

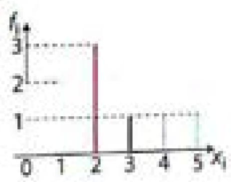
6.



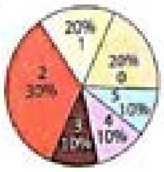
7. a)

x_i	f_i	f_{ri}	F_{ri}
0	2	0,20	0,20
1	2	0,20	0,40
2	3	0,30	0,70
3	1	0,10	0,80
4	1	0,10	0,90
5	1	0,10	1,00
Total	10	1	

b)

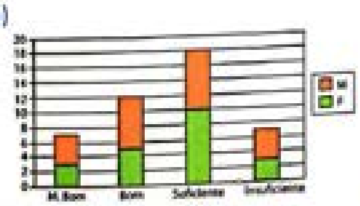


c)



8. a) 37 Alunos.

b)



9. a) 8 **b)** 4 **c)** 2

10. a) [9, 12[**b)** [52, 58[

11. a) 10 **b)** 10 **c)** 11,6

12. a) $\overline{x} = 11,5$ **b)** $x = 11$; moda = 10

13. Classe mediana [6, 9[; classe modal [9, 12[.

14. a) $\overline{x} = 7,2$ **b)** 8 **c)** $D_x = 2,64$ **d)** $\sigma^2 = 8,96$

15. a) 23 **b)** $\overline{x} = 13,09$; moda = 16

c) $D_x = 3,47$; $\sigma = 3,7$

16. a) $\sigma = 0,82$

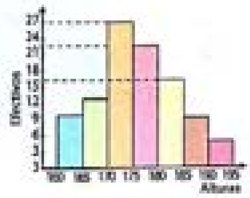
b) Se o desvio padrão é maior do que 0,82, maior tem que ser a dispersão relativamente à média. Basta apresentar um exemplo cuja média seja 10 mas em que os dados estejam mais espaçados. Exemplo: 2, 10, 18.

Exercícios propostos pp. 172 e 173

1. a) A população é o conjunto de 100 jovens aprovados para o serviço militar.

b) A variável estatística é a altura e é uma variável quantitativa contínua.

d)



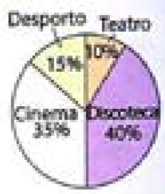
e) 52

2. a) Preferência de ocupação dos fins-de-semana: variável estatística qualitativa.

b)

Ocupação	Efectivos	f_r	F_{ac}	F_{re}
Cinema	35	35%	35	35%
Desporto	15	15%	50	50%
Discoteca	40	40%	90	90%
Teatro	10	10%	100	100%

c)



3. a) 11 **b)** 10 **c)** 12

4. $k = 10$ **5.** 20%

6.

Notas	Frequência
[45, 55[	4
[55, 65[	0
[65, 75[	1
[75, 85[	4
[85, 95[	2
[95, 105[	13
[105, 115[	14
[115, 125[	9
[125, 135[	3
[135, 145[	4
[145, 155[	3
[155, 165[	0
[165, 175[	2
[175, 185[	1

a) 18 valores

b) 5 valores

c) 18 – 5 = 13 valores

d) [105, 115[

e) [105, 115[

f) 10

g) 38; 65%

h) 24; 40%

7. a) 1,5; 4,5; 7,5; 10,5; 13,5 **b)** [9, 12[

c) [6, 9[**d)** $\overline{x} = 7,9$ **e)** 3

8. $\overline{x}_1 = 8,4$ e $\sigma_1 = 4,24$

$\overline{x}_2 = 14,4$ e $\sigma_2 = 4,24$; $\overline{x}_1 > \overline{x}_2$

9. a) 88 **b)** 96 **c)** 58; moda

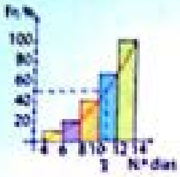
10. a) Amp. = 6 **b)** $\sigma^2 = 1,93$ **c)** $\sigma = 1,39$

11. a) 250 funcionários **b)** Escalão 2

c) Não porque a variável é qualitativa.

12. a) $\overline{x} = 10,24$

b)



c) 20%

d) 35 cobaias

13. a) Variável quantitativa contínua

b) $\overline{x} = 23$; classe modal [15, 30[; classe mediana [15, 30[

c) $\sigma = 11,8$; $\sigma^2 = 139,24$. A variância não é utilizada porque vem expressa nas unidades ao quadrado.

14. a) Classificação de um teste de Biologia – variável quantitativa discreta.

b)

Classificação	f_i	F_{ri}
10	2	0,08
11	3	0,125
12	5	0,21
13	6	0,25
14	4	0,16
15	3	0,125
16	1	0,042

c) $\overline{x} = 12,8$; $\sigma = 1,57$

15. $\overline{x} = 2$

Unidade 10: Geometria espacial pp. 174 a 183

Exercícios de consolidação

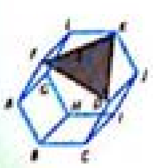
1. a) Sim; complanares.
b) Não; não complanares.
c) ... não complanares.
d) *AD* e *DF*.
e) *AB* e *AC*.

2. a) Perpendiculares
b) Paralelas
c) Concorrentes oblíquas
d) *r* é perpendicular a α.
e) *t* é paralela a α.
f) Concorrentes e perpendiculares

3. a) *EH* (p.e.)
b) *EH* (p.e.)
c) *AB* (p.e.)
d) *ABF* (p.e.)

5. a) Recta *LI*
b) *KJ* e *AB* (p.e.)

c)



6. B. **7.** A.

Exercícios propostos pp. 182 e 183

1. A Falso. O plano pode conter uma recta paralela a *t* e complanar com *r* e *s*, logo não paralelo a estas duas rectas.

B Verdadeiro

C. Falso. A recta pode pertencer a um plano paralelo ao plano definido pelas rectas *r* e *t*, e, logo, não ser complanar com *r*.

D. Verdadeiro

E. Falso. Uma recta perpendicular ao plano definido pelas rectas *s* e *t* é perpendicular a estas duas rectas.

F. Falso. Se a recta for perpendicular às rectas *r* e *t* no seu ponto de intersecção (p.e.) não é concorrente com *s*.

2. a) Perpendiculares
b) Secante
c) *BG*
d) *FC* (p.e.)
e) Rectângulo

3. A. Falso. A intersecção de dois planos é uma recta.
B. Falso. Duas rectas complanares sem pontos comuns são paralelas.
C. Verdadeiro
D. Verdadeiro
E. Falso. Se uma recta é secante a um plano, então é concorrente com as rectas do plano que passem pelo ponto de intersecção da recta com o plano.
F. Falso. Se uma recta é perpendicular a um plano, é per-pendicular a todas as rectas do plano.

4. A. F, só se forem não colineares.
B. F, podem ser concorrentes.
C. V, se o prisma é recto, as faces laterais são perpendiculares à base.
D. F, podem ser oblíquos.
E. V, definição de altura.
F. F, só se o sólido for um poliedro recto.
G. V, se forem não colineares.
H. F, só se o ponto não pertencer à recta.

5. A. **6.** B.

5. a) 2 postes laterais.
b) poste lateral e 1 aresta do «chão».
c) 2 arestas do telhado.

6. a) Poliedros – sólidos com faces planas
b.1) *ABC* e *EFG* (p.e.)
b.2) *AB* e *BCG* (p.e.)
b.3) *ED* e *FG* (p.e.)
b.4) *HIG* e *ABH* (p.e.)
b.5) *HI*, *IG* e *IF* (p.e.)

9. C. **10.** E. **11.** A.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-7.º Ano,* Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2006.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-8.º Ano,* Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2007.

Baldaque, M. M.; Durão, E. G. *Matemática-9.º Ano,* Volumes 1 e 2, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2004.

Cerdeira, F.; Romariz, G. *Exercícios – Matemática 10.º Ano,* Texto Editores, Lda. Lisboa, 1995.

Domingos, M.ª E.; Fernandes, T. T. *Eu e a Matemática. Breve Introdução à Estatística e às Probabilidades,* Edições Asa, Porto, 1986.

Fagilde, Sarifa A. Magide; *Matemática 11,* 11.ª Classe, Texto Editores, Lda. Maputo, 2011.

Gomes, F. C.; Viegas, C. *XEQMAT. Matemática 12.º Ano,* Volume I, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2005.

Gomes, F. C.; Viegas, C. *XEQMAT. Matemática 12.º Ano,* Volume III, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2005.

Ribeiro, A.; Branco, A. P.; Pona, F.; Sousa, H. I.; Dias, I. *A Solução 11, 11.º Ano,* Texto Editores, Lda. Lisboa, 1998.

Silva, J. S.; *Compêndio de Matemática* – Volume I, 1.º Tomo, Gabinete de Estudos e Planeamento, Ministério da Educação e Cultura, Lisboa, 1975.

Soveral, A. A.; Silva, C. V. *Matemática B, Bloco 1,* Texto Editores, Lda. Lisboa, 2005.

Soveral, A. A.; Silva, C. V. *Matemática 10.º Ano,* Volume I.Texto Editores, Lda. Lisboa, 2003.

Soveral, A. A.; Silva, C. *Matemática 10.º Ano,* Volume II, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2003.

Soveral, A. A.; Silva, C. *Matemática 10.º Ano,* Volume III, Texto Editores, Lda. Lisboa, 2003.

Universidade Eduardo Mondlane. *Matemática: Manual da 10.º classe – Vol. I – Introdução à Teoria de Conjuntos e Lógica,* Maputo, 1980.

Universidade Eduardo Mondlane. *Matemática: Manual da 10.º classe – Vol. II – Noções Gerais de Álgebra,* Maputo, 1980.

HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela Paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

[illegible] brotando do chão do teu suor
[illegible] pelos rios, pelo mar
[illegible] por ti, ó Moçambique
[illegible] nos irá escravizar.

LeYa
Texto Editores
978 902 47 5496 0
9 789024 754960
www.leya.com
E-mail: info@teia.co.mz
Ensino Secundário