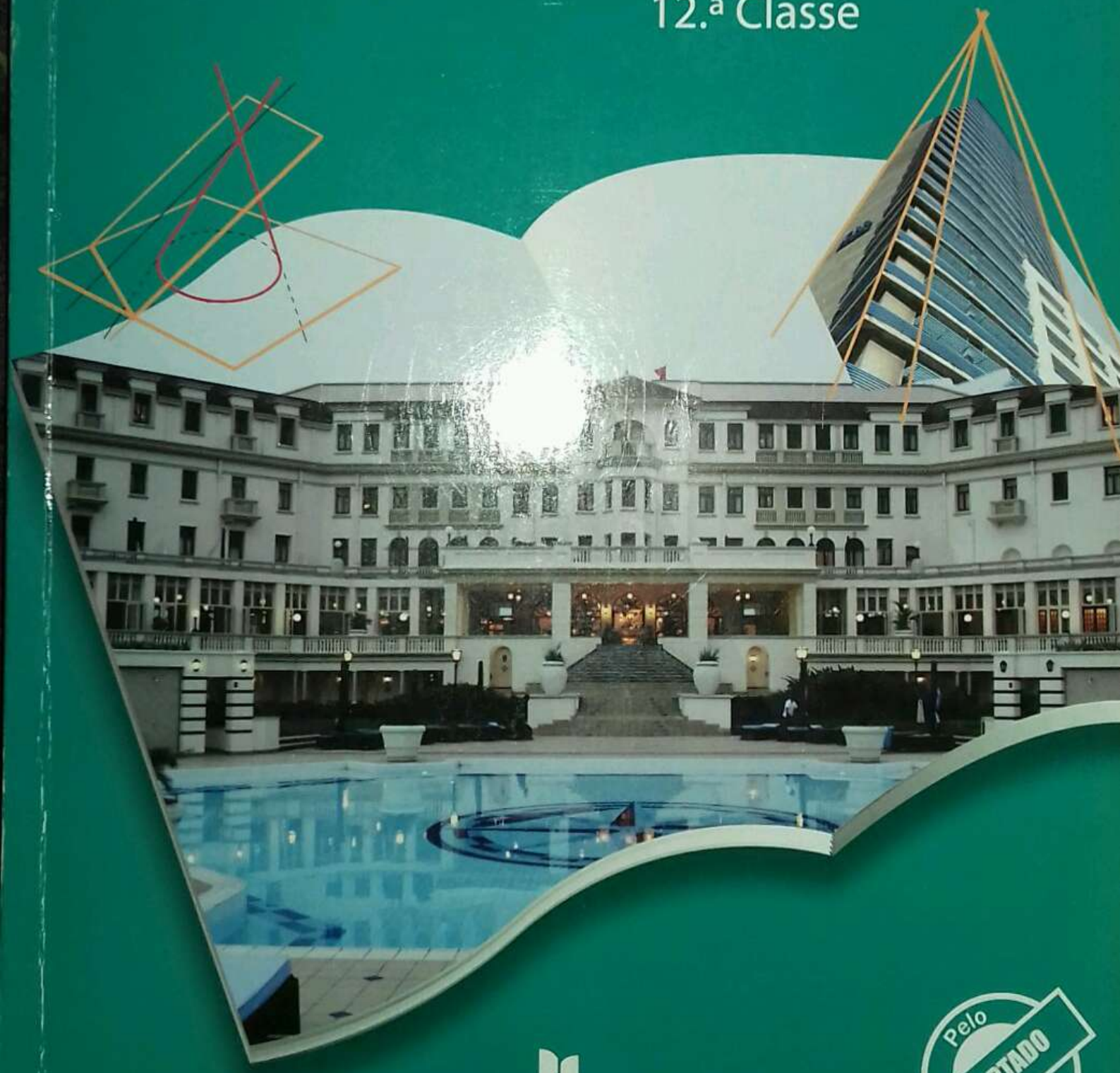
Vasco Filipe Camundimo

DGD12

Desenho e Geometria Descritiva
12.ª Classe



Texto Editores

Pelo ADOPTADO MINEDH

f i c h a t é c n i c a

título	**DGD 12 • Desenho e Geometria Descritiva 12.ª Classe**
autor	**Vasco Filipe Camundimo**
coordenação	**Stella Morgadinho**
editor	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
capa	**Omaia Panachande**
arranjo gráfico	**Texto Editores, Lda. – Moçambique**
paginação	**Omaia Panachande / Arlindo Pais Veiápe Uamusse**
pré-impressão	**Leya, S.A.**
impressão e acabamentos	**Texto Editores**

Texto Editores

Av. Para o Palmar Q. 35, n.º 141A • Sommerchield II • Maputo • Moçambique
Tel: (+258) 21 49 73 04
Fax: (+258) 21 49 73 05
Cels: (+258) 82 326 1460 • (+258) 84 326 1460
E-mail: info@me.co.mz

© 2009, Texto Editores, Lda.

Reservados todos os direitos. É proibida a reprodução desta obra por qualquer meio (fotocópia, offset, fotografia, etc.) sem o consentimento escrito da Editora, abrangendo esta proibição o texto, a ilustração e o arranjo gráfico. A violação destas regras será passível de procedimento judicial, de acordo com o estipulado no Código do Direito de Autor. D.L. 4 de 27 de Fevereiro de 2001.

MAPUTO, MARÇO de 2017 • 2.ª EDIÇÃO • 1.ª TIRAGEM • REGISTADO NO INLD SOB O NÚMERO: 5901/RLINLD/2009

Vasco Filipe Camundimo

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
MINISTÉRIO
ESCOLA SECUNDÁRIA DE TETE

DGD12

Desenho e Geometria Descritiva
12.ª Classe

Texto Editores

EduSkills
MOÇAMBIQUE

Biblioteca Digital EduSkills

Livros, exames e materiais de apoio para estudar melhor



100% Gratuito

Livros Escolares	Exames Escolares	Exames de Admissão	Exames Resolvidos
CLIQUE AQUI	CLIQUE AQUI	CLIQUE AQUI	CLIQUE AQUI

Estude onde estiver.
Aprenda no seu ritmo.
Construa o seu futuro.

A Biblioteca Digital **EduSkills** é o seu companheiro de estudo para alcançar melhores resultados e realizar sonhos.

ACEDER À BIBLIOTECA

www.eduskills.co.mz

CONFIANÇA
Segurança, credibilidade e compromisso.

EDUCAÇÃO
Conhecimento que transforma vidas.

MOÇAMBIQUE
Orgulho de ser moçambicano, foco no nosso país.

INOVAÇÃO
Tecnologia e educação caminhando juntas.

Prefácio

O objectivo da disciplina de Desenho e Geometria Descritiva é desenvolver no aluno a capacidade de ver, perceber, organizar e catalogar o espaço envolvente. É parte integrante das ciências aplicadas e a base de resolução de muitos problemas práticos, fundamentalmente para as Engenharias, Arquitectura e actividades de produção industrial.

Os conteúdos do presente livro de Desenho e Geometria Descritiva, da 12.ª Classe, dão continuidade ao que se estudou na Classe anterior, com a abordagem de quatro Unidades Temáticas, nomeadamente: Secções em Sólidos, Intersecção de Rectas com Sólidos, Sombras e Representação Axonométrica.

Os conhecimentos a desenvolver na 12.ª Classe constituem o somatório das aprendizagens que tiveram lugar basicamente na 11.ª Classe, mas também no 1.º Ciclo do Ensino Secundário Geral, particularmente nas Unidades Temáticas sobre Desenho Geométrico, Projecções Ortogonais e Formas em Axonometrias. Os conhecimentos e habilidades adquiridos no Ensino Primário, especialmente no desenho geométrico, também se reflectem a este nível, pois trata-se duma área onde os conteúdos se desenvolvem em espiral.

Tendo em conta a característica prática da disciplina, a abordagem dos conteúdos é acompanhada pela resolução de exercícios, mantendo-se, deste modo, o tipo de abordagem dos conteúdos iniciado na 11.ª Classe, o que permite uma melhor compreensão, pois o teórico relaciona-se sempre com o prático. Neste livro pretende-se que o aluno faça uma interpretação espacial das situações; ao que se segue a resolução, passo a passo, de problemas, assegurando-se, assim, que haja uma efectiva construção do conhecimento em Desenho e Geometria Descritiva.

No final de cada Unidade Temática são propostos exercícios para que o aluno desenvolva a prática e aplique os conhecimentos adquiridos de modo a efectuar uma consolidação dos mesmos. Parte desses exercícios apresenta as suas soluções nas últimas páginas do livro.

Nota: Por razões inerentes à paginação de um manual escolar, parte dos desenhos associados à exemplificação dos problemas apresentados não se encontra à escala real contida nos enunciados.

Ao longo do texto, diferentes cores são usadas para destacar partes do texto, enquanto que nas ilustrações a cor é usada basicamente para distinguir os diferentes passos da resolução de um problema:

- Preto (ou branco) – linhas de construções auxiliares
- Laranja – planos ou traços de planos
- Azul – dados do problema e eixo **x**
- Vermelho – linhas de solução do problema
- Amarelo – secções
- Verde claro – sombra própria
- Verde escuro – sombra projectada.

No caso particular dos traços dos planos, mesmo tratando-se de dados do problema, são apresentados a laranja, excepto em situações em que os mesmos são solução do problema onde são representados a vermelho.

Tendo em conta que, ao longo da resolução de problemas, o meio riscador que o aluno mais usará é o lápis, ao longo do livro há toda uma explicação de como distinguir as diferentes representações, através de diferentes espessuras e tipos de linhas.

Um dos princípios orientadores do Currículo do Ensino Secundário Geral é o ensino e a aprendizagem, orientados para o desenvolvimento de competências para a vida, o que significa que, na medida do possível, os conhecimentos obtidos nesta disciplina, bem como noutras, deverão ser aplicados na resolução de problemas e numa aprendizagem contínua ao longo da vida.

O Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano pretende que o currículo do Ensino Secundário Geral tenha um carácter profissionalizante, pelo que integra componentes práticas, como os conteúdos da disciplina de Desenho e Geometria Descritiva, na perspectiva de assegurar que os jovens estejam preparados para a vida laboral.

Gostaria de manifestar a minha sincera gratidão ao arquitecto Pedro Augusto Samo, pela sua colaboração na elaboração da Unidade Temática 4, Representação Axonométrica.

O Autor

Índice

Unidade 1: Secções em Sólidos









Introdução 8
Secções planas produzidas em pirâmides por planos de nível 10
Secções planas produzidas em prismas por planos de nível 14
Secções planas produzidas em pirâmides por planos de frente 16
Secções planas produzidas em prismas por planos de frente 17
Secções planas produzidas em pirâmides por planos de topo 18
Secções planas produzidas em prismas por planos de topo 20
Secções planas produzidas em pirâmides por planos projectantes horizontais 22
Secções planas produzidas em prismas por planos verticais 25
Secções planas produzidas por planos de perfil em pirâmides 26
Secções planas produzidas em prismas por planos de perfil 27
Diferentes tipos de secções cónicas 29
Processo para o reconhecimento do tipo da secção produzida num cone 32
Determinação de secções circulares e triangulares em cones 34
Métodos de determinação de secções planas em cones 35
Diferentes tipos de secções cilíndricas 47
Processo para o reconhecimento do tipo de secção produzida num cilindro 49
Secções planas em esferas 61
Secções planas produzidas em esferas por planos paralelos aos planos de projecção 62
Secções planas em esferas por planos projectantes não paralelos aos planos de projecção 63
Exercícios propostos 67

Índice

Unidade 2: Intersecção de Rectas com Sólidos



Intersecção de rectas com sólidos 72
Intersecção de rectas com pirâmides 73
Intersecção de rectas com prismas 79
Intersecção de rectas com cones 84
Intersecção de rectas com cilindros 96
Intersecção de rectas com esferas 102
Exercícios propostos 108

Unidade 3: Sombras







Introdução 114
Direcção luminosa convencional 116
Noção de sombra projectada, sombra própria e sombra espacial 117
Noção de sombra real e sombra virtual de um ponto 118
Sombra projectada de pontos, segmentos de rectas e rectas nos planos de projecção 119
Sombra projectada de pontos 119
Sombra projectada de segmentos de recta 121
Sombra projectada de recta 127
Sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de figuras planas 129
Sombra própria e sombra projectada de sólidos 148
Planos tangentes luz/sombra 149
Sombra própria e sombra projectada de sólidos com bases de nível e de frente 150
Sombra própria e sombra projectada de sólidos com bases de perfil 171
Exercícios propostos 185

Índice

Unidade 4: Representação Axonométrica

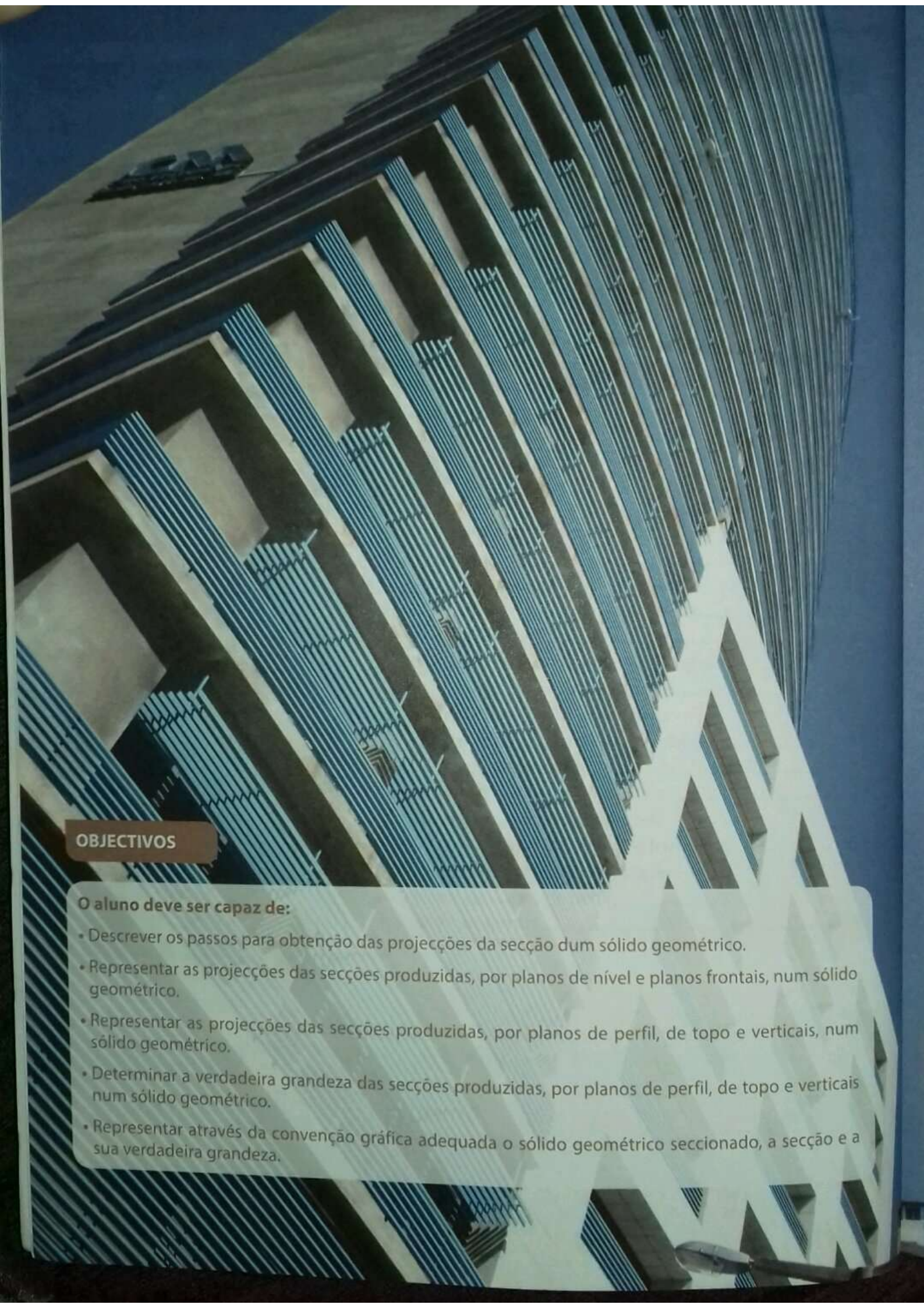


Introdução 190
Diferença entre representação em axonometria e perspectiva rigorosa 191
Diferença entre representação em axonometria e projecções ortogonais 192
Modalidades de perspectiva axonométrica 192
Actividades que antecedem a representação duma peça em axonometria 193
Desenho de uma peça em perspectiva cavaleira 193
Representação de peças geométricas em axonometria isométrica 195
Representação da peça numa perspectiva dimétrica 197
Exercícios propostos 203

Soluções 208

Bibliografia 216

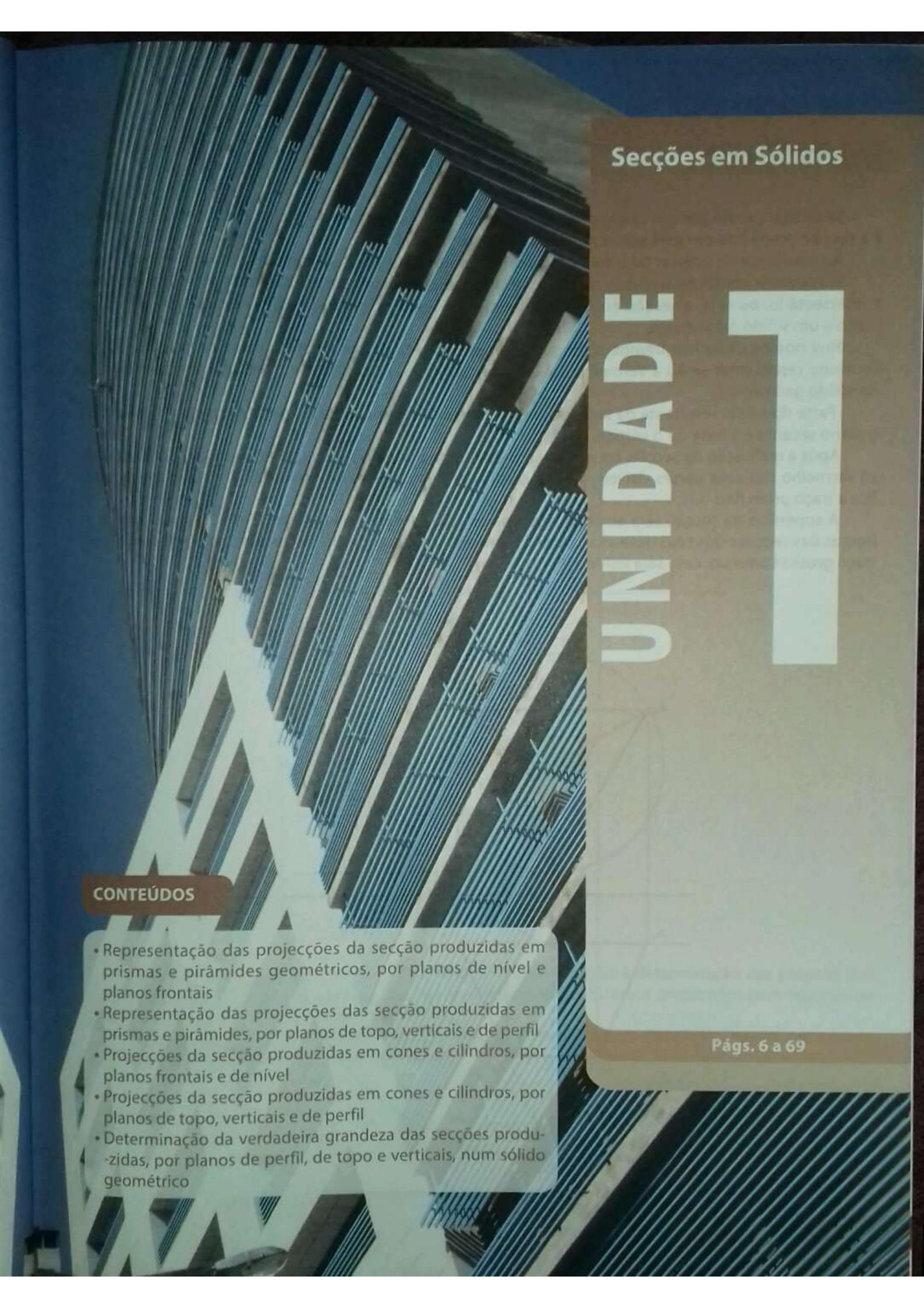
EduSkills MOÇAMBIQUE
Livros Escolares
Exames Escolares
Exames de Admissão
Exames Resolvidos
ACEDER À BIBLIOTECA
www.eduskills.co.mz



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Descrever os passos para obtenção das projecções da secção dum sólido geométrico.
- Representar as projecções das secções produzidas, por planos de nível e planos frontais, num sólido geométrico.
- Representar as projecções das secções produzidas, por planos de perfil, de topo e verticais, num sólido geométrico.
- Determinar a verdadeira grandeza das secções produzidas, por planos de perfil, de topo e verticais num sólido geométrico.
- Representar através da convenção gráfica adequada o sólido geométrico seccionado, a secção e a sua verdadeira grandeza.



UNIDADE 1

Secções em Sólidos

CONTEÚDOS

- Representação das projecções da secção produzidas em prismas e pirâmides geométricos, por planos de nível e planos frontais
- Representação das projecções das secção produzidas em prismas e pirâmides, por planos de topo, verticais e de perfil
- Projecções da secção produzidas em cones e cilindros, por planos frontais e de nível
- Projecções da secção produzidas em cones e cilindros, por planos de topo, verticais e de perfil
- Determinação da verdadeira grandeza das secções produ-zidas, por planos de perfil, de topo e verticais, num sólido geométrico

Págs. 6 a 69

Introdução

Se se fizer passar por um sólido geométrico um plano, a superfície do plano que é comum ao sólido é a secção produzida por esse plano no referido sólido.

Ao plano que ao intersectar o sólido geométrico determina a secção, chama-se **plano secante**.

Portanto, a condição necessária para que um plano determine a secção num sólido geométrico é intersectá-lo, ou seja, a secção em sólidos geométricos ocorre quando há algo em comum entre um plano e um sólido geométrico.

Nos nossos desenhos iremos distinguir a secção através da cor amarela, cujas projecções do seu contorno representar-se-ão a vermelho, tal como as projecções das linhas visíveis que definem a forma do sólido geométrico.

Parte do sólido resultante da secção é designada **sólido truncado**. Esta parte é compreendida entre o plano secante e a base ou o vértice.

Após a realização da secção, considera-se apenas uma parte do sólido que fica a traço contínuo grosso vermelho nas suas partes visíveis, a traço médio vermelho nas partes invisíveis e a parte desprezada fica a traço preto fino.

A superfície da secção será amarela, apenas nos casos em que ela é visível (Fig. 1). Se não colorir as figuras das secções dos seus desenhos, deverá representar a sua superfície a tracejado e o seu contorno a traço grosso contínuo, caso seja visível.

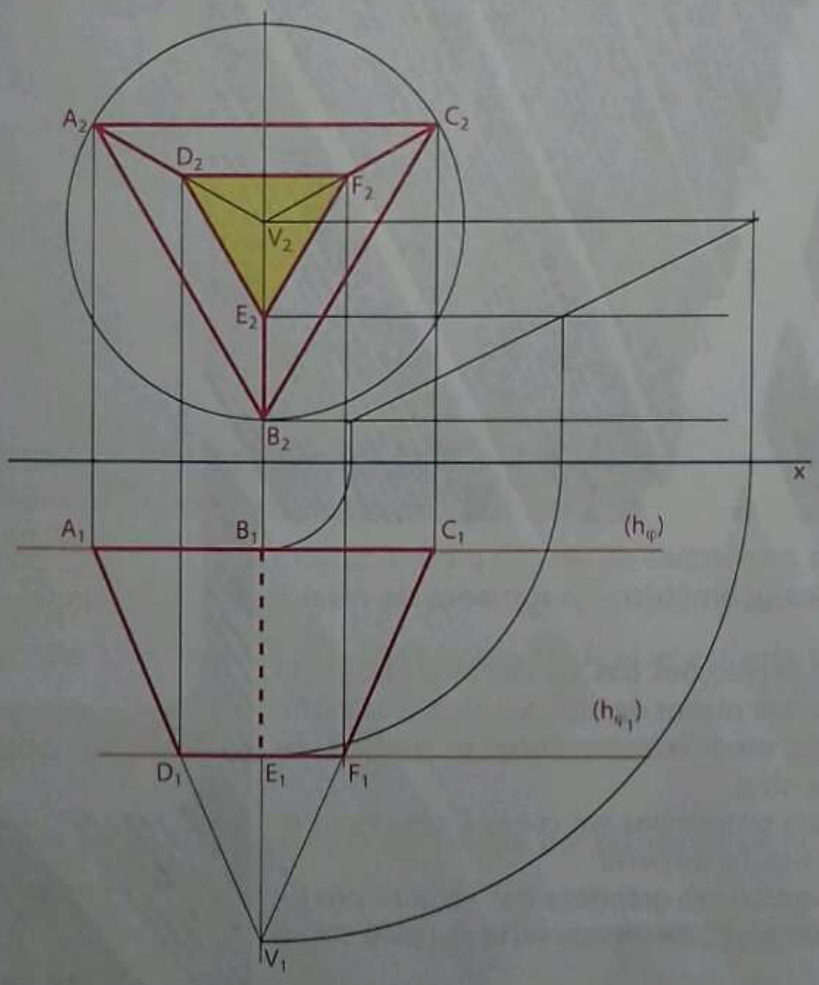


Fig. 1 Secção visível produzida numa pirâmide.

Se a parte do sólido que será considerada impede a visibilidade da secção, então o contorno da secção, como qualquer aresta invisível, será a tracejado médio e a superfície da secção, neste caso, não será colorida ou tracejada (Fig. 2).

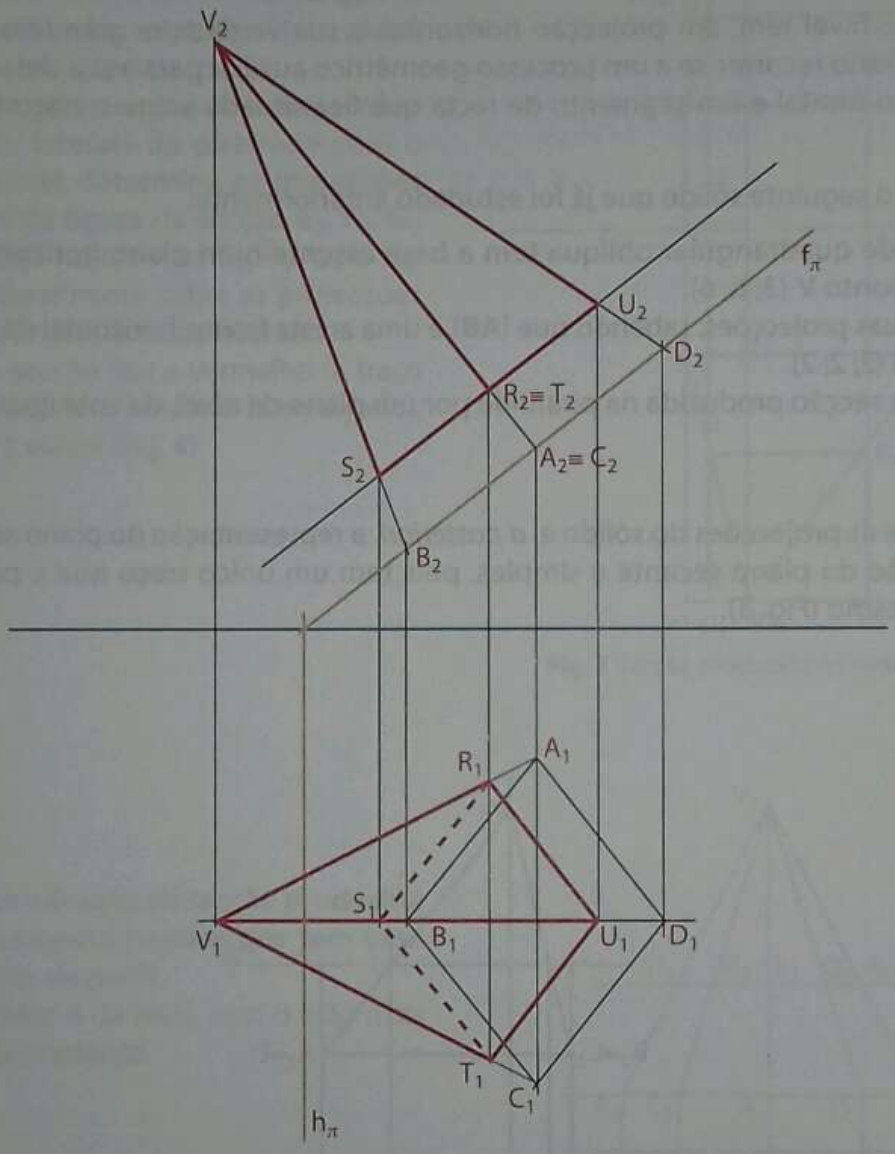


Fig. 2 Figura da secção invisível

No estudo desta Unidade Temática será dada particular atenção à determinação das próprias secções e não às projecções dos sólidos, uma vez que achamos que estamos preparados para representar, pelas suas projecções, os sólidos geométricos.

De qualquer forma, para aqueles exercícios que nos parecerem mais complexos, haverá certamente, alguma explicação sobre as projecções do sólido.

Secções planas produzidas em pirâmides por planos de nível

Uma secção de nível tem, em projecção horizontal, a sua verdadeira grandeza, daí, de um modo geral, não ser necessário recorrer-se a um processo geométrico auxiliar para a sua determinação.

A sua projecção frontal é um segmento de recta que fica situado sobre o traço frontal do plano de nível que a produz.

Consideremos o seguinte sólido que já foi estudado anteriormente:

1. Uma pirâmide quadrangular oblíqua tem a base assente num plano horizontal ou de nível e o vértice é o ponto **V** (3; 6; 6).

a) Execute as suas projecções, sabendo que **[AB]** é uma aresta fronto-horizontal da base quadrangular. **A** (6; 2; 2) e **B** (2; 2; 2).

b) Determine a secção produzida na pirâmide por um plano de nível, de cota igual a 3,5 cm.

1.º passo

Determinam-se as projecções do sólido e, *a posteriori*, a representação do plano secante.

A representação do plano secante é simples, pois tem um único traço que é paralelo ao eixo ***x***, a 3,5 cm acima do mesmo (Fig. 3).

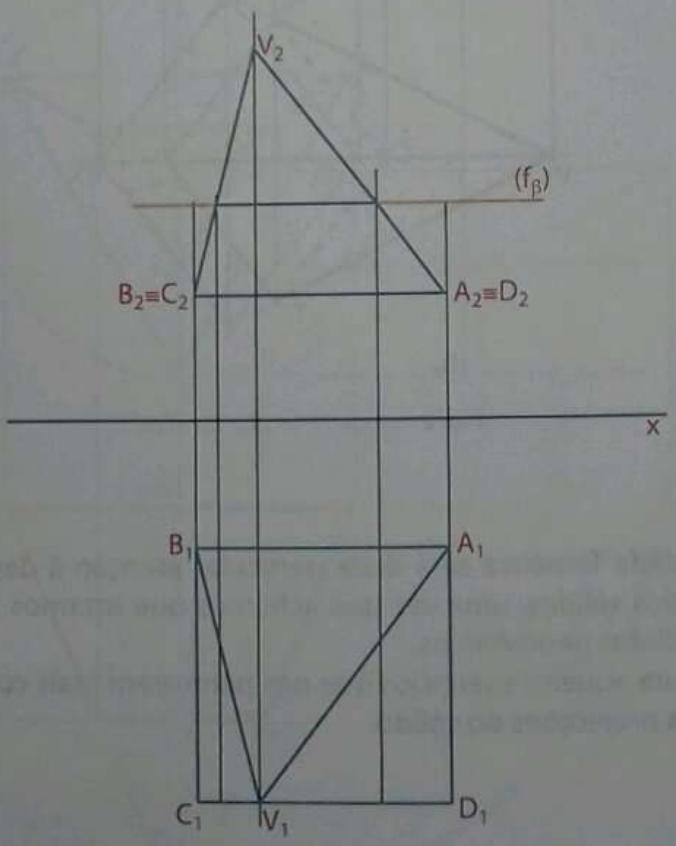


Fig. 3 Projecções da pirâmide e representação do plano secante

2.º passo

Determinam-se as projecções frontais dos pontos de intersecção das arestas laterais da pirâmide com o plano secante, tendo em conta que as projecções frontais de todos os pontos dum plano de nível se situam sobre o seu traço.

Sendo assim, a intersecção das projecções frontais das arestas laterais da pirâmide com o traço do plano secante determina as projecções frontais dos vértices da figura da secção E_2, F_2, G_2 e H_2, cujas projecções horizontais E_1, F_1, G_1 e H_1, encontrar-se-ão naturalmente sobre as projecções horizontais das respectivas arestas laterais.

O contorno da secção fica a vermelho (a traço grosso) e a sua superfície a amarelo (a tracejado), pois, neste caso, ela é visível (Fig. 4).

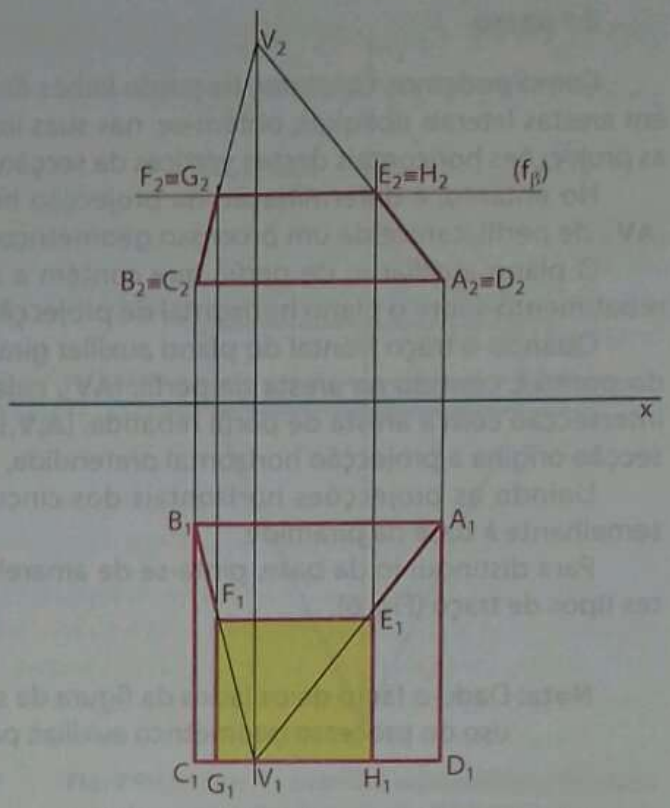


Fig. 4 Secção produzida na pirâmide quadrangular.

Segue-se a **determinação da secção produzida numa pirâmide pentagonal regular, que tem uma das arestas na posição de perfil.**

A base da pirâmide é de nível, com o lado mais próximo de φ_0, fronto-horizontal.

1.º passo

Dada a pirâmide pentagonal regular, representa-se pelo seu traço o plano α, que a secciona.

Designam-se as projecções frontais dos pontos da figura da secção L_2, M_2, N_2, Q_2 e R_2, pois a sua obtenção é directa, situando-se nos pontos de intersecção das projecções frontais das arestas laterais da pirâmide com o traço do plano secante (Fig. 5).

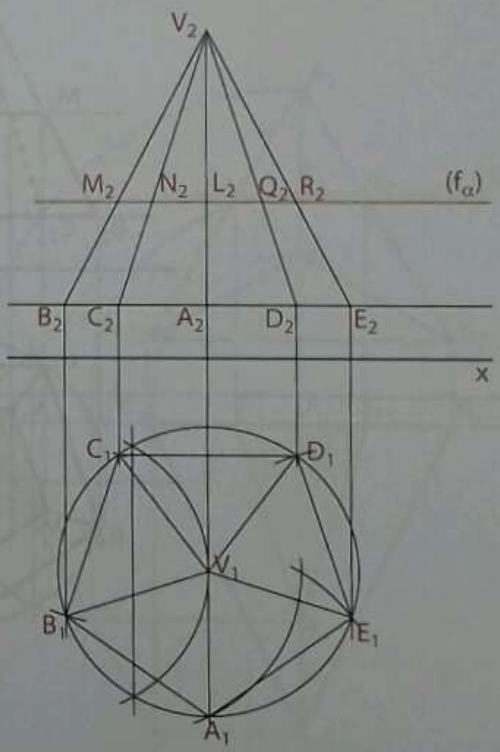


Fig. 5 Projecções da pirâmide, representação do plano secante e projecções frontais dos vértices da figura da secção

2.º passo

Como podemos constatar, traçando linhas de chamada pelas projecções frontais dos vértices situados em arestas laterais oblíquas, obtêm-se, nas suas intersecções com as projecções horizontais dessas arestas, as projecções horizontais desses vértices da secção, M_1, N_1, Q_1 e R_1.

No entanto, a determinação da projecção horizontal do vértice da secção, situado na aresta lateral [AV], de perfil, carece de um processo geométrico auxiliar, neste caso, o rebatimento.

O plano auxiliar π, de perfil, que contém a aresta [AV], ao girar em torno do seu traço horizontal, rebatimento sobre o plano horizontal de projecção, gira com essa aresta.

Quando o traço frontal do plano auxiliar gira até coincidir com o eixo x, gira com a projecção frontal do ponto L contido na aresta de perfil, [AV], cuja perpendicular ao eixo x determina L_r, rebatido na sua intersecção com a aresta de perfil rebatida, $[A_rV_r]$. Por L_r, traça-se uma perpendicular a $[A_1V_1]$, cuja intersecção origina a projecção horizontal pretendida, L_1.

Unindo as projecções horizontais dos cinco vértices da secção obtém-se um pentágono regular semelhante à base da pirâmide.

Para distingui-lo da base, pinta-se de amarelo e, para finalizar o exercício, distinguem-se os diferentes tipos de traço (Fig. 6).

Nota: Dado o facto de os lados da figura da secção serem paralelos aos lados da base da pirâmide, o uso do processo geométrico auxiliar, para encontrar L_1, poderá ser dispensado.

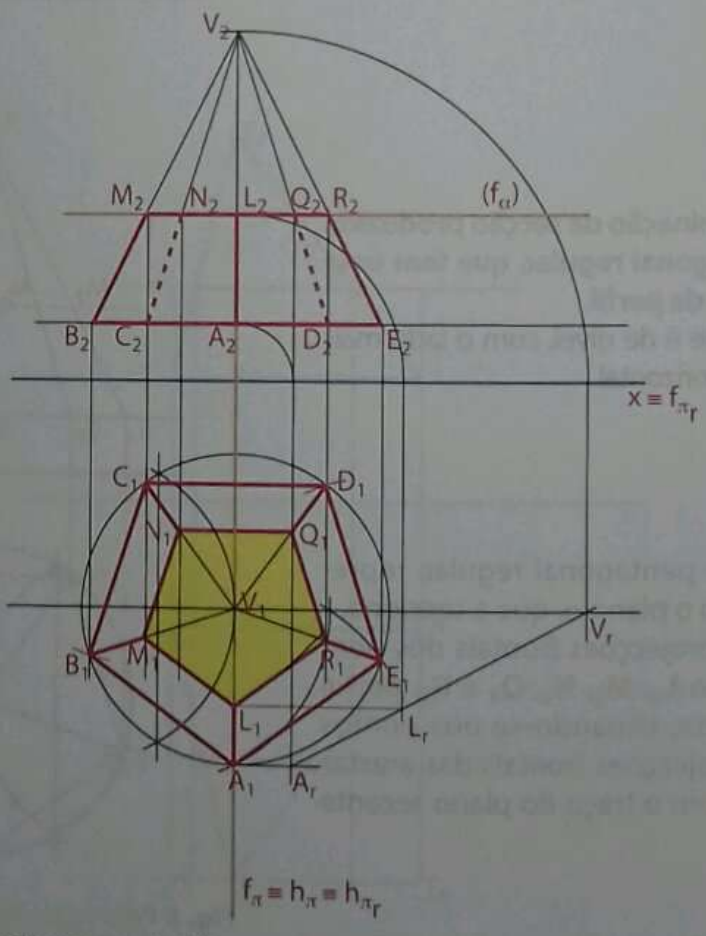


Fig. 6 Secção produzida na pirâmide por um plano de nível.

Abordemos um terceiro exemplo, em que o **plano secante não é paralelo ao plano da base do sólido.**

Consideremos a seguinte pirâmide triangular regular, de base de frente, cuja aresta da base mais próxima de v_0 é horizontal de frente. O plano secante é de nível e contém um ponto situado 1 cm acima do centro da base da pirâmide.

1.º passo

Depois de projectar o sólido, representa-se o traço do plano secante que se situa 1 cm para cima do centro da base do sólido que se pretende seccionar.

Na intersecção do traço do plano secante com as projecções frontais das arestas da base, e a aresta lateral de perfil, obtêm-se as projecções frontais dos três pontos que definem a secção na pirâmide pelo plano dado, nomeadamente E_2, F_2 e G_2 (Fig. 7).

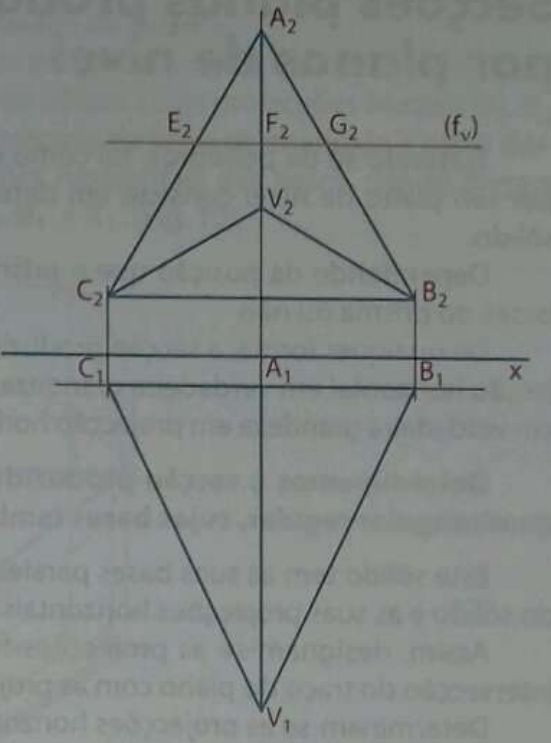


Fig. 7 Projecções da pirâmide, representação do plano secante e projecções frontais dos vértices da figura da secção

2.º passo

Pelas projecções frontais dos três vértices da secção, traçam-se linhas de chamada que, ao se intersectarem com as projecções horizontais das mesmas arestas, determinam as projecções horizontais dos vértices da secção.

Deste modo, só foi possível determinar as projecções horizontais dos pontos **E** e **G**. A projecção horizontal do ponto **F** carece do uso de um processo geométrico auxiliar, neste caso o rebatimento, que consistirá em conter a aresta de perfil num plano de perfil e efectuar o seu rebatimento.

Vamos efectuar o rebatimento do plano auxiliar sobre o plano horizontal de projecção, para obter rapidamente a projecção horizontal do último vértice da secção, o vértice **F**.

Procede-se da mesma forma que no exercício anterior e determina-se o F_1.

Unem-se os três pontos, efectua-se o tracejado e distinguem-se os traços dos contornos. Neste caso, com o recurso a cor, a figura da secção está a amarelo, o traço grosso a vermelho, o plano secante a laranja, o eixo **x** a azul e as linhas auxiliares a preto (Fig. 8).

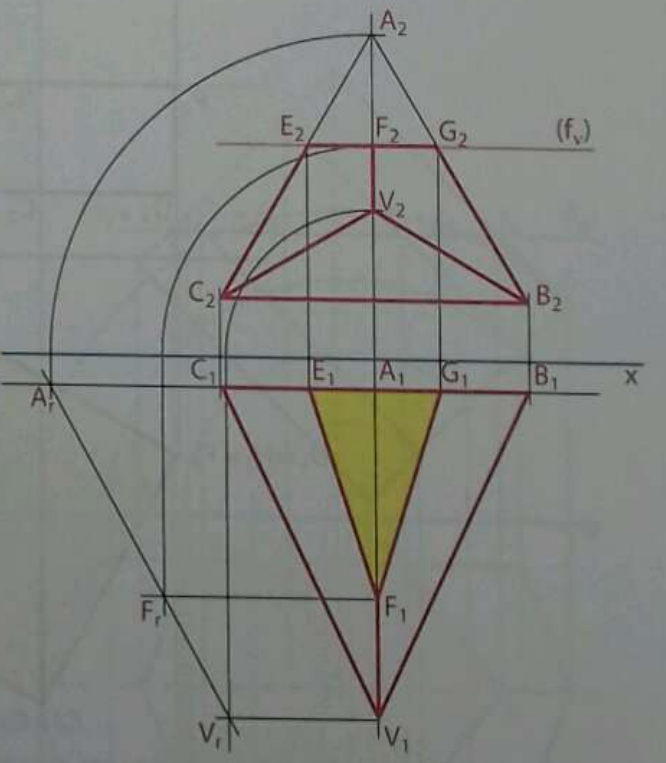


Fig. 8 Secção produzida numa pirâmide triangular por um plano de nível.

Secções planas produzidas em prismas por planos de nível

Tratando-se de poliedros, tal como em pirâmides, a determinação da figura da secção em prismas por um plano de nível consiste em determinar os pontos de intersecção do plano com as arestas do sólido.

Dependendo da posição que o prisma ocupa no espaço, a secção poderá ser um polígono igual às bases do prisma ou não.

De qualquer forma, a secção produzida por qualquer plano de nível apresenta-se sempre na sua projecção horizontal em verdadeira grandeza, aliás, todas as figuras contidas em planos de nível encontram-se em verdadeira grandeza em projecção horizontal.

Determinemos a secção produzida por um plano de nível, de cota igual a 3 cm, num prisma quadrangular regular, cujas bases também são de nível.

Este sólido tem as suas bases paralelas ao plano secante. Por isso a figura da secção é igual às bases do sólido e as suas projecções horizontais são coincidentes.

Assim, designam-se as projecções frontais L_2, M_2, N_2 e P_2, dos vértices da secção nos pontos de intersecção do traço do plano com as projecções frontais das arestas laterais do prisma.

Determinam-se as projecções horizontais dos pontos que definem a figura da secção L_1, M_1, N_1 e P_1, que são coincidentes com as projecções horizontais dos vértices das duas bases do prisma.

A figura 9 ilustra este exercício.

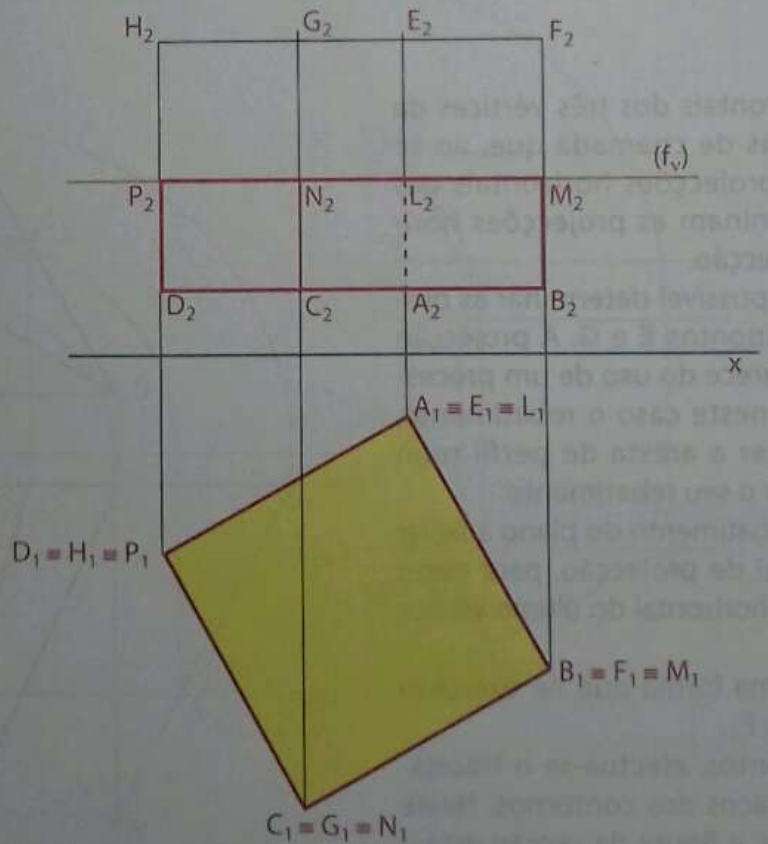


Fig. 9 Secção produzida num prisma de bases de nível por um plano de nível.

Agora **determinamos a figura da secção produzida num prisma pentagonal oblíquo, de bases de frente, por um plano de nível que contém os centros das bases do prisma.**

A solução deste exemplo é fácil e rapidamente visível, pois os quatro pontos que definem a figura da secção nomeadamente V, X, V´e X´, encontram-se nas bases do sólido, cujas projecções frontais V_2, X_2, V_2' e X_2', são as primeiras a serem marcadas ao que se segue o traçado de linha de chamada a partir dessas projecções, que se intersectam com as respectivas projecções horizontais das bases, dando origem aos pontos que definem a projecção horizontal da secção V_1, X_1, V_1' e X_1' (Fig. 10).

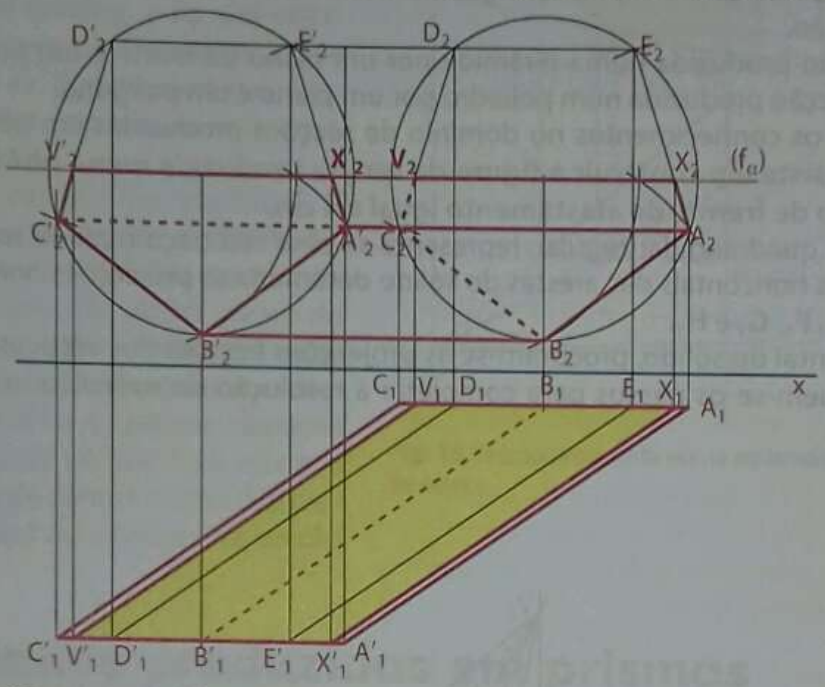


Fig. 10 Secção produzida num prisma por um plano de nível.

Segue-se **a determinação da figura da secção produzida num prisma hexagonal regular, de bases de topo, que fazem com ν_0 ângulos de 45° de abertura para a direita, cuja face mais próxima de φ_0 é de frente. O plano secante é de nível.**

Este plano secante intersecta as faces do prisma e uma das bases. Assim sendo, pelos pontos de intersecção do traço do plano secante, com as projecções frontais das arestas laterais e da base do sólido, determinam-se as projecções frontais dos pontos que definem a figura secção G_2, H_2, I_2, J_2, K_2, L_2 e M_2.

A partir dessas projecções traçam-se linhas de chamada, cuja intersecção com as projecções horizontais das respectivas arestas determinam as projecções horizontais dos pontos que definem a figura da secção G_1, H_1, I_1, J_1, K_1, L_1 e M_1.

Por fim, utiliza-se devidamente cada tipo de traço para completar a resolução do exercício (Fig. 11).

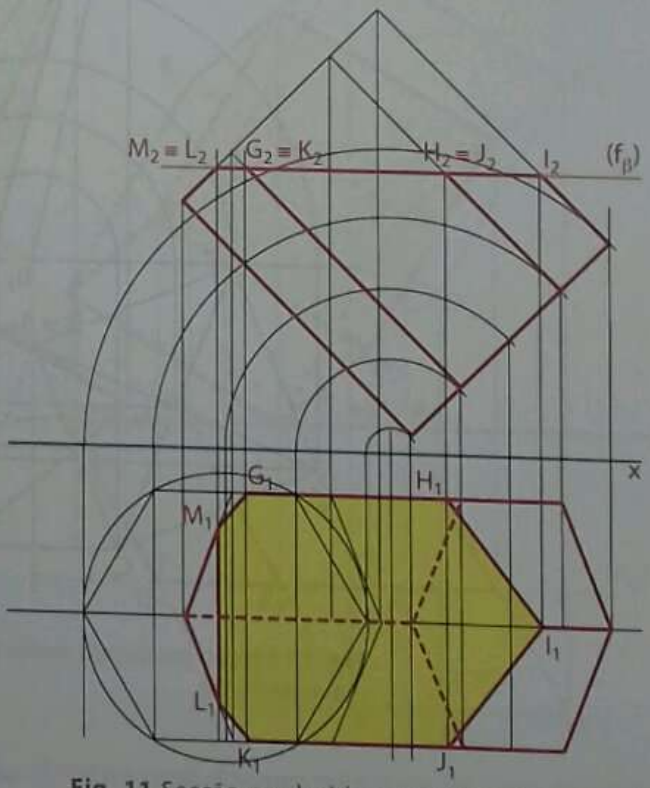


Fig. 11 Secção produzida num prisma hexagonal por um plano de nível.

Secções planas produzidas em pirâmides por planos de frente

Qualquer figura, contida num plano de frente, tem a sua projecção frontal em verdadeira grandeza. Assim sendo, porque a secção produzida num sólido por um plano pertence também ao plano secante, não haverá necessidade de usar um processo geométrico auxiliar para se determinar a verdadeira grandeza da figura da secção.

A figura da secção produzida numa pirâmide por um plano de frente é um polígono, aliás, de um modo geral, toda a secção produzida num poliedro por um plano é um polígono.

Para aprofundar os conhecimentos no domínio de secções produzidas em pirâmides, resolvemos um exercício que **consiste em construir a figura da secção produzida numa pirâmide quadrangular regular por um plano de frente, de afastamento igual a 4 cm.**

Dada a pirâmide quadrangular regular, representa-se pelo seu traço o plano secante, cuja intersecção com as projecções horizontais das arestas do sólido determina as projecções horizontais dos vértices da figura da secção E_1, F_1, G_1 e H_1.

Na projecção frontal do sólido, procuram-se as projecções frontais dos vértices da figura da secção E_2, F_2, G_2 e H_2 e seguem-se os passos para completar a resolução do exercício, como mostra a figura (Fig. 12).

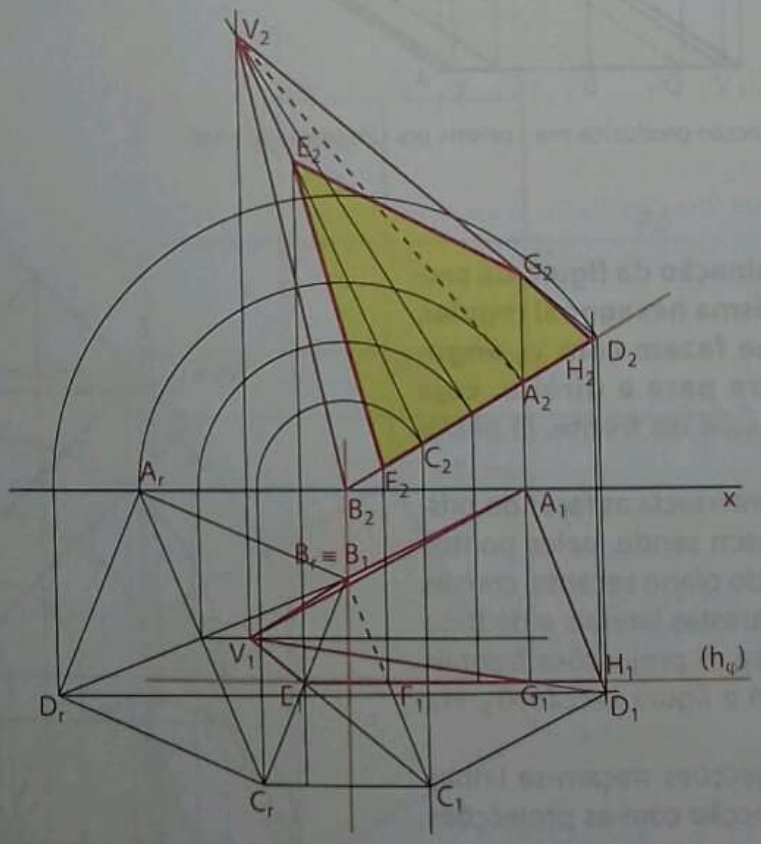


Fig. 12 Secção produzida numa pirâmide quadrangular por um plano de frente.

Para terminar o estudo de secções planas produzidas em pirâmides por planos de frente, **determinemos mais uma secção produzida numa pirâmide pentagonal oblíqua de base de perfil. O plano secante tem afastamento igual a 3 cm.**

Depois de projectar o sólido, representa-se o traço do plano secante, e na sua intersecção com as projecções horizontais das arestas, encontram-se directamente as projecções horizontais dos pontos que definem a secção, R_1, S_1, T_1, U_1 e Z_1.

As projecções frontais dos pontos, **S**, **T** e **U** contidos em arestas laterais, é directa S_2, T_2, e U_2. A projecção frontal dos pontos da secção, situados na base do sólido, carece do uso dum método geométrico auxiliar. Como se pode ver na resolução deste exercício, um rebatimento ajudou a localizar os pontos rebatidos da base R_r e Z_r, situados no plano secante e, *a posteriori*, consequente determinação das projecções frontais desses dois pontos da secção R_2 e Z_2, (Fig. 13).

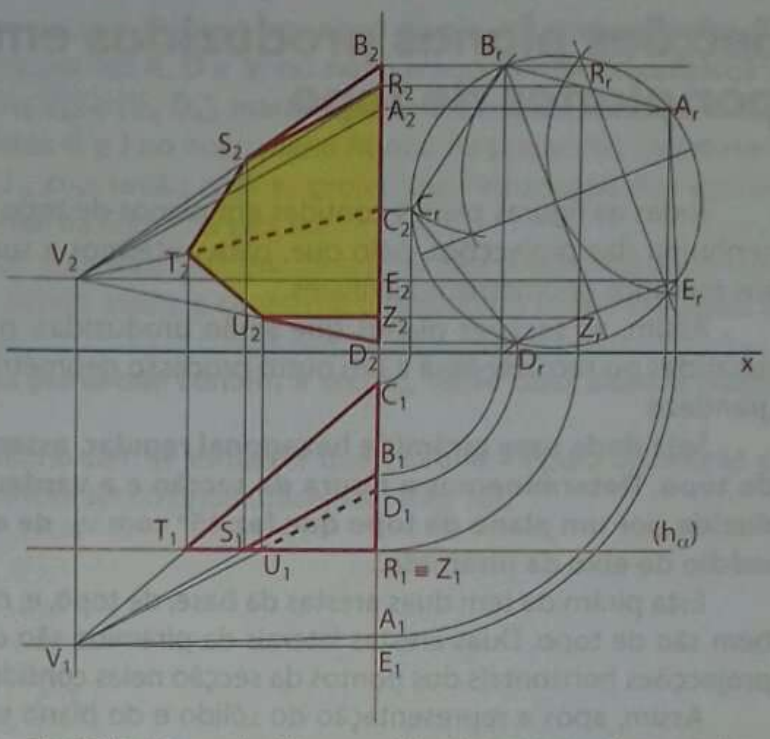


Fig. 13 Secção produzida numa pirâmide pentagonal por um plano de frente.

Secções planas produzidas em prismas por planos de frente

Determinemos as projecções da figura da secção produzida num prisma quadrangular oblíquo, por um plano de frente, de afastamento igual a 2,5 cm.

Como se pode ver no desenho, o prisma tem as bases de frente.

Uma vez que o sólido já está representado, passa-se imediatamente à representação do plano secante e à determinação das projecções horizontais dos vértices da figura da secção, E_1, F_1, G_1 e H_1.

Seguindo os mesmos procedimentos dos exercícios anteriores, determinam-se as projecções frontais da figura da secção E_2, F_2, G_2 e H_2 (Fig. 14).

Como pode observar no desenho, a figura da secção é geometricamente igual às bases do sólido, pois o plano secante é paralelo aos planos das bases.

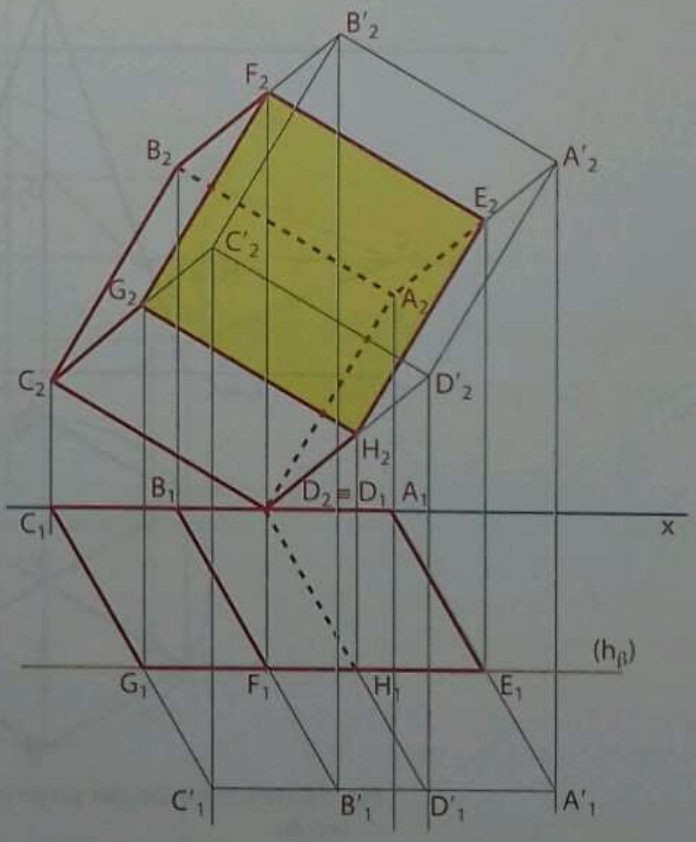


Fig. 14 Secção produzida num prisma por um plano de frente.

Secções planas produzidas em pirâmides por planos de topo

Todas as figuras planas contidas em planos de topo não apresentam a sua verdadeira grandeza em nenhuma das projecções, pelo que, para obtermos a sua verdadeira grandeza, é necessário recorrer-se aos métodos geométricos auxiliares.

Assim, as secções planas que serão produzidas, por planos de topo em pirâmides, deverão ser rebatidas ou recorrer-se-á a um outro processo geométrico auxiliar para se determinar a sua verdadeira grandeza.

Seja **dada uma pirâmide hexagonal regular, assente pela base em v_0 com duas arestas da base de topo. Determinemos a figura da secção e a verdadeira grandeza da figura da secção nela produzida por um plano de topo que faz 45° com v_0, de abertura para a direita e que contém o ponto médio do eixo da pirâmide.**

Esta pirâmide tem duas arestas da base, de topo, e, consequentemente, as faces que as contêm também são de topo. Duas arestas laterais da pirâmide são de perfil, o que implica que a determinação das projecções horizontais dos pontos da secção nelas contidos não é directa.

Assim, após a representação do sólido e do plano secante, determinam-se directamente as projecções frontais e horizontais dos pontos da secção contidos nas faces de topo **H**, **I**, **K** e **L** (Fig. 15).

As projecções frontais dos pontos **G** e **J** contidos, em arestas de perfil, também são directas G_2 e J_2. No entanto, as projecções horizontais desses pontos carecem do desenvolvimento de mais alguns passos. Um dos passos seria o rebatimento do plano de perfil, mas podemos usar um outro processo geométrico auxiliar, neste caso mudança de plano.

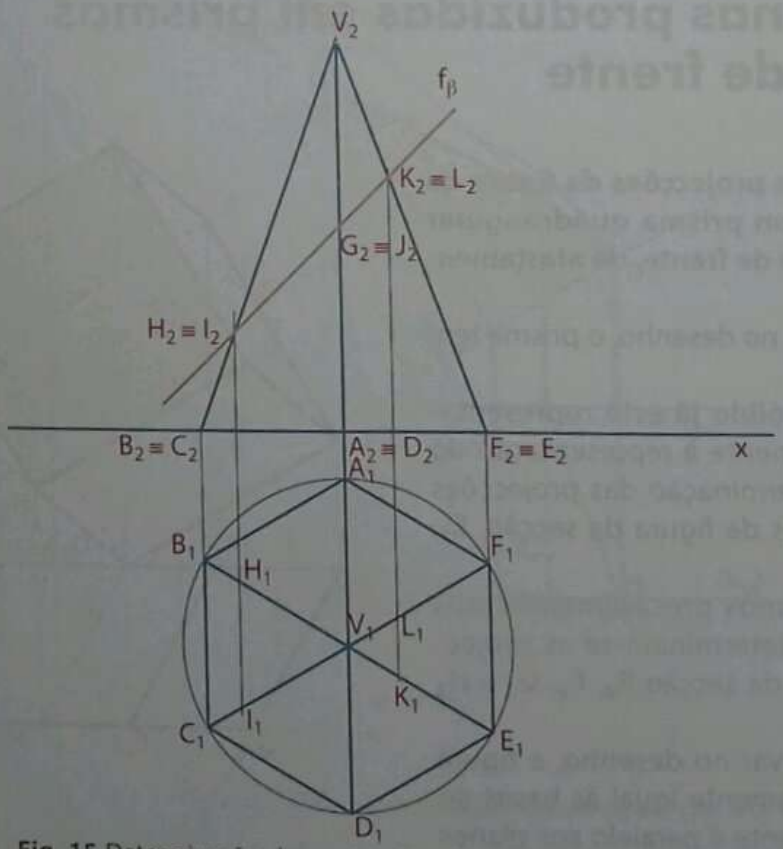


Fig. 15 Determinação das projecções de quatro pontos da figura da secção

Através da mudança do plano frontal de projecção, traça-se um novo eixo x, x', perpendicular ao eixo x. Determinam-se as projecções frontais dos pontos A, D e V, no novo plano frontal de projecção, nomeadamente A_4, D_4 e V_4 e unem-se. Sobre $[A_4\ V_4]$ e $[V_4\ D_4]$, marcam-se as cotas dos pontos G e J, e designam-se G_4 e J_4, projecções frontais dos pontos G e J no novo plano frontal de projecção. Daí, determinam-se as suas projecções horizontais, G_1 e J_1, cuja união com as projecções horizontais dos outros pontos, H_1, I_1, L_1 e K_1, origina a projecção horizontal da figura da secção.

Conforme se pode observar e segundo o que já se sabe, a figura da secção não se apresenta em verdadeira grandeza em nenhuma das projecções. Sendo assim, e conforme o pedido do nosso exercício, é necessário determinar a sua verdadeira grandeza.

Para o efeito, efectuamos o rebatimento do plano que contém a secção, neste caso sobre o plano frontal de projecção, $[I_r\ H_r\ G_r\ L_r\ K_r\ L_r]$.

Por último, distinguem-se os traços do desenho sem se esquecer que, porque a figura da secção é visível em projecção horizontal, essa projecção deverá ser colorida (tracejada) (Fig. 16).

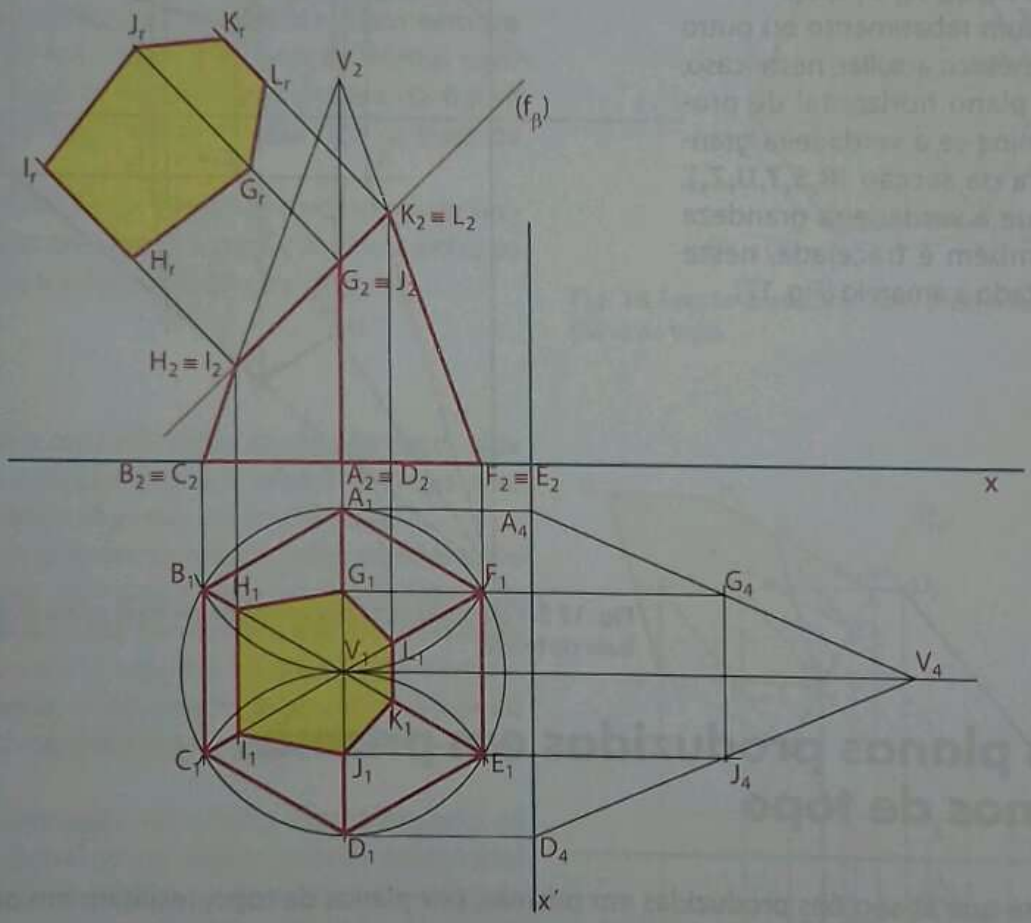


Fig. 16 Secção numa pirâmide e sua verdadeira grandeza

Para um maior aprofundamento de secções produzidas em pirâmides por planos projectantes frontais, vamos **determinar a figura da secção e a verdadeira grandeza da figura da secção produzida numa pirâmide pentagonal oblíqua, cuja aresta da base mais à direita é vertical. O plano secante é de topo e faz 45° com v_0, de abertura para a direita.**

A determinação da figura da secção é directa, começando pela sua projecção frontal, R_2, S_2, T_2, U_2 e Z_2 e seguidamente, a sua respectiva projecção horizontal R_1, S_1, T_1, U_1 e Z_1.

Através dum rebatimento ou outro processo geométrico auxiliar, neste caso, mudança do plano horizontal de projecção, determina-se a verdadeira grandeza da figura da secção $[R_rS_rT_rU_rZ_r]$. Recorde-se que a verdadeira grandeza da secção também é tracejada, neste caso representado a amarelo (Fig. 17).

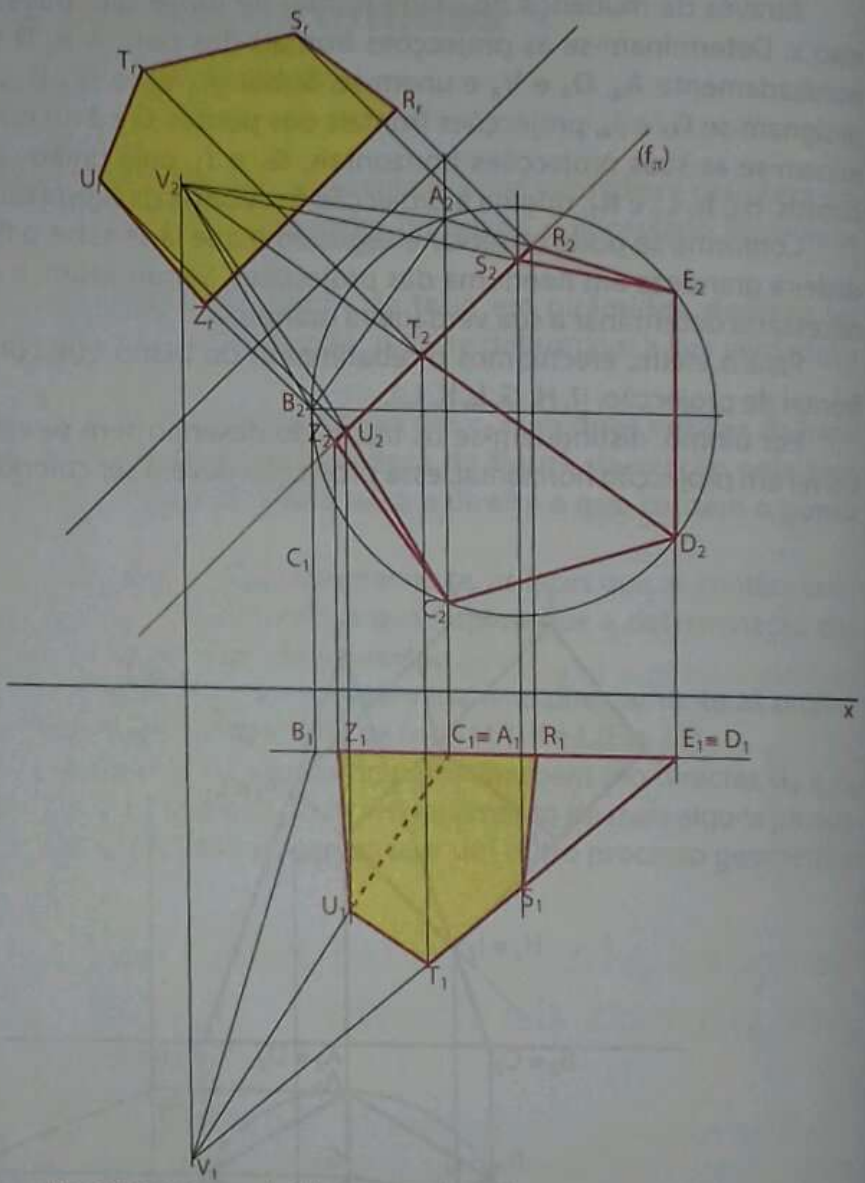


Fig. 17 Secção produzida por um plano de topo numa pirâmide de base de frente.

Secções planas produzidas em prismas por planos de topo

Recorde-se que as secções produzidas em prismas, por planos de topo, resultam em polígonos que tanto podem ser regulares ou não.

Passemos a questões práticas, que são a característica desta disciplina, **determinando a secção produzida num prisma hexagonal regular por um plano π, de topo. As bases do prisma estão assentes em planos horizontais.**

O plano secante não é paralelo aos planos das bases, de onde se pode concluir que a figura da secção não é geometricamente igual às bases e, pelas características do polígono, essa figura da secção não pode ser um polígono regular.

As projecções frontais dos pontos da figura da secção, G_2, H_2, I_2, J_2, L_2 e M_2 tratando de um plano secante projectante frontal, situam-se logicamente sobre o traço frontal desse plano.

Tendo em conta que as arestas laterais do prisma são projectantes horizontais, as projecções horizontais dos vértices da figura da secção G_1, H_1, I_1, J_1, L_1 e M_1 serão coincidentes com as projecções horizontais dos vértices do prisma. Portanto, a projecção horizontal do prisma é coincidente com a projecção horizontal da figura de secção.

Neste exercício, para a determinação da verdadeira grandeza, foi efectuado o rebatimento do plano secante sobre o plano frontal de projecção (Fig. 18) e podemos mais uma vez verificar que, figuras com uma projecção coincidente, nem sempre são iguais. Para este caso, a projecção frontal consubstanciada com a verdadeira grandeza da figura da secção mostram claramente que não se trata de figuras iguais.

A determinação da verdadeira grandeza da secção é que mostrará claramente a diferença entre as bases do sólido e a figura da secção (Fig. 18).

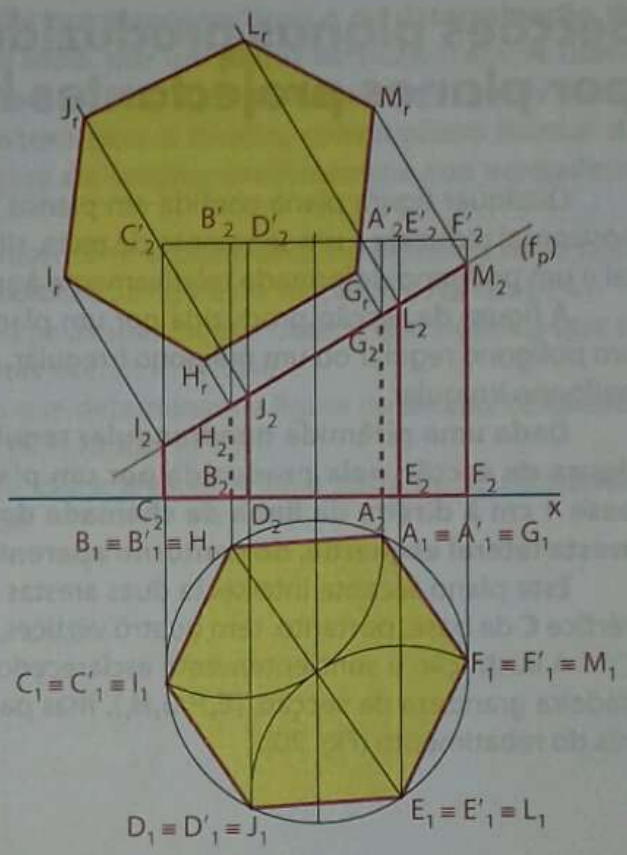


Fig. 18 Secção produzida num prisma hexagonal por um plano de topo.

Segue-se a determinação da secção produzida num prisma oblíquo, por um plano de topo que intersecta a base e algumas arestas laterais.

Dado um prisma quadrangular oblíquo, de bases de nível, determinemos as projecções da figura de secção nele produzida por um plano de topo que faz com ν_0 um diedro de 60°, de abertura para a direita, e intersecta o plano da base de maior cota, 2 cm à direita da linha de chamada do seu centro.

A representação do plano, considerando os dados, é do seu domínio, assim como é determinar as projecções frontais dos pontos de intersecção do plano secante com as arestas do sólido E_2, F_2, G_2, H_2 e I_2.

As projecções horizontais desses pontos de intersecção do plano, de topo, com as arestas do prisma E_1, F_1, G_1, H_1 e I_2 encontram-se, obviamente, sobre as projecções horizontais das respectivas arestas. A determinação da verdadeira grandeza, $[E,F_r,G,H,I_r]$ da figura da secção, foi feita através do rebatimento do plano de topo sobre um plano paralelo ao plano frontal de projecção (Fig. 19).

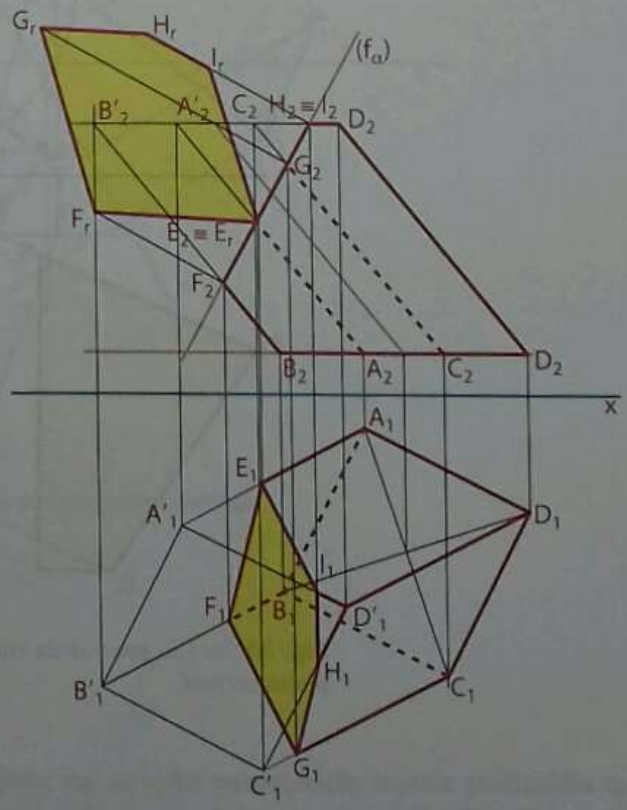


Fig. 19 Secção produzida por um plano de topo, num prisma quadrangular oblíquo.

Secções planas produzidas em pirâmides por planos projectantes horizontais

Qualquer figura plana contida em planos verticais ou projectantes horizontais tem a sua projecção horizontal reduzida a um segmento de recta, situado no traço horizontal do plano, e a sua projecção frontal é um polígono deformado relativamente à sua forma real.

A figura da secção produzida por um plano projectante horizontal, paralelo ao plano da base, será um polígono regular ou um polígono irregular, se a base for respectivamente um polígono regular ou um polígono irregular.

Dada uma pirâmide quadrangular regular, de base de frente, determinemos as projecções da figura de secção nela produzida por um plano projectante horizontal, que intersecta o plano da base 1 cm à direita da linha de chamada do extremo mais à esquerda da pirâmide e é paralelo à aresta lateral esquerda, do contorno aparente horizontal da pirâmide.

Este plano secante intersecta duas arestas laterais **[AV]** e **[DV]**, uma aresta da base, **[AB]** e contém o vértice **C** da base, portanto, tem quatro vértices, logo é um quadrilátero, **[EFGH]**.

A ilustração é suficientemente esclarecedora. Neste exercício não se solicita a determinação da verdadeira grandeza da secção, $[E_rF_rG_rH_r]$, mas para que se complete a resolução ela foi determinada através do rebatimento (Fig. 20).

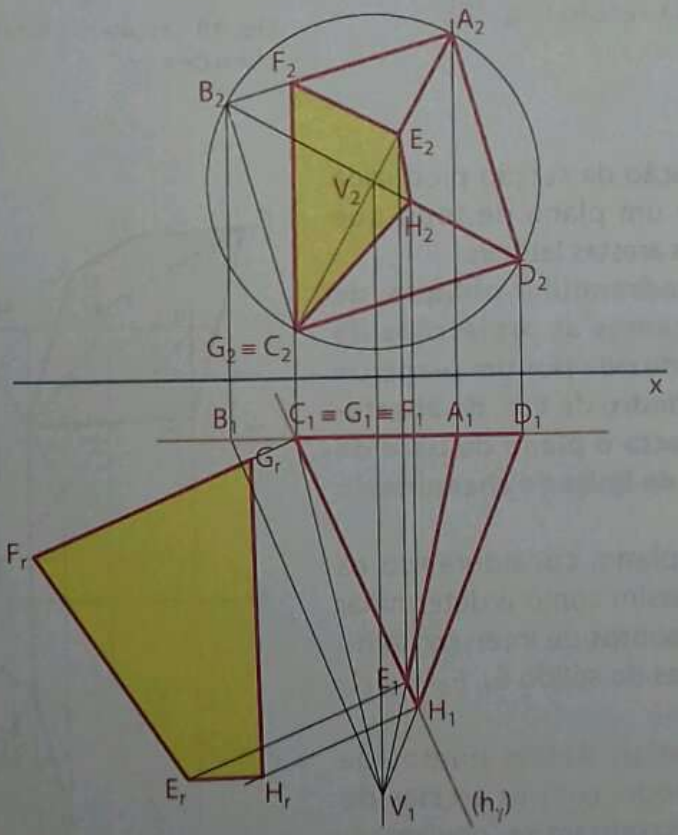


Fig. 20 Secção produzida numa pirâmide quadrangular por um plano vertical.

Um outro exemplo sobre secções planas em pirâmides por planos verticais é da **determinação da figura de secção produzida numa pirâmide de base, de topo, por um plano vertical. Trata-se duma pirâmide hexagonal regular, cujo plano secante intersecta o eixo x no mesmo ponto que o plano da base da pirâmide, e faz um ângulo de 60º, de abertura para a direita, com o plano frontal de projecção. Após a determinação das projecções da figura da secção, verificamos a sua verdadeira grandeza.**

Uma vez conhecidas as projecções da pirâmide, representa-se o plano secante pelo seu traço horizontal h_β, e determinam-se as projecções horizontais dos vértices da figura da secção, G_1, H_1, I_1, J_1 e L_1.

Como se pode ver, o plano secante intersecta o sólido pelas suas faces e base, o que significa que as projecções dos pontos da secção encontrar-se-ão nas arestas laterais e da base.

Uma vez conhecidos em ambos os planos, os pontos que determinam a figura da secção, resta apenas uni-los e determinar a verdadeira grandeza da secção, [$G_rH_rI_rJ_rL_r$] Fig. 21.

Note que a projecção frontal da figura da secção não está a amarelo e uma parte do seu contorno está a traço médio interrompido devido à sua invisibilidade.

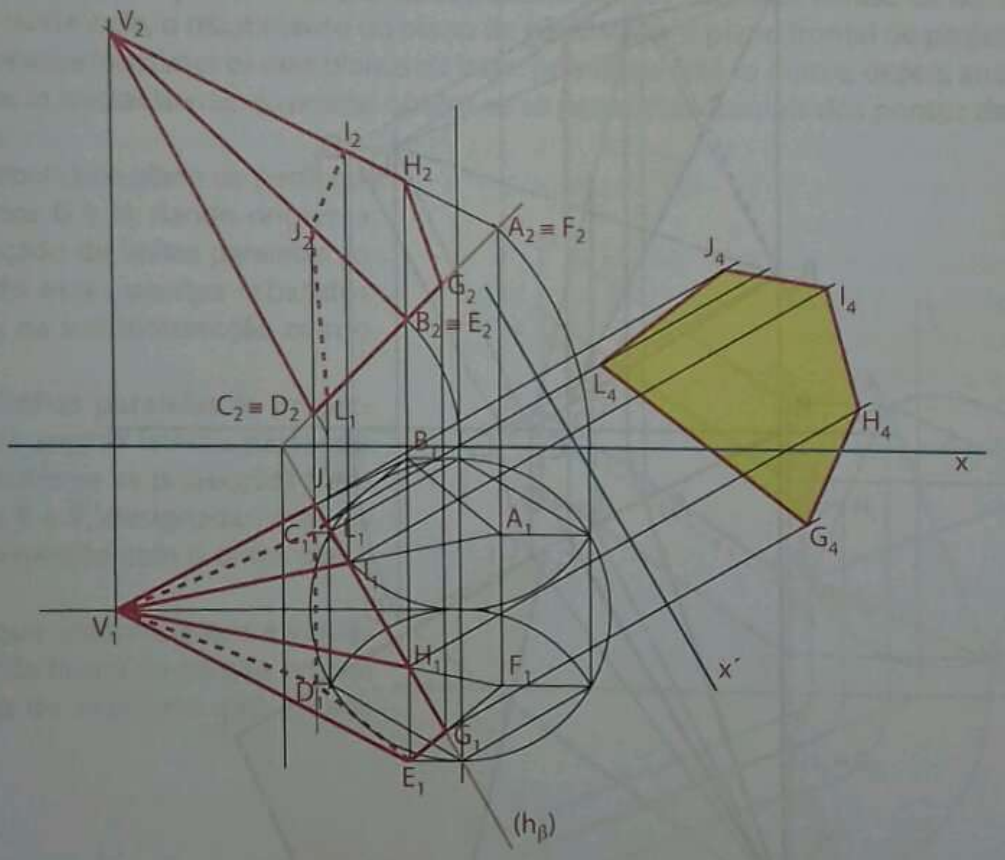


Fig. 21 Secção produzida numa pirâmide por um plano vertical.

Um outro exemplo, é o da **determinação da figura de secção produzida numa pirâmide quadrangular oblíqua, de base vertical, produzida por um plano também vertical. O plano secante π faz com o plano frontal de projecção um ângulo de 75º e contém o vértice da pirâmide.**

Dado o facto de o plano secante conter o vértice da pirâmide, a figura da secção é um triângulo. Podemos portanto concluir que qualquer secção produzida numa pirâmide por um plano que contém o seu vértice é um triângulo (se o plano intersectar a base).

A determinação dos pontos de intersecção do plano secante π com a pirâmide resulta, em primeiro lugar, da consideração do vértice do sólido como sendo o primeiro ponto cujas projecções já estão assinaladas e, seguidamente, tem-se em conta a intersecção do traço horizontal do plano secante com a projecção horizontal da base do sólido.

As projecções horizontais dos pontos da figura, da secção, E_1 e G_1, ficam reduzidas a um ponto, $E_1 \equiv G_1$, porque os dois pontos encontram-se na mesma projectante horizontal, aliás, esta projectante coincide com a linha de intersecção de dois planos verticais, nomeadamente, o plano da base e o plano secante. Seguidamente, determinam-se as projecções frontais dos pontos **E** e **G**, da base, unem-se entre eles e ao ponto **F** e, finalmente, determina-se a verdadeira grandeza da figura da secção, $[E_rF_rG_r]$ que neste caso foi possível através dum rebatimento do plano vertical sobre o plano horizontal de projecção (Fig. 22).

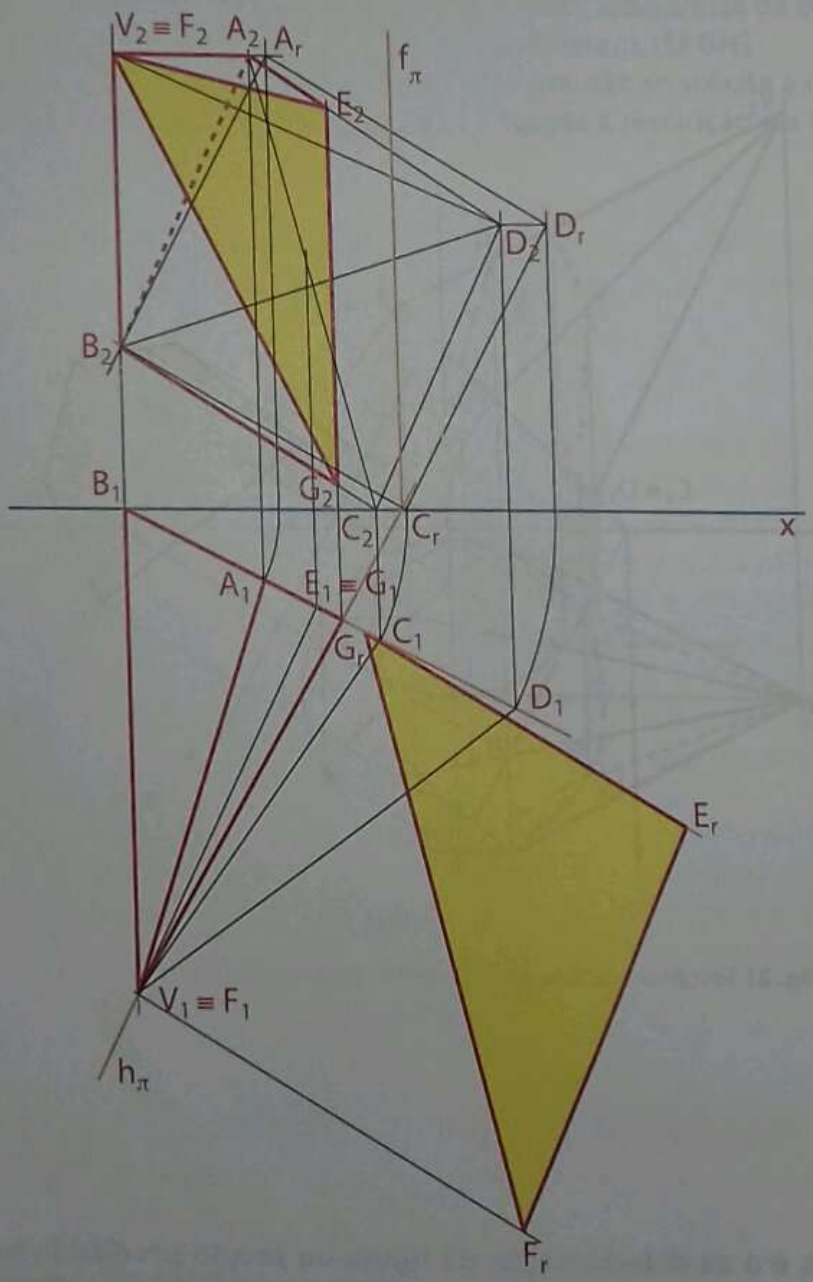


Fig. 22 Secção produzida numa pirâmide quadrangular por um plano vertical.

Secções planas produzidas em prismas por planos verticais

O primeiro exemplo que iremos tratar, é da **determinação da figura de secção produzida num prisma quadrangular oblíquo, de bases de perfil, produzida por um plano projectante horizontal. O plano secante α é paralelo às arestas laterais do prisma e intersecta o eixo x, 3 cm à direita do plano da base situada à direita da outra.**

Um plano secante que é paralelo às arestas laterais dum prisma não as intersecta (as arestas laterais), só intersecta as arestas da base, onde se encontram os pontos que definem os vértices da figura da secção.

Assim sendo, porque o prisma tem duas bases, a figura da secção será um quadrilátero. Portanto, podemos concluir que a figura da secção produzida num prisma, por um plano paralelo às suas arestas laterais, é invariavelmente um quadrilátero.

Na resolução deste exercício, inicia-se por assinalar as projecções horizontais dos quatro pontos da secção E_1, F_1, G_1 e H_1, que, naturalmente, são coincidentes dois a dois, $E_1 \equiv F_1$ e $G_1 \equiv H_1$.

A determinação das projecções frontais desses quatro pontos necessita do uso de um processo geométrico auxiliar, neste caso, o rebatimento do plano de perfil sobre o plano frontal de projecção.

Não será necessário rebater os dois planos da base, pois basta fazê-lo num e, depois, através do traçado de linhas paralelas às arestas laterais do prisma, obtêm-se as projecções frontais dos pontos da secção situados noutra base.

Assim foi rebatido o plano de perfil que contém os pontos G e H, dando origem a H_r e G_r cujo traçado de linhas paralelas ao eixo x contendo esses pontos rebatidos origina G_2 e H_2 na sua intersecção com o plano de perfil.

Traçando linhas paralelas às projecções frontais das arestas laterais passando por G_2 e H_2, obtém-se as projecções frontais dos pontos E e F, designadamente E_2 e F_2, na sua intersecção com o outro plano da base.

Convém que determinemos a verdadeira grandeza da figura da secção, embora o enunciado do exercício não o exija (Fig. 23).

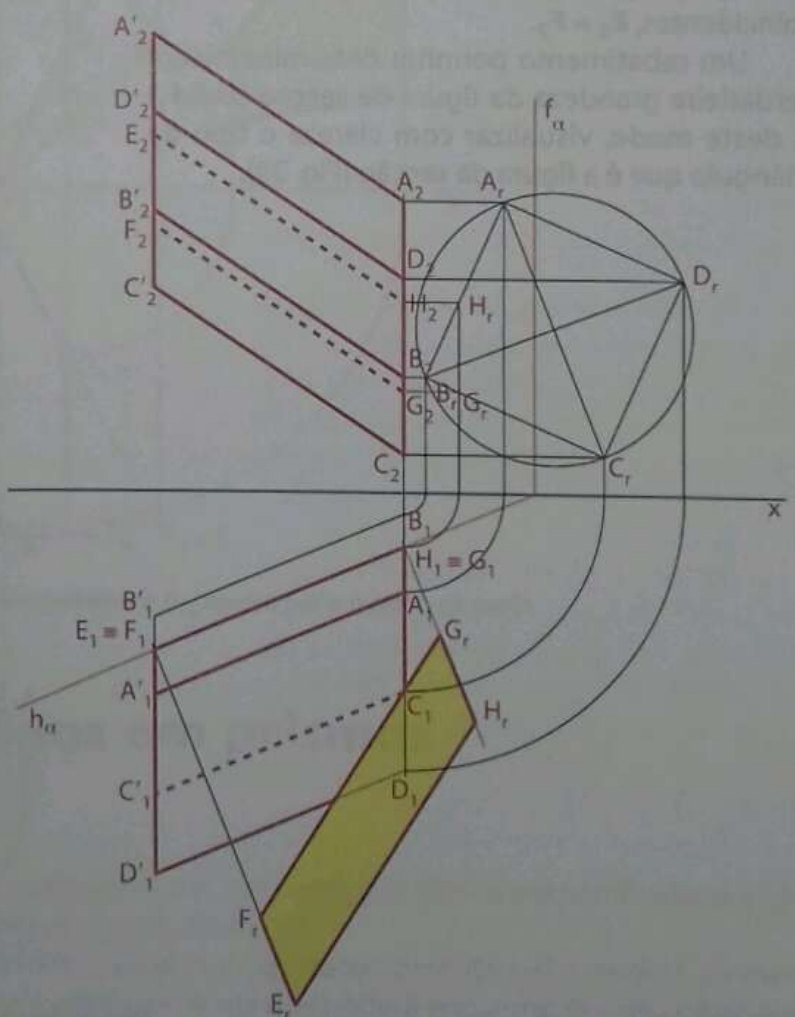


Fig. 23 Secção produzida num prisma quadrangular por um plano vertical.

Secções planas produzidas por planos de perfil em pirâmides

Para um conhecimento claro das características duma figura plana, que esteja contida num plano de perfil, é necessário determinar a sua verdadeira grandeza, que só é possível com o recurso aos processos geométricos auxiliares.

As projecções da figura da secção produzida num sólido, por um plano de perfil, ficam reduzidas a dois segmentos de recta: um, correspondente à projecção frontal, e outro correspondente à projecção horizontal.

Dum modo geral, a determinação da figura da secção produzida num sólido por um plano de perfil é directa, dispensando deste modo o traçado de muitas linhas auxiliares, aliás, todas as linhas de chamada das figuras contidas em planos de perfil são coincidentes com os traços do plano.

Passemos a alguns exemplos de determinação de secções produzidas em pirâmides por planos de perfil. Sobre esse assunto, no que respeita a pirâmides, iremos dar apenas dois exemplos, na base dos quais poderão ser resolvidos vários outros exercícios de secções planas em pirâmides, por planos de perfil.

Dada uma pirâmide triangular regular, de base de nível, determinemos a figura de secção produzida por um plano de perfil, que contém o seu vértice.

Já se sabe que um plano secante, que contém o vértice duma pirâmide, origina um triângulo, portanto, a figura da secção que se obterá neste exercício, é um triângulo.

Segue-se a designação dos três pontos da secção em ambas as projecções nomeadamente D_2, E_2 e F_2 em projecção frontal e D_1, E_1 e F_1 em projecção horizontal. Na projecção frontal, os pontos da base são coincidentes, $E_2 \equiv F_2$.

Um rebatimento permitiu determinarmos a verdadeira grandeza da figura da secção $[D_rE_rF_r]$ e, deste modo, visualizar com clareza o tipo de triângulo que é a figura da secção (Fig. 24).

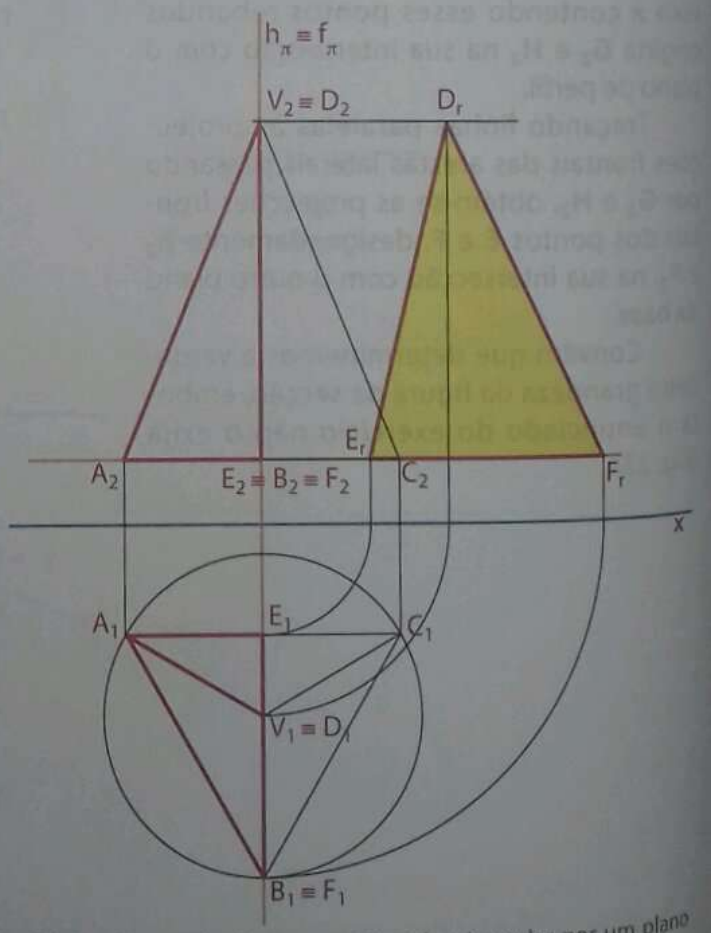


Fig. 24 Secção produzida numa pirâmide triangular por um plano de perfil.

O segundo exemplo, é da **determinação da figura da secção produzida, por um plano de perfil, numa pirâmide hexagonal oblíqua, cujo vértice tem cota nula. O plano secante intersecta o eixo x, num ponto situado 1 cm à direita da linha de chamada do centro da base da pirâmide. Determinemos, também, a verdadeira grandeza da figura da secção.**

Os passos a seguir para a determinação da figura da secção, produzida nesta pirâmide, são exactamente os mesmos que os do exemplo anterior.

Dado o sólido, representa-se pelos seus traços o plano secante $h_\pi \equiv f_\pi$ começa-se por assinalar os pontos que definem a secção numa das projecções, neste caso projecção frontal, G_2, H_2, I_2 e J_2 e, posteriormente, na projecção horizontal do sólido G_1, H_1, I_1 e J_1.

A determinação da verdadeira grandeza da figura, da secção, pode ser facilmente efectuada na base dum rebatimento do plano secante sobre o plano frontal ou horizontal de projecção.

No caso das projecções da secção de perfil, não é possível representar o tracejado ou colorir porque as mesmas ficam reduzidas a dois segmentos de recta. Somente a verdadeira grandeza da figura da secção, $[G_rH_rI_rJ_r]$ é colorida ou tracejada no caso do desenho sem cores (Fig. 25).

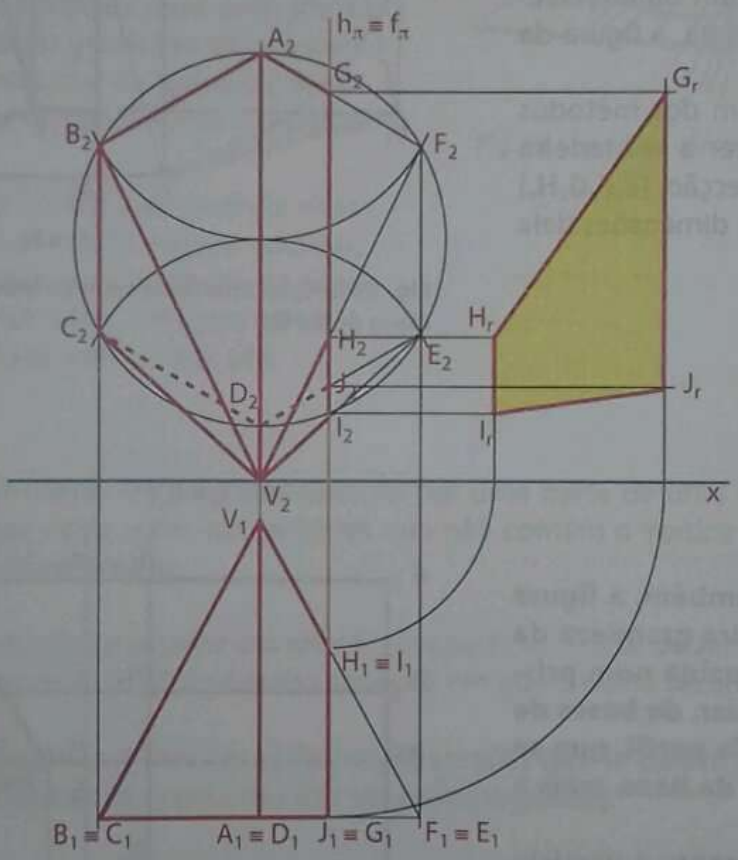


Fig. 25 Secção produzida numa pirâmide hexagonal por um plano de perfil.

Secções planas produzidas em prismas por planos de perfil

Para finalizar o estudo de secções planas produzidas, em poliedros, por planos perpendiculares a um ou a ambos os planos de projecção, serão dados mais dois exemplos.

Até esta fase, os conhecimentos desenvolvidos sobre secções planas permitem-lhe resolver os exercícios propostos sobre esta matéria, bem como outros exercícios que poderá encontrar noutras bibliografias ou elaborados pelo professor.

De seguida iremos **determinar a figura da secção produzida num prisma quadrangular oblíquo, de bases de nível, por um plano de perfil que contém o vértice mais à direita da base de menor cota do prisma.**

Dado o prisma, representa-se o plano secante pelos seus traços $f_\pi \equiv h_\pi$ e assinalam-se os pontos de intersecção entre o plano secante e as arestas do prisma, nomeadamente as suas projecções frontais, E_2, F_2, G_2 e H_2, e as suas respectivas projecções horizontais, E_1, F_1, G_1 e H_1. Esses pontos são os vértices do polígono, que resultam da intersecção do plano com o prisma, a figura da secção.

O rebatimento é um dos métodos que permitir-nos-á obter a verdadeira grandeza da figura da secção, **[$E_rF_rG_rH_r$]** e ter uma ideia clara das dimensões dela (Fig. 26).

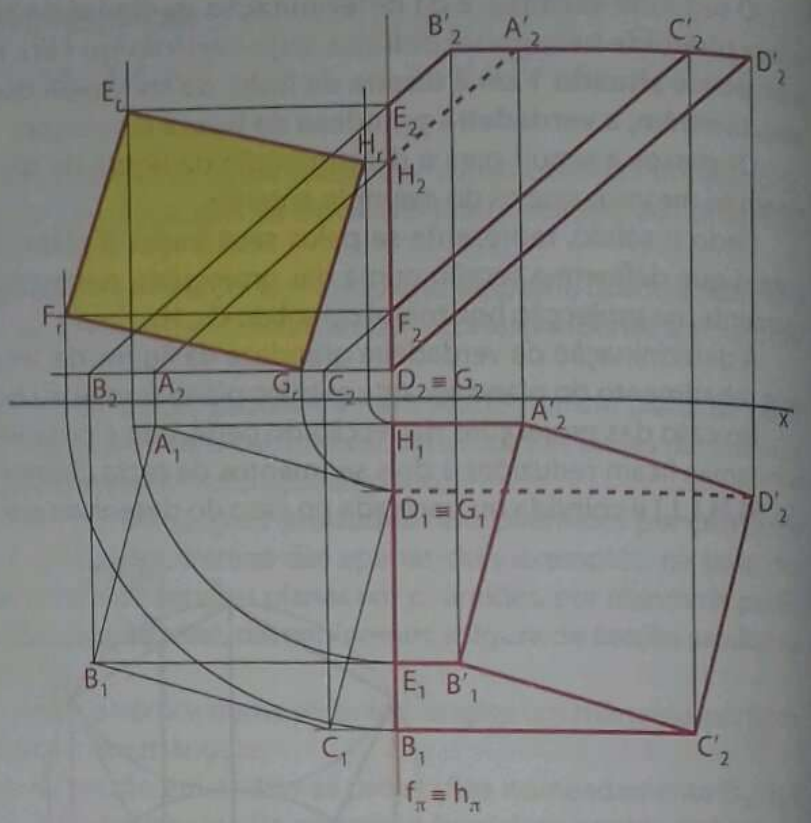


Fig. 26 Secção produzida num prisma de bases de nível por um plano de perfil.

Determinemos, também, a figura da secção e a verdadeira grandeza da figura da secção produzida num prisma quadrangular regular, de bases de perfil, por um plano de perfil, que se situa 1 cm à esquerda da base, mais à direita do prisma.

Porque o plano secante é paralelo aos planos das bases, como já é do nosso domínio, a figura da secção é um polígono igual às bases. Como as bases são polígonos regulares, evidentemente que a figura da secção também é um polígono regular **[EFGH]**.

Os passos a serem dados são exactamente os mesmos que acabámos de apresentar no exemplo anterior. Observe a figura 27.

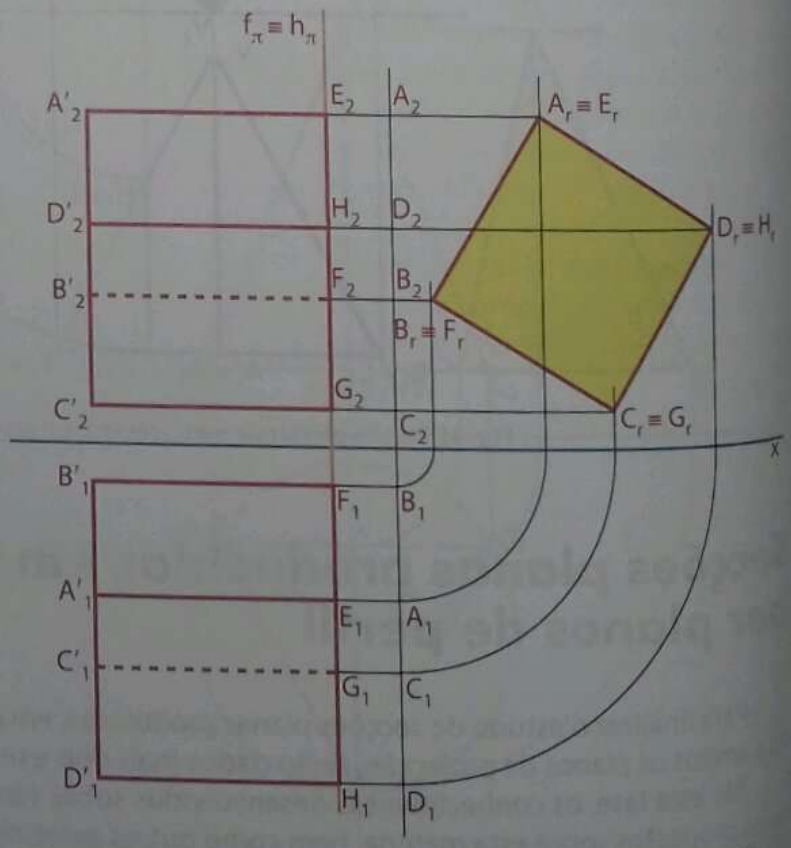


Fig. 27 Secção produzida num prisma de bases de perfil por um plano de perfil.

Diferentes tipos de secções cónicas

As secções produzidas por planos, em superfícies cónicas, são conhecidas por **secções cónicas** que originam diferentes tipos de figuras planas. As curvas, resultantes das secções cónicas, denominam-se **cónicas**.

Recordemos alguns conceitos:

- **Geratriz** de uma superfície cónica é a linha cujo movimento gera a superfície cónica.
- **Directriz** é uma linha que indica a direcção das geratrizes, no caso dos cones é a circunferência que determina a sua base.
- **Superfície cónica** é aquela cuja directriz é uma linha curva e cujas geratrizes são concorrentes num ponto exterior ao plano da directriz e situado a uma distância finita, o **vértice da superfície**.

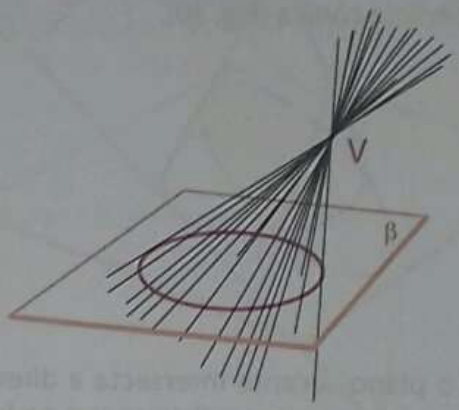


Fig. 28 Superficie cónica e sua directriz

Portanto, a superfície cónica compreende duas partes, **duas folhas**, que têm um vértice comum, sendo uma folha correspondente à parte que se situa dum lado do vértice, e outra folha, correspondente à parte situada do outro lado do vértice (Fig. 28).

Assim, um **cone** é um corpo limitado lateralmente por uma parte de uma folha, de uma superfície cónica, e por um plano que corta todas as geratrizes que não contêm o vértice da superfície e limitado pela directriz, que é uma circunferência.

Conforme a posição do plano secante em relação à superfície cónica, podemos obter vários tipos de curvas cónicas. As curvas cónicas obtêm-se numa situação em que o plano secante não contém o vértice da superfície cónica.

Se o **plano secante contém o vértice**, as figuras de secções que se obtêm podem ser **ponto, recta ou triângulo**. Poderão acontecer cada uma das três situações seguintes:

1. A secção produzida numa superfície cónica é um **ponto** se o plano secante corta todas as geratrizes e não intersecta a directriz (Fig. 29).

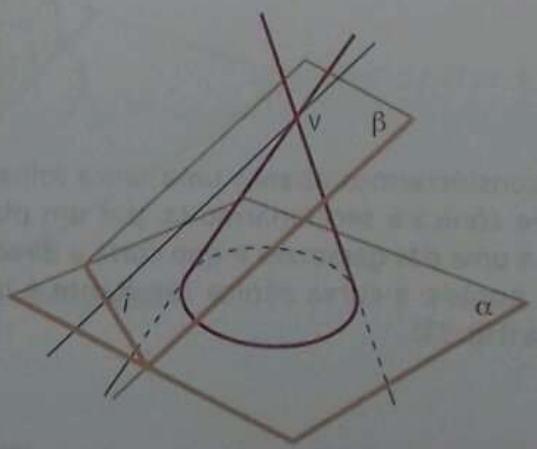


Fig. 29 A secção é um ponto.

2. A secção produzida numa superfície cónica é uma **recta**, se o plano secante intersecta a directriz num único ponto e é tangente à superfície cónica (Fig. 30).

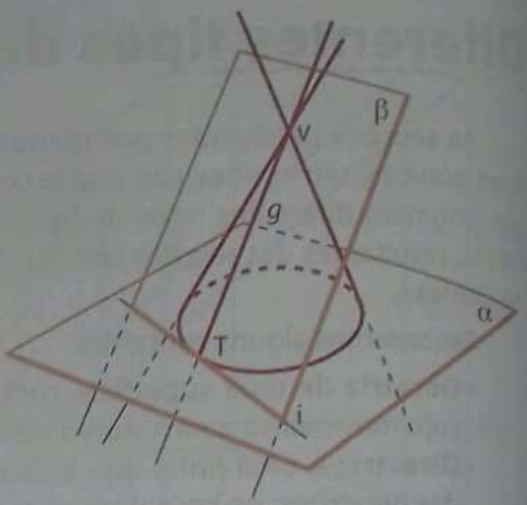


Fig. 30 A Secção é uma recta.

3. Se o plano secante intersecta a directriz em dois pontos e a superfície cónica ao longo de duas geratrizes, a secção resultante são **dois triângulos** com um vértice comum. Se considerarmos apenas uma folha da superfície cónica, a secção será apenas **um triângulo** (Fig. 31).

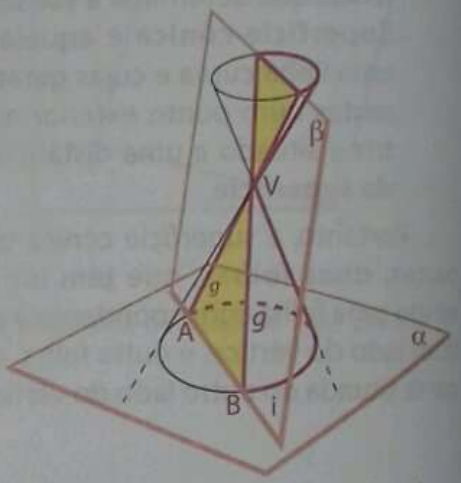


Fig. 31 As figuras da secção são dois triângulos.

Seguem-se as figuras das secções em superfícies cónicas, produzidas por planos secantes que não contêm o vértice da superfície cónica.

Comecemos por citar a curva cónica mais simples, que é uma circunferência. A **circunferência** resulta dum plano paralelo ao plano da directriz que corta todas as geratrizes da superfície cónicas (Fig. 32). Portanto, a directriz e a figura da secção, neste caso, são semelhantes.

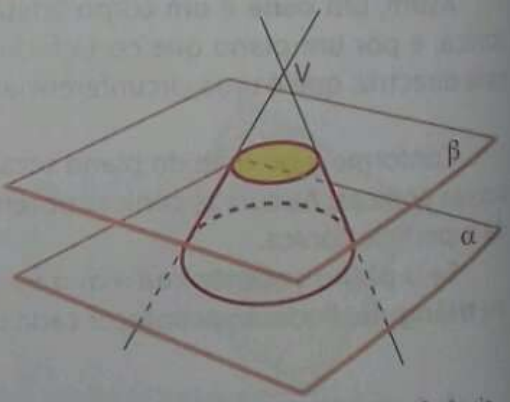


Fig. 32 A figura da secção é uma circunferência.

Se considerarmos apenas uma única folha da superfície cónica e seccionarmo-la, por um plano paralelo a uma das geratrizes e que corta a directriz em dois pontos, a curva cónica resultante é uma **parábola** (Fig. 33).

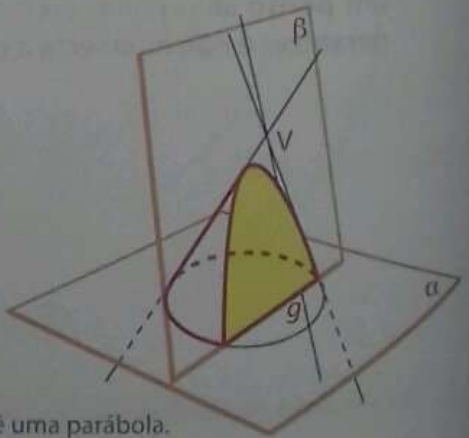


Fig. 33 A figura da secção é uma parábola.

Se o plano secante corta todas as geratrizes da superfície cónica e não é paralelo à directriz, a figura da secção resultante chama-se **elipse** (Fig. 34). Num cone, a figura da secção pode ser um **segmento de elipse**, se o plano secante intersecta a directriz e não é paralelo a nenhuma das geratrizes (Fig. 35).

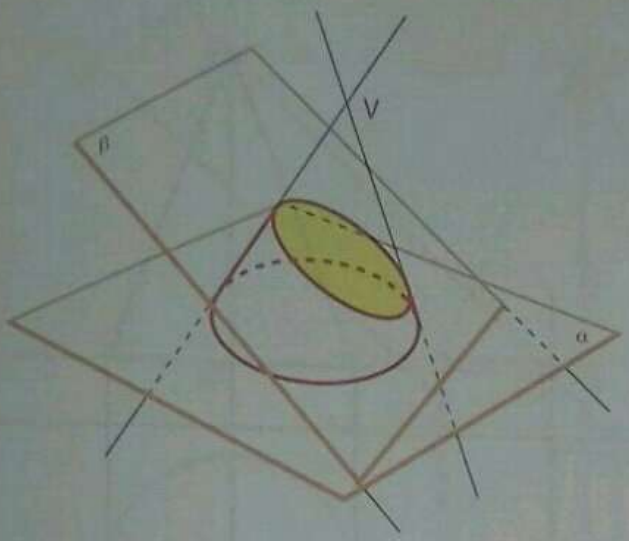


Fig. 34 A figura da secção é uma elipse.

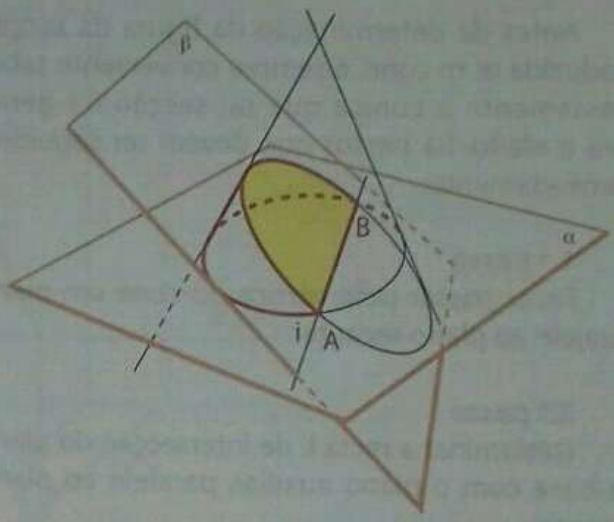


Fig. 35 A figura da secção é um seguimento de elipse.

Se a figura da secção cónica é uma **hipérbole**, é porque o plano secante é paralelo a duas geratrizes da superfície cónica. Se considerarmos apenas uma folha da superfície cónica, a secção resultante é um **ramo da hipérbole** (Fig. 36).

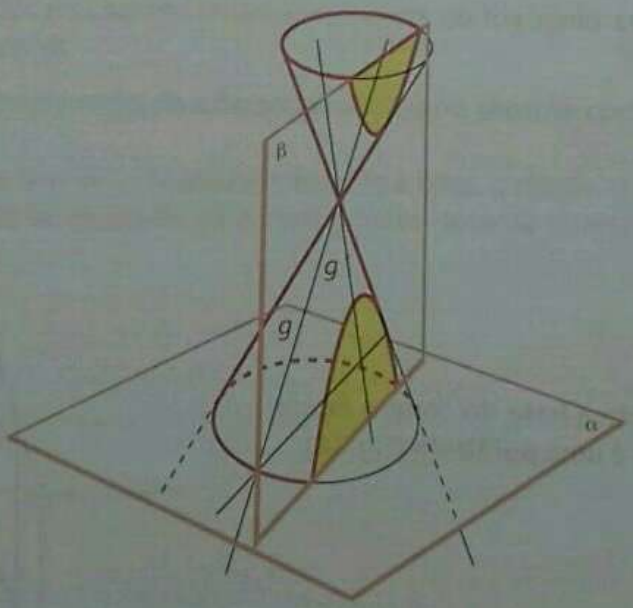


Fig. 36 A figura da secção é uma hipérbole.

Processo para o reconhecimento do tipo da secção produzida num cone

Antes da determinação da figura da secção produzida num cone, é sempre conveniente saber previamente a cónica que tal secção irá gerar. Para o efeito, há passos que devem ser seguidos, nomeadamente:

1.º passo

Fazer passar pelo vértice do cone um plano paralelo ao plano secante.

2.º passo

Determinar a recta i, de intersecção do plano da base com o plano auxiliar, paralelo ao plano secante.

3.º passo

Analisar as três hipóteses possíveis da relação da recta i com a base do cone, nomeadamente:

- Se a recta i for exterior à base do cone, a figura da secção é uma **elipse** (Fig. 37).

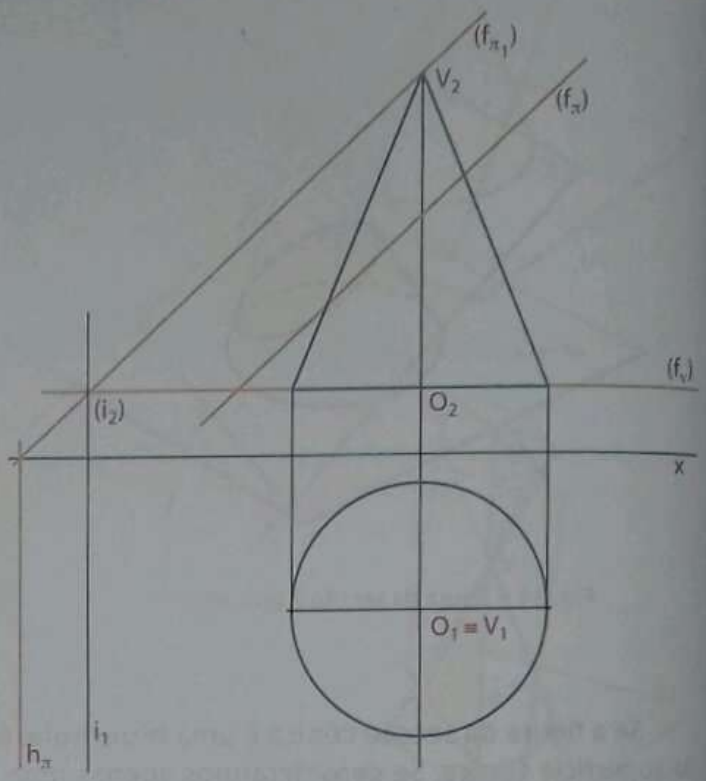


Fig. 37 Secção elíptica

- Se a recta i é tangente à base do cone, a figura da secção resultante é uma **parábola** (Fig. 18).

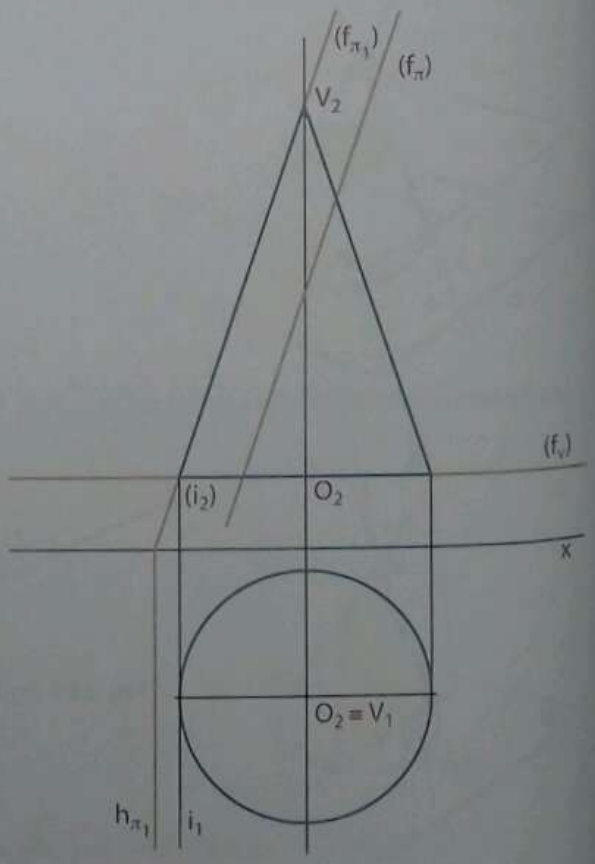


Fig. 38 Secção parabólica

- A figura da secção será uma **hipérbole** ou **ramo duma hipérbole**, se a recta de intersecção do plano da base com o plano auxiliar intersectar a base do cone (Fig. 39).

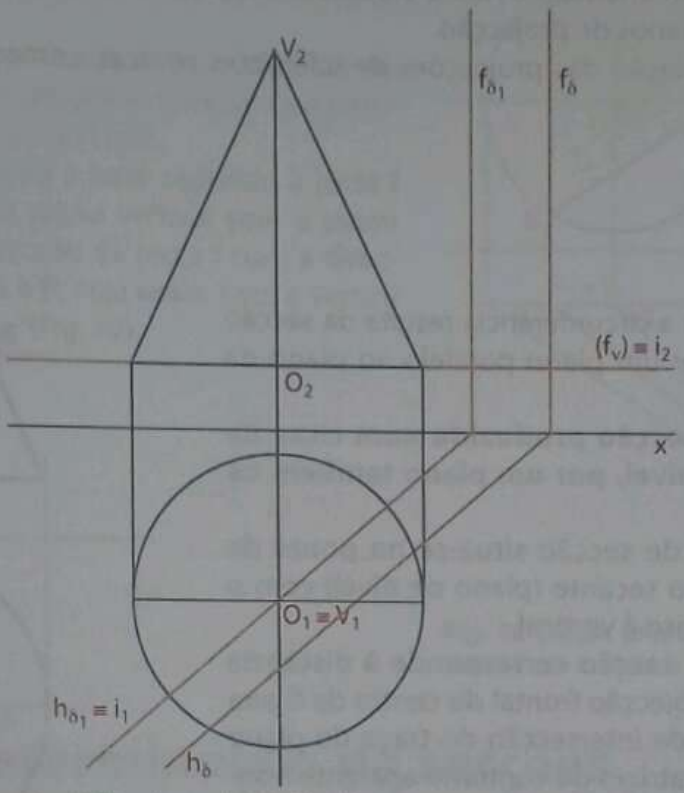


Fig. 39 Secção hiperbólica (ramo de hipérbole)

Caso o plano secante contenha o vértice, bastará apenas determinar a recta de intersecção deste com o plano da base. As secções resultantes serão ponto, recta ou triângulo, conforme a relação da recta de intersecção com a base do cone.

- A secção será um **ponto** se a recta de intersecção do plano secante com o plano da base for exterior à base.
- Se a recta de intersecção dos dois planos for tangente à base, a secção resultante é uma **recta**.
- Se a recta de intersecção do plano da base com o plano secante intersectar a base, a secção é um **triângulo**.

Determinação de secções circulares e triangulares em cones

Como é do seu conhecimento, no nosso estudo de secções iremos usar apenas planos perpendiculares a um ou a ambos os planos de projecção.

Segue-se a determinação das projecções de diferentes cónicas, começando com a circunferência, que é a cónica mais fácil.

Circunferência

Numa secção cónica a circunferência resulta da secção produzida num cone por um plano paralelo ao plano da base.

Determinemos a secção produzida num cone de revolução de base de nível, por um plano também de nível.

O centro da figura de secção situa-se no ponto de intersecção entre o plano secante (plano de nível) com o eixo do cone, que neste caso é vertical.

O raio da figura da secção corresponde à distância compreendida entre a projecção frontal do centro da figura da secção com o ponto de intersecção do traço do plano secante com uma das geratrizes do contorno aparente frontal do cone, $[O'_2B_2]$ ou $[O'_2A_2]$ (Fig. 40).

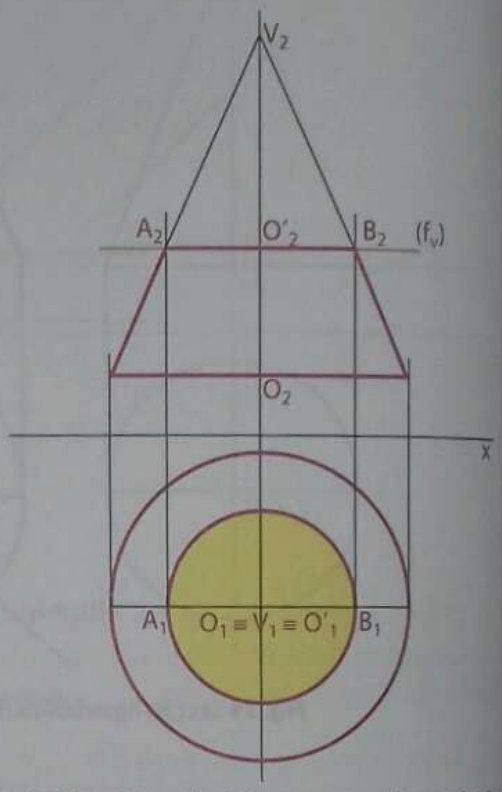


Fig. 40 Secção produzida num cone de revolução de base de nível por um plano de nível.

Se o cone for oblíquo, a forma de determinação da secção é semelhante. Para variar, vamos **determinar a secção produzida num cone de base de frente por um plano de frente.**

Tendo em conta que o plano secante é paralelo ao plano da base, sabe-se logo que a figura da secção é semelhante à base do cone, uma circunferência, com o raio menor que o da base.

O centro da figura da secção **C**, resulta, como vimos no caso anterior, da intersecção do plano secante, φ_1 com o eixo do cone, **[OV]**.

O raio da figura da secção, **CP**, corresponde à distância da projecção horizontal do centro da figura da secção com o ponto de intersecção do plano secante com uma das geratrizes do contorno aparente horizontal do cone.

Para a marcação do raio em projecção frontal será necessário determinar a projecção frontal da geratriz **[AV]** do contorno aparente horizontal, que contém o ponto **P** (Fig. 41).

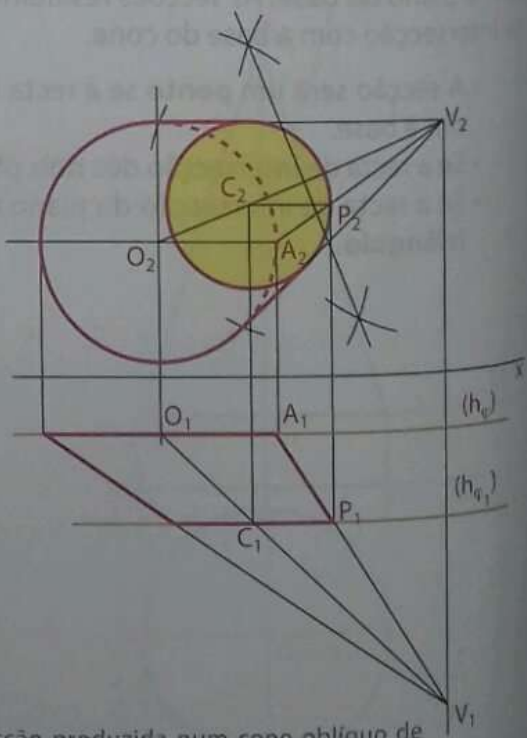


Fig. 41 Secção produzida num cone oblíquo de base de frente por um plano de frente.

Triângulo

Num cone a figura da secção é um triângulo quando o plano secante contém o vértice do cone e intersecta a base.

A figura 42 representa um cone oblíquo, de base de frente, que é seccionado por um plano vertical que intersecta a base e contém o vértice do cone.

O plano secante intersecta a base segundo a recta i resultante da intersecção do plano vertical com o plano da base do sólido. Na intersecção da recta i com a directriz, obtêm-se dois pontos, **A** e **B**, cuja união com o vértice determina a secção triangular (Fig. 42).

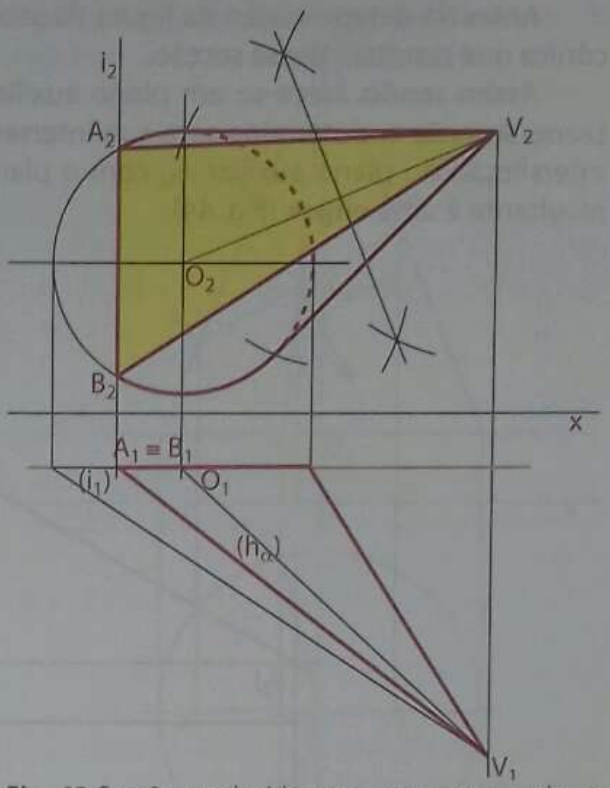


Fig. 42 Secção produzida num cone por um plano vertical que contém o seu vértice.

Métodos de determinação de secções planas em cones

As figuras das secções produzidas em cones, que obtivemos anteriormente, são fácil e rigorosamente construídas. Com efeito, para traçar uma circunferência basta conhecer o seu centro e o seu raio e, para construir um triângulo é suficiente, neste caso, conhecer os seus vértices.

A seguir, vamos seccionar cones, cujas cónicas sejam **elipses, parábolas, hipérboles ou ramos de hipérboles.**

A determinação das projecções dessas cónicas não é directa, pelo que é necessário recorrer a métodos que permitem a sua determinação, nomeadamente o **método das geratrizes** e o **método dos planos paralelos à base.**

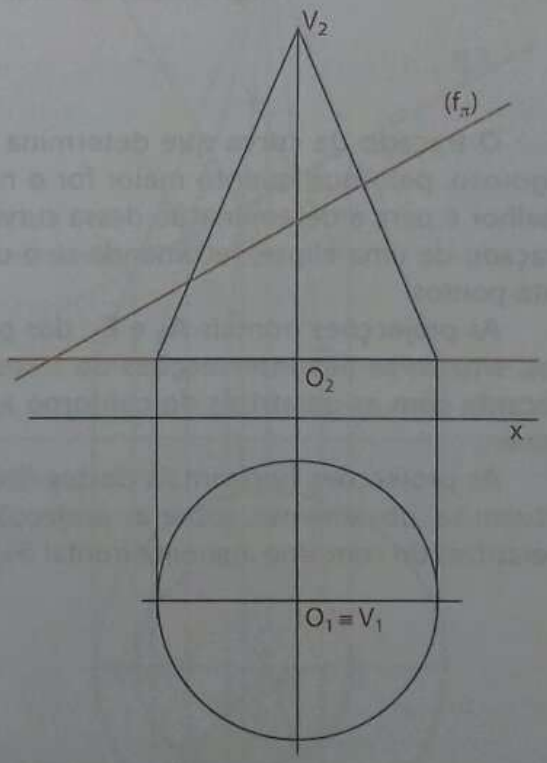


Fig. 43 Projecções do cone e representação do plano secante π

Método das geratrizes

Determinemos a figura da secção produzida num cone de revolução por um plano projectante frontal que faz com o plano horizontal de projecção um diedro de 30° de abertura para a direita. O plano da base do cone é de nível (Fig. 43).

Antes da determinação da figura da secção produzida num cone, é conveniente identificar o tipo de cónica que resultará dessa secção.

Assim sendo, traça-se um plano auxiliar, π_1, que contém o ponto **V**, vértice do cone, paralelo ao plano secante e, determina-se a sua intersecção com o plano da base. Como se pode ver, a recta i, de intersecção do plano auxiliar π_1, com o plano da base ν, é exterior à base, logo, a figura da secção daí resultante é uma **elipse** (Fig. 44).

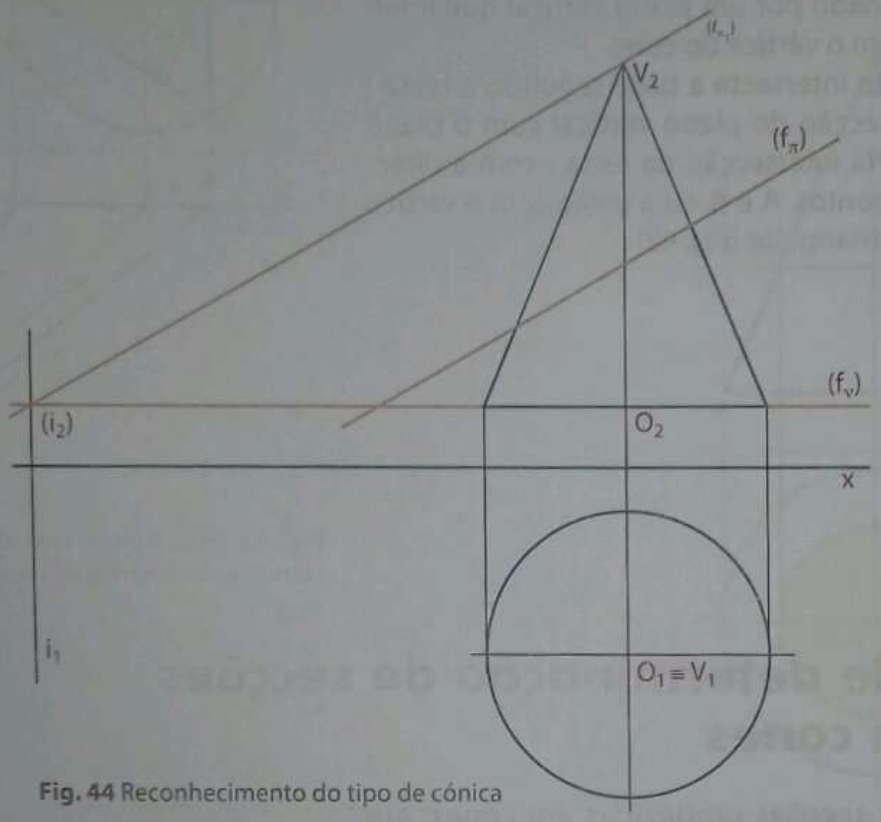


Fig. 44 Reconhecimento do tipo de cónica

O traçado da curva que determina uma elipse não é rigoroso, pelo que quanto maior for o número de pontos, melhor é para a determinação dessa curva. Sendo assim, no traçado de uma elipse, recomenda-se o uso de pelo menos oito pontos.

As projecções frontais A_2 e E_2, dos primeiros dois pontos, situam-se nas intersecções do traço frontal do plano secante com as geratrizes do contorno aparente frontal do cone.

As projecções horizontais destes dois pontos, A_1 e E_1, situam-se, obviamente, sobre as projecções horizontais das geratrizes do contorno aparente frontal (Fig. 45).

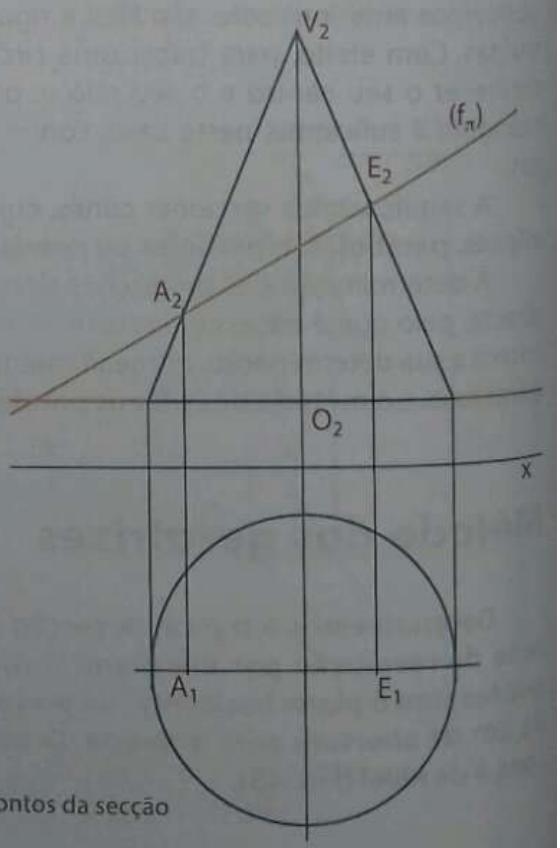


Fig. 45 Projecções de dois pontos da secção

É pois esse processo que será usado para a determinação de todos os pontos da elipse resultante da intersecção deste cone com este plano de topo.

Tracemos mais duas geratrizes, cujas projecções frontais são coincidentes, pois situam-se no mesmo plano de topo e também determinemos as suas projecções horizontais. A intersecção destas duas geratrizes com o plano secante origina dois pontos, C e G, cujas projecções frontais são coincidentes, $C_2 \equiv G_2$. Determinam-se as projecções horizontais dos pontos C e G, nomeadamente C_1 e G_1, que logicamente se situam sobre as projecções horizontais das geratrizes que contêm esses dois pontos.

Assim, estão determinadas as projecções de quatro pontos da figura da secção (Fig. 46).

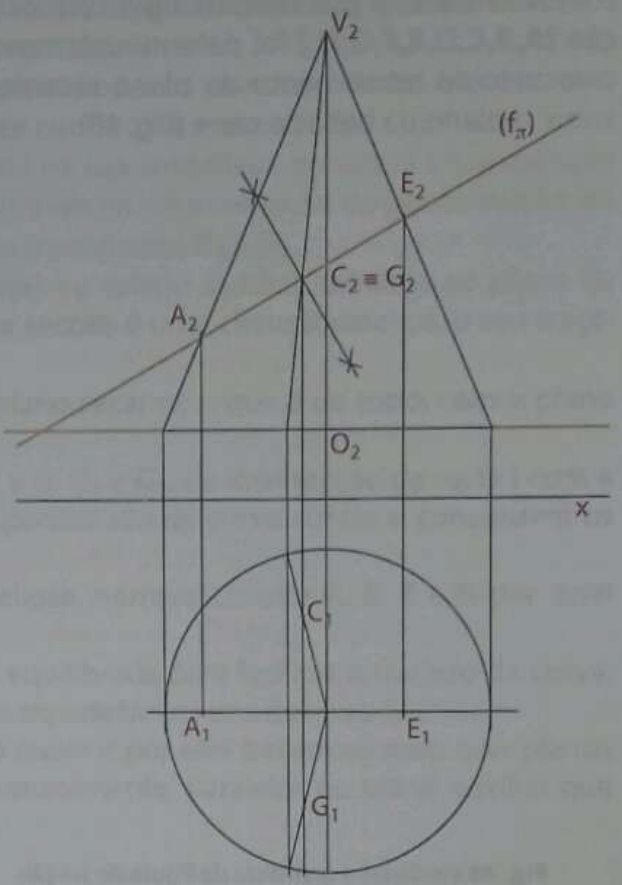


Fig. 46 Projecções de mais dois pontos da figura da secção

Repetindo este processo e distribuindo as geratrizes duma forma equilibrada, obtêm-se tantos outros pontos da secção quantos forem necessários.

Assim, foram determinados mais quatro pontos nomeadamente B, D, F e H, e traçou-se, em projecção horizontal, a curva. A projecção frontal desta elipse é um segmento de recta que está contido no traço frontal do plano secante (Fig. 47).

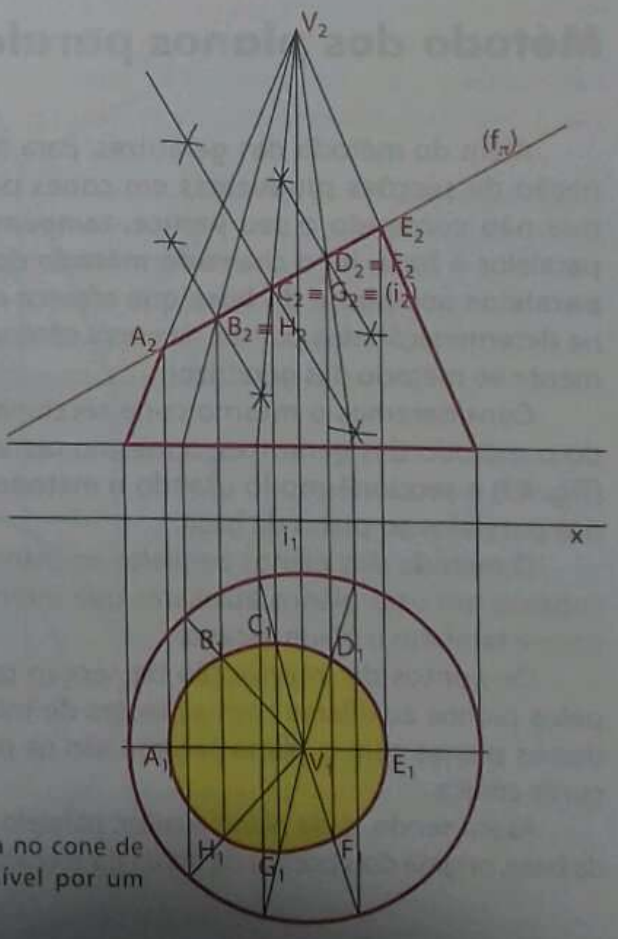


Fig. 47 Secção produzida no cone de revolução de base de nível por um plano de topo.

A verdadeira grandeza da figura da secção $[A_rB_rC_rD_rE_rF_rG_rH_r]$ foi determinada com o recurso ao rebatimento do plano secante sobre o plano da base do cone (Fig. 48).

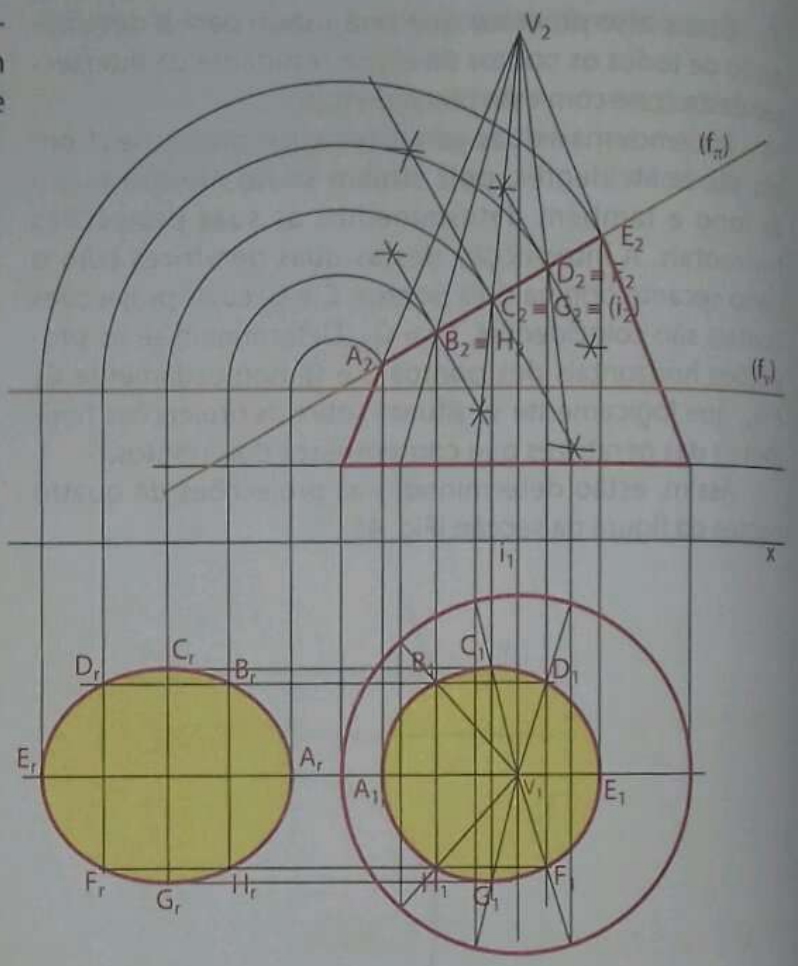


Fig. 48 Verdadeira grandeza da figura de secção

Método dos planos paralelos à base

Além do método das geratrizes, para a determinação de secções produzidas em cones por planos que não contendo o seu vértice, também não são paralelos à base, há o chamado **método dos planos paralelos aos plano da base** que oferece mais rigor na determinação dos pontos da curva cónica, relativamente ao método das geratrizes.

Consideremos o mesmo cone seccionado usando o método das geratrizes, o mesmo plano secante (Fig. 49) e seccionê-mo-lo usando o método dos planos paralelos ao plano da base.

O método dos planos paralelos ao plano da base consiste em usar planos auxiliares que intersectam o cone e também o plano secante.

Os pontos de intersecção da secção produzida pelos planos auxiliares com as rectas de intersecção desses planos com o plano secante são os pontos da curva cónica.

Assim sendo, cada plano auxiliar, paralelo ao plano da base, origina dois pontos da figura da secção.

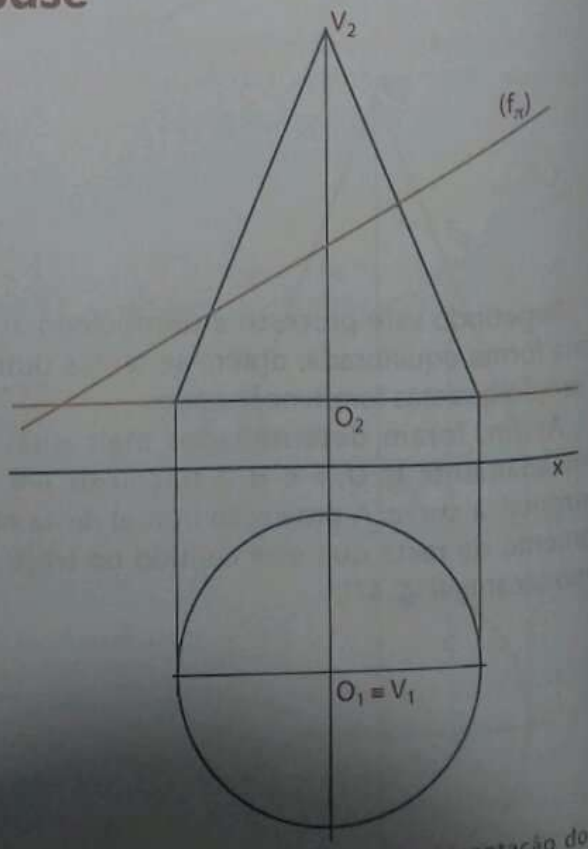


Fig. 49 Projecções do cone e representação do plano secante

A determinação dos primeiros dois pontos, **A** e **E**, que são dois dos extremos dos quatros extremos dos eixos da elipse, é da mesma forma que no método das geratrizes.

Uma elipse tem dois eixos perpendiculares, que se cruzam nos seus pontos médios, isto é, o eixo maior, [**AE**], no seu ponto médio, cruza-se perpendicularmente com o eixo menor, [**CG**].

O eixo [**AE**], cujas projecções são directas, é o maior e está na sua verdadeira grandeza em projecção frontal, pois ele é de frente. O eixo menor [**CG**] será obtido através da determinação do ponto médio do eixo maior. O eixo menor tem a sua projecção frontal reduzida a um ponto, $C_2 \equiv G_2$.

Por este ponto médio fazemos passar um plano de nível ν_1, (plano auxiliar, paralelo ao plano da base) e determinamos a secção que ele produz no cone. Essa secção é uma circunferência e, o seu traçado é rigoroso.

Em seguida, determina-se a recta **i**, de intersecção do plano secante, π que é de topo, com o plano auxiliar ν_1, que é de nível.

Determinam-se as projecções horizontais dos pontos **C** e **G**, C_1 e G_1, de intersecção da recta **i** com a secção circular, produzida pelo plano auxiliar ν_1. Esses dois pontos são da curva cónica e constituem os extremos do seu eixo menor, [**CG**].

Sendo assim, já estão projectados quatro pontos da elipse, nomeadamente **A**, **C**, **E** e **G** por sinal extremos dos seus eixos, ou seja, os vértices da elipse.

Os próximos pontos deverão ser distribuídos de forma equilibrada para facilitar o traçado da curva. Para tal, é necessário que os próximos planos auxiliares sejam equidistantes uns dos outros.

Traçam-se os pontos médios das duas metades do eixo maior e por eles traçam-se mais dois planos auxiliares, ν_2, e ν_3, paralelos ao plano da base do cone e, naturalmente, paralelos ao plano auxiliar que contém o eixo menor do cone (Fig. 50).

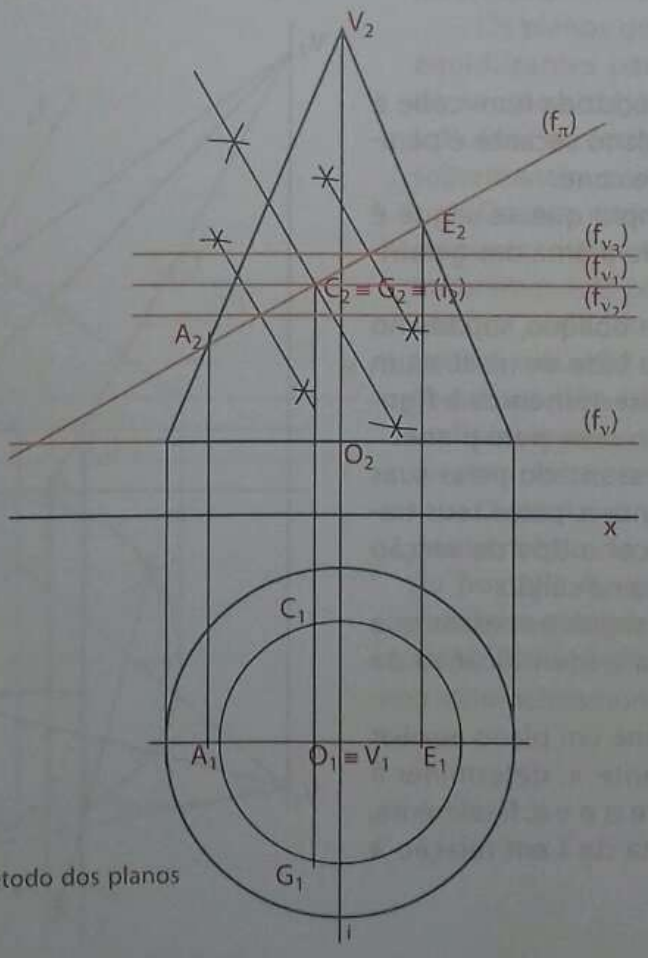


Fig. 50 Utilização do método dos planos paralelos à base

Seguem-se os passos dados para se determinar as projecções dos extremos do eixo menor, nomeadamente:

- Determinar as secções produzidas pelos dois planos auxiliares, ν_2 e ν_3.
- Determinar as rectas de intersecção dos planos auxiliares com o plano secante.
- Determinar os pontos de intersecção das rectas de intersecção dos dois planos com as secções produzidas pelos planos auxiliares.
- Deste modo, teremos oito pontos, **A, B, C, D, E, F, G** e **H**, mínimos necessários, para o traçado da curva cónica, a elipse (Fig. 51).

Este método será usado para o traçado da parábola e da hipérbole.

Com o recurso ao rebatimento determinou-se a verdadeira grandeza da secção $[A_rB_rC_rD_rE_rF_rG_rH_r]$.

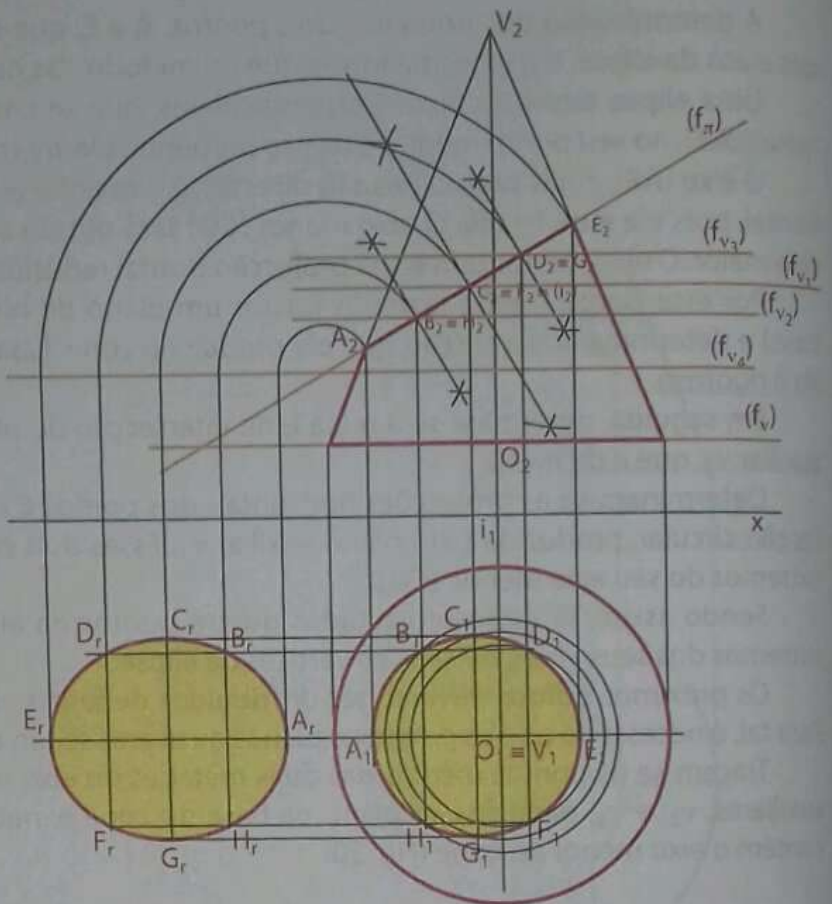


Fig. 51 Secção e sua verdadeira grandeza

Parábola

A figura da secção produzida num cone é uma parábola quando o plano secante é paralelo a uma das geratrizes do cone.

Sendo assim, o exemplo que se segue é dum plano secante paralelo a uma das geratrizes do cone.

Sejam dados um cone oblíquo, situado no 1.º diedro de projecção, de base de nível, e um plano secante, de topo, **determinemos a figura da secção produzida no cone pelo plano.**

Uma vez o cone representado pelas suas projecções e o plano secante π, pelos seus traços, inicia-se por reconhecer o tipo de secção que o plano secante produz no sólido.

Para tal, é necessário seguir os passos que já foram anunciados para a identificação da figura da secção no cone, nomeadamente conduzir pelo vértice **V**, do cone um plano auxiliar α, paralelo ao plano secante π, determinar a recta **i**, de intersecção entre α e ν e, finalmente, analisar a posição da recta de **i** em relação à base (Fig. 52).

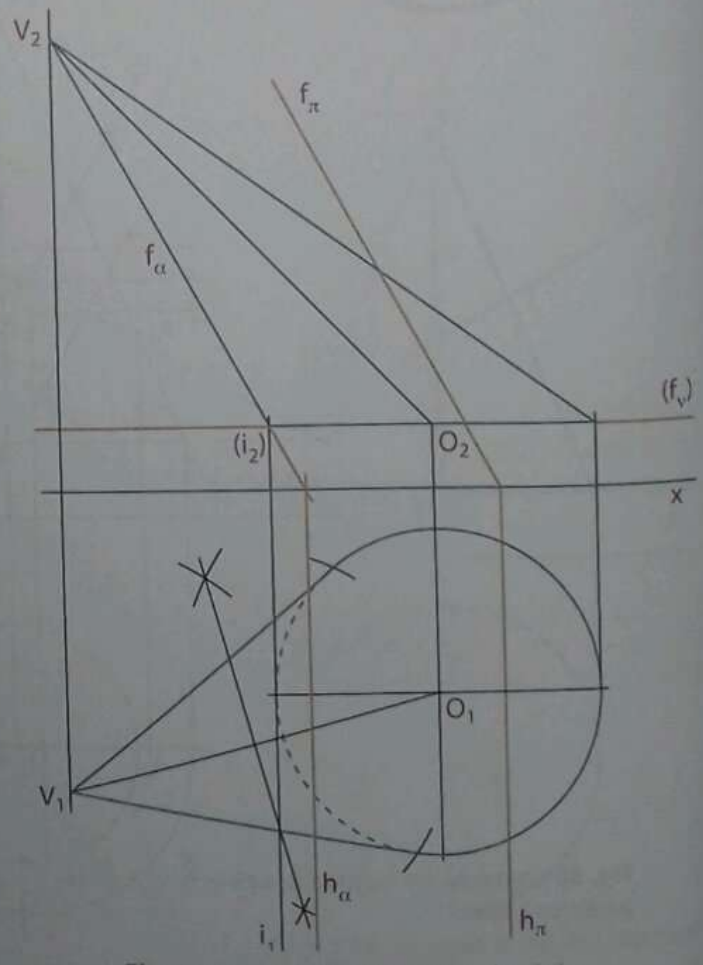


Fig. 52 Reconhecimento do tipo de cónica

A recta i, de intersecção do plano auxiliar, paralelo ao plano secante, com o plano da base do cone, é tangente à base do cone, pelo que a figura da secção produzida pelo plano de topo, é uma parábola.

Após o reconhecimento do tipo de secção, segue-se a determinação da figura da secção que o plano secante π produz no cone dado.

Por forma a que a quantidade dos traços não dificulte a compreensão dos passos dados para a determinação da figura da secção, os passos seguintes serão efectuados a partir apenas dos dados, deixando de lado os passos dados para o reconhecimento do tipo de secção.

Assim, inicia-se por se determinar os pontos de intersecção do plano secante com os contornos aparentes frontal e horizontal do cone.

Tratando-se dum plano projectante, a determinação dos pontos dos contornos aparentes é directa.

O plano secante intersecta o contorno aparente frontal em três pontos, nomeadamente **A**, **B** e **J**, sendo **A** e **B** da base e **J** duma geratriz.

O ponto **J** é o ponto da curva da secção com maior cota, e os pontos **A** e **B** são os pontos de menor cota da secção, ou seja, esses três pontos determinam os extremos limites da figura da secção, fora dos quais não há qualquer tipo de ponto que determina a figura da secção. **A** e **B** têm a sua projecção horizontal na projecção horizontal da base, e **J** tem a sua projecção horizontal sobre a projecção horizontal da geratriz do mesmo nome.

Quando determinámos da secção elíptica num cone, experimentámos dois métodos, nomeadamente o das geratrizes e o dos planos paralelos ao plano da base e constatámos que este último era mais rigoroso, daí ter sido o escolhido para a determinação deste tipo de secções em cones.

Assim, na projecção frontal do cone, no espaço compreendido entre os pontos extremos da figura da secção, traçam-se planos auxiliares de nível equidistantes.

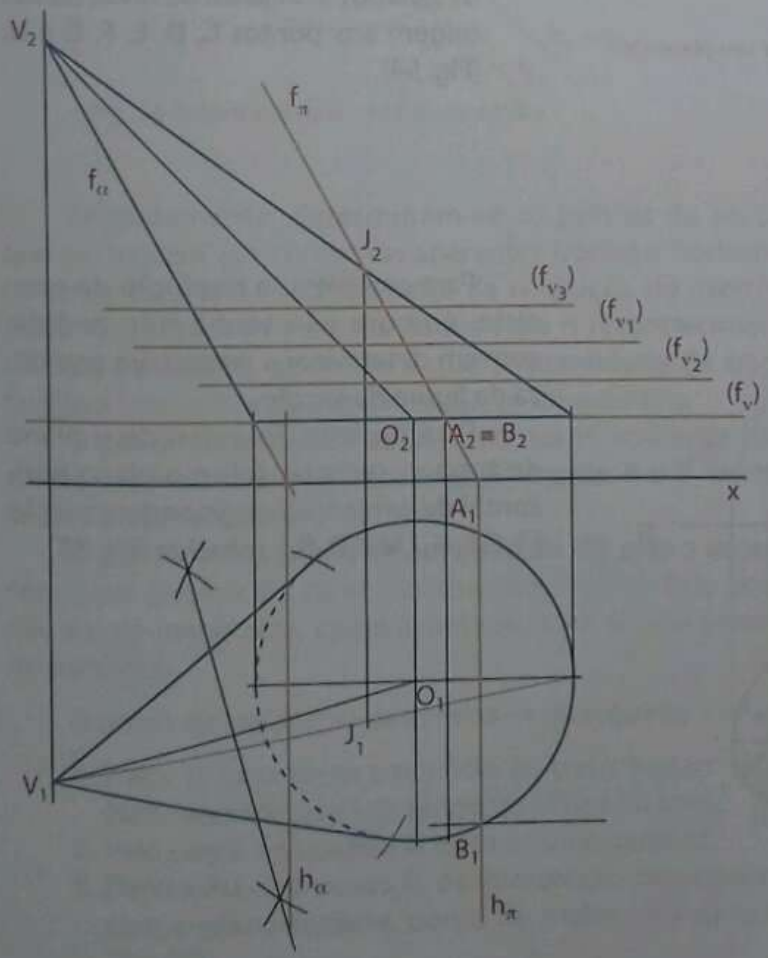


Fig. 53 Utilização do método de planos paralelos à base

Os planos de nível auxiliares devem ser equidistantes para permitir que os pontos da secção estejam equilibradamente distribuídos ao longo da curva, o que facilita sobremaneira o seu traçado.

Quanto maior for o número de pontos da curva, maior é a precisão. Sendo assim, traçaremos três planos auxiliares v_1, v_2 e v_3, em que cada um deles nos dará mais dois pontos, o que faz um total de seis que, adicionados aos três do contorno aparente, fazem um total de nove pontos, suficientes para traçar uma curva mais ou menos precisa.

O primeiro plano auxiliar passa pelo ponto médio do segmento de recta limitado por J_2 e $A_2 \equiv B_2$. Os outros dois planos auxiliares passarão pelos pontos médios das metades do segmento $[J_2A_2 \equiv B_2]$ (Fig. 53).

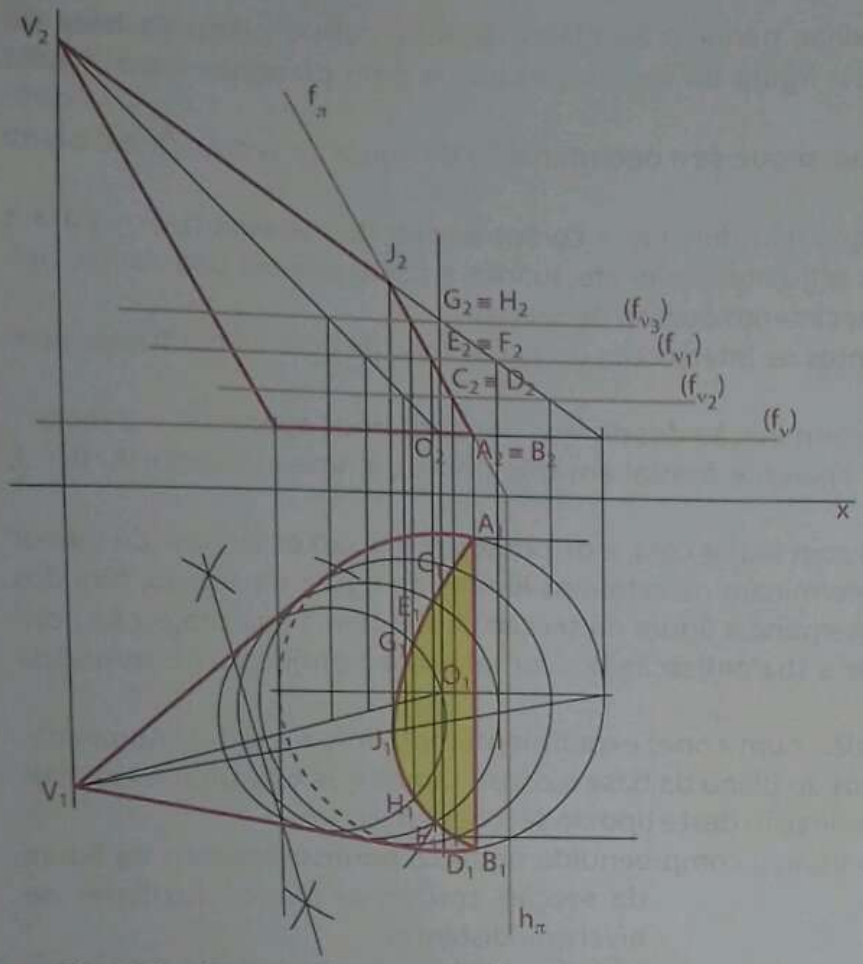


Fig. 54 Secção produzida no cone de base de nível por um plano de topo.

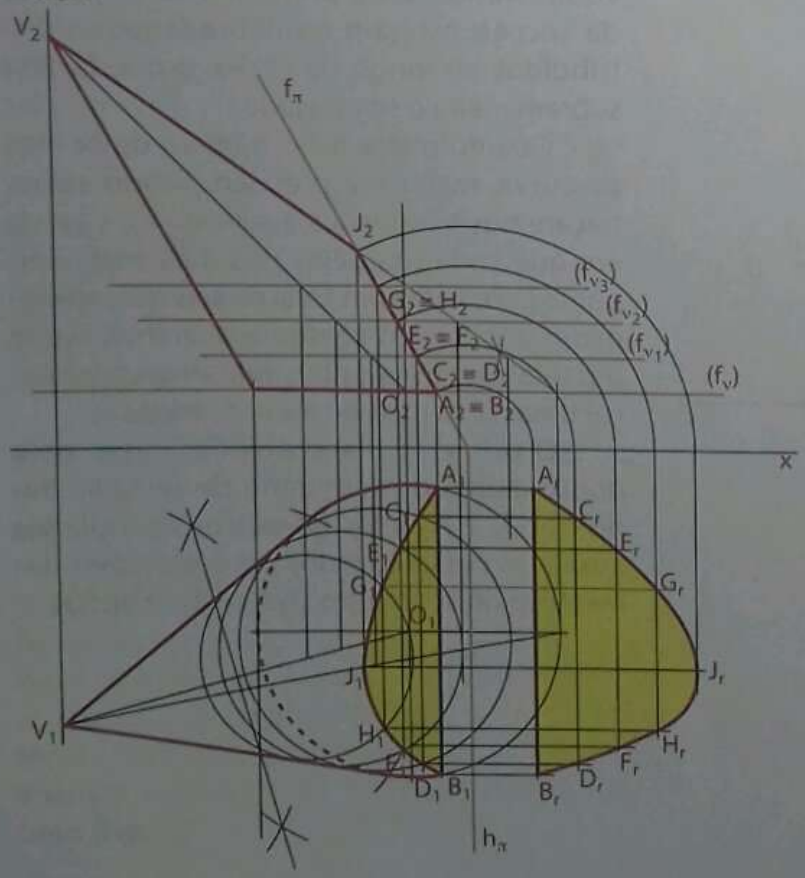


Fig. 55 Verdadeira grandeza da figura da secção

A determinação dos pontos da figura da secção, situados nos planos auxiliares, processa-se da mesma maneira que se efectuou na determinação da elipse:

1. Determina-se a figura da secção produzida no cone pelo plano de nível. O contorno da figura da secção é uma circunferência, cuja construção é rigorosa.
2. Determina-se a recta de intersecção do plano secante com o plano auxiliar de nível, uma recta, neste caso, de topo. Recorde que na intersecção de um plano de topo com um plano de nível o resultado é uma recta de topo.
3. Por fim, determinam-se os pontos de intersecção dos dois planos com a secção circular auxiliar, que são os dois pontos da curva da secção contidos no plano auxiliar.

Esses passos serão os mesmos nos três planos auxiliares, de nível, dando origem aos pontos **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**. (Fig. 54).

Para completar a resolução do exercício, embora não tenha sido pedido, convém determinar a verdadeira grandeza da figura da secção.

Para o efeito, foi rebatido o plano de topo π, secante, sobre o plano horizontal de projecção originando a secção $[A_rC_rE_rG_rJ_rH_rF_rD_rB_r]$, rebatida (Fig. 55).

Hipérbole

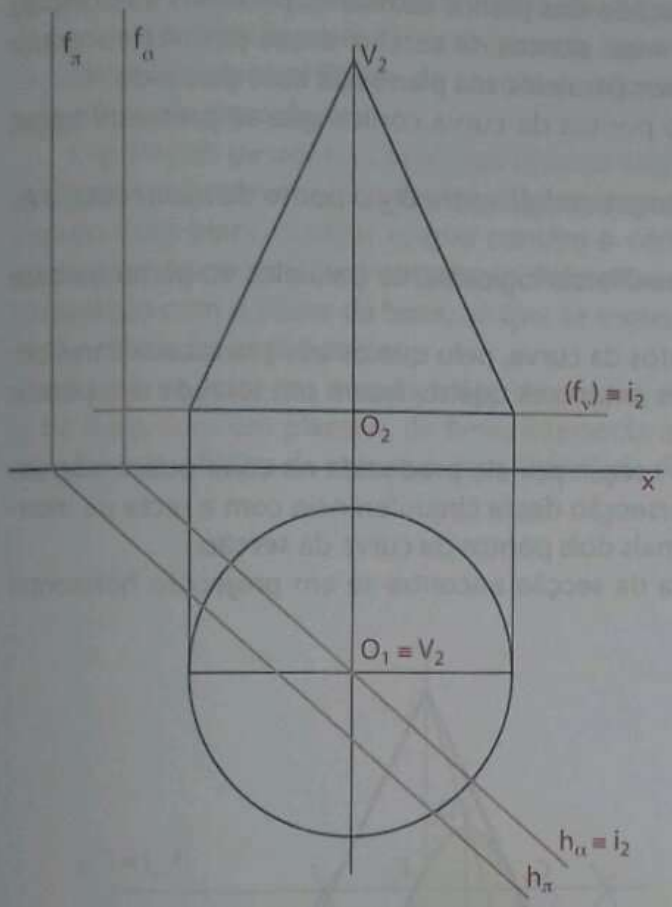


Fig. 56 Reconhecimento do tipo de cónica

A figura da secção produzida numa superfície cónica é uma hipérbole se o plano secante é paralelo a duas geratrizes dessa superfície e intersecta a directriz.

Determinemos a figura da secção produzida num cone de revolução assente num plano de nível, por um plano vertical.

O primeiro passo consiste em identificar o tipo de secção. Para tal, seguem-se os mesmos passos que se deram aquando da determinação da parábola e da elipse.

O plano secante não contém o vértice do cone e nem é paralelo ao plano da base do cone. A recta i, de intersecção do plano auxiliar paralelo ao plano secante e que contém o vértice do cone, com o plano da base, intersecta a base do cone, portanto, a figura da secção é um **ramo da hipérbole** (Fig. 56).

Seguidamente, determinam-se os pontos da secção que pertencem aos contornos aparentes frontal e horizontal do cone. Para esta segunda parte da resolução do exercício serão dispensados os passos dados para o reconhecimento do tipo de secção, de modo a que a quantidade de traços facilite a leitura dos passos da resolução do exercício.

O plano secante intersecta o contorno aparente horizontal segundo dois pontos, designadamente **A** e **B**, pertencentes à base do cone.

O ponto **C** é o ponto de intersecção do plano secante com uma geratriz do contorno aparente frontal. Este ponto não é o de maior cota, como aconteceu com o caso anterior, da parábola.

O ponto de maior cota determina-se da seguinte maneira:

1. Traça-se uma recta **r** paralela ao traço horizontal do plano secante, que seja tangente à base do cone.
2. Pelo ponto de tangência traça-se uma geratriz.
3. Determina-se o ponto **D**, de intersecção dessa geratriz com o plano secante, ponto de maior cota da curva (Fig. 57).

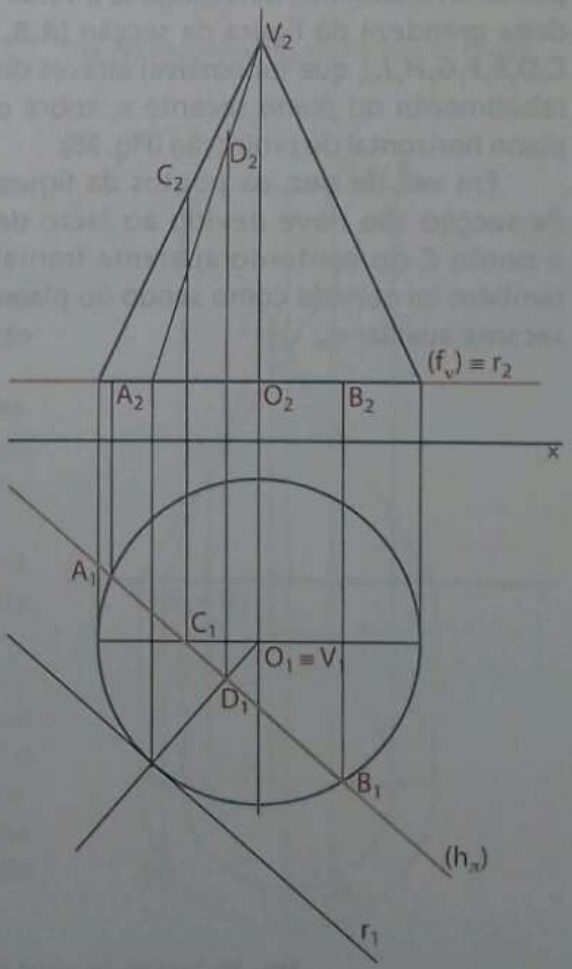


Fig. 57 Projecções de quatro pontos da figura de secção

Os pontos de menor cota, como se pode ver, são **A** e **B**, situados na base do sólido e o ponto de maior cota da figura de secção é **D**.

Assim, já está identificado o **espaço útil** para o traçado dos planos auxiliares, paralelos ao plano da base, aliás, o método que será usado para determinar mais pontos da secção, e que permite encontrar rigorosamente os pontos da curva, é o método dos planos paralelos aos planos da base do sólido.

Note que até aqui já foram determinados quatro pontos da curva cónica que se pretende traçar, designadamente **A, B, C** e **D**.

O espaço útil, em projecção frontal, encontra-se compreendido entre D_2, o ponto de maior cota, e A_2 e B_2, pontos de menor cota da curva da secção.

Assim, traçamos três planos de nível, ν_1, ν_2 e ν_3, auxiliares, logicamente paralelos ao plano da base do sólido, distribuídos uniformemente no espaço útil.

Cada um dos planos auxiliares determina dois pontos da curva, pelo que os três planos auxiliares originam seis pontos **C, E, F, G, H** e **J**, que, adicionados aos anteriores quatro, fazem um total de dez pontos da figura da secção.

Em cada um dos planos auxiliares determina-se a secção por ele produzida no cone que, evidentemente, será contornada por uma circunferência. A intersecção dessa circunferência com a recta de intersecção do plano secante, com o plano auxiliar, origina mais dois pontos da curva da secção.

Todos os pontos da secção, ou seja, toda a figura da secção encontra-se em projecção horizontal sobre o traço horizontal do plano secante, pois trata-se dum plano projectante horizontal. A figura da secção é tangente à geratriz do contorno aparente frontal no ponto **C**. Finalmente, determina-se a verdadeira grandeza da figura da secção [A_rB_r-$C_rD_rE_rF_rG_rH_rJ_r$], que foi possível através do rabatimento do plano secante π, sobre o plano horizontal de projecção (Fig. 58).

Em vez de dez, os pontos da figura da secção são nove devido ao facto de o ponto **C** do contorno aparente frontal também ter servido como sendo do plano secante auxiliar ν_3.

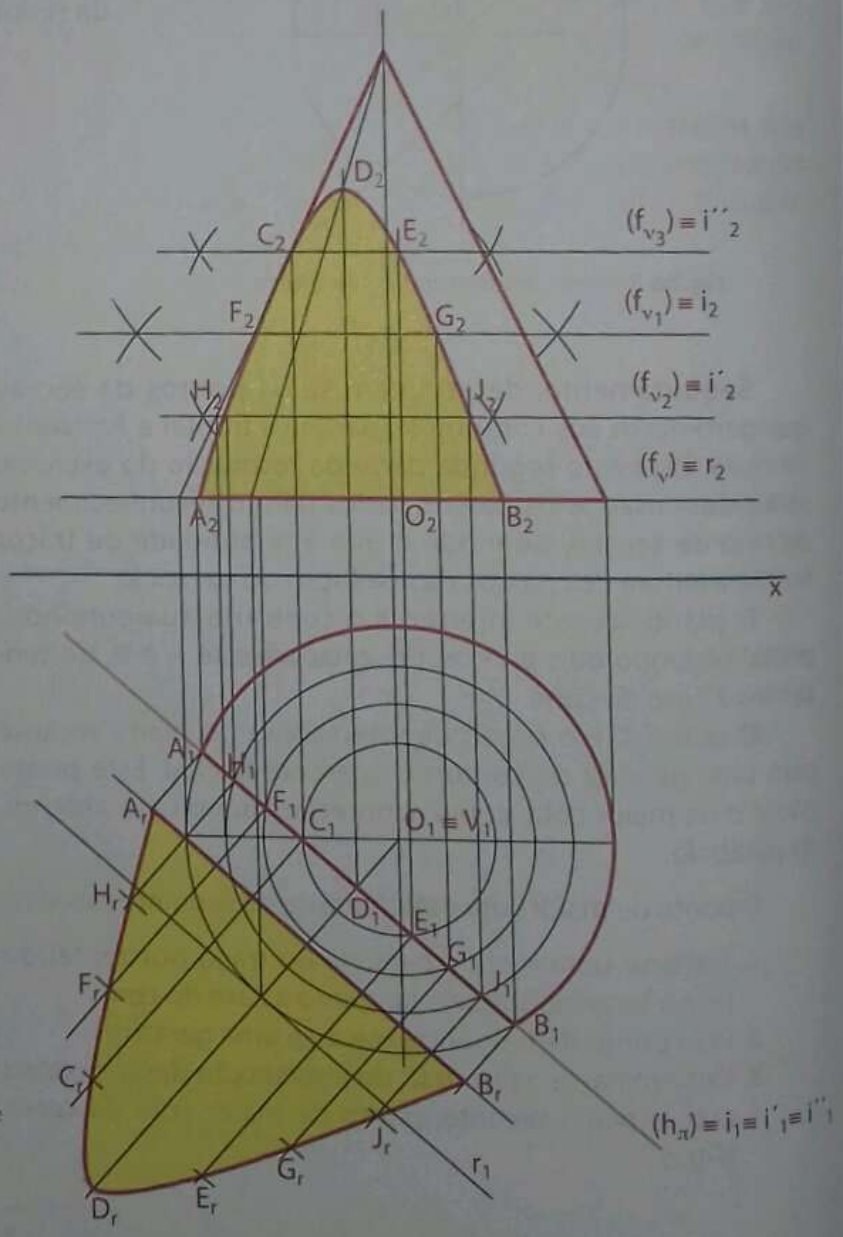


Fig. 58 Secção no cone de revolução e sua **V. G.**

Passemos a analisar uma outra situação que diz respeito a um sólido gerado por duas folhas de uma superfície cónica de revolução. O sólido situa-se no primeiro diedro de projecção, e é limitado por dois planos de nível. O plano secante π, é de topo.

Determinemos a figura da secção produzida neste sólido pelo plano de topo dado.

O primeiro passo, tal como nas últimas três curvas cónicas estudadas, consiste em reconhecer a figura da secção, através do traçado dum plano auxiliar α, que contém o vértice do sólido e que seja paralelo ao plano secante, e determinar a recta da sua intersecção com o plano da base, ao que se segue a análise dessa recta em relação às directrizes.

Como se pode ver, a recta **i**, de intersecção do plano auxiliar α, de topo, com um plano π, da base, intersecta as bases do sólido, pelo que a figura da secção é uma **hipérbole** (Fig. 59).

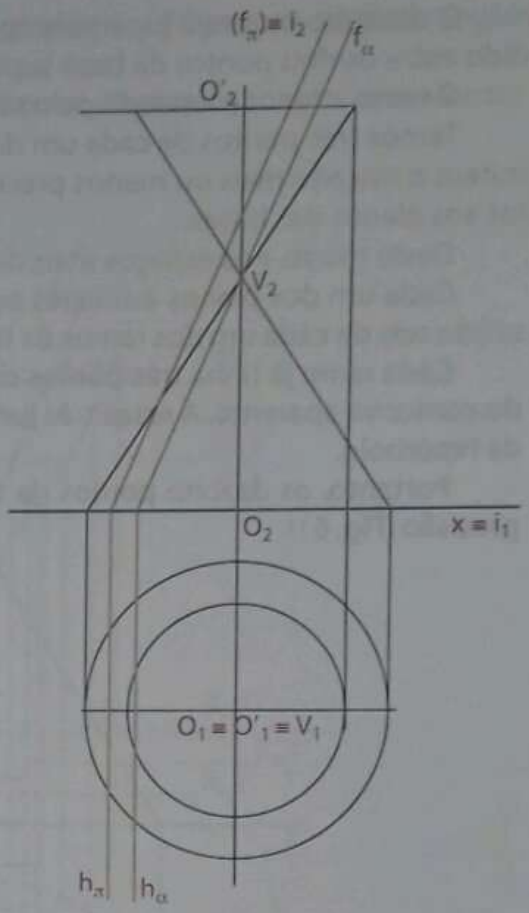


Fig. 59 Reconhecimento do tipo de cónica

Tal como nos casos anteriores, para que os passos seguintes sejam acompanhados com clareza, dispensam-se os passos anteriores do reconhecimento do tipo de secção.

Assim, determinam-se os pontos de intersecção do plano secante com os contornos aparentes frontal e horizontal do sólido.

O contorno aparente horizontal, neste caso, é um caso particular em que serão consideradas as duas bases do sólido. Sendo assim, o plano secante intersecta o contorno aparente horizontal da folha superior segundo dois pontos, **A** e **B**.

O mesmo plano intersecta o contorno aparente horizontal, da folha inferior, também segundo dois pontos, designadamente **C** e **D**.

Relativamente ao contorno aparente frontal, o plano secante intersecta-o segundo seis pontos, dos quais quatro são os que vimos anteriormente, pertencentes às bases do sólido, **A**, **B**, **C** e **D**. Os outros dois pontos são **E** e **F**, pertencentes, respectivamente, à geratriz, à esquerda, do contorno aparente frontal da folha superior e à geratriz à esquerda do contorno aparente frontal da folha inferior (Fig. 60).

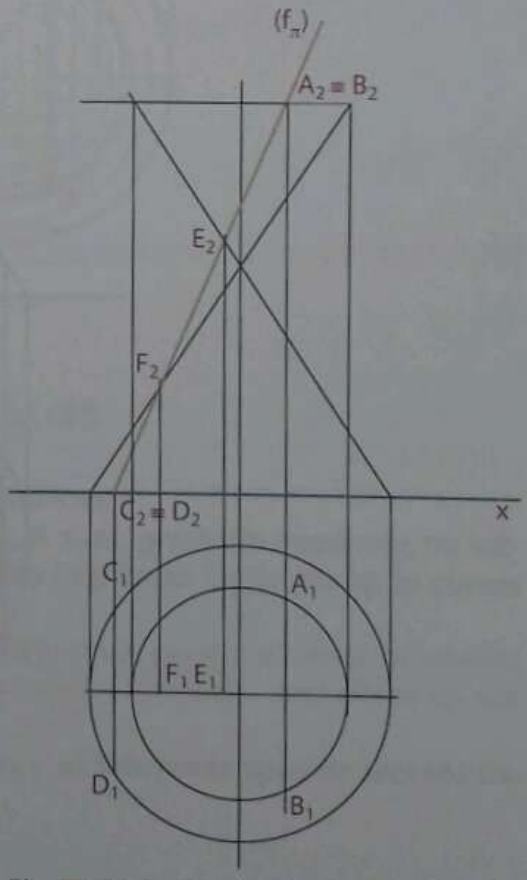


Fig. 60 Projecções dos pontos da figura de secção pertencentes ao contorno aparente

O desenho mostra a hipérbole com os seus dois ramos. O espaço útil, do ramo superior, é compreendido entre os dois pontos da base superior, **A** e **B**, e o ponto **E**, seu ponto de menor cota.

O ramo inferior é limitado pelo seu ponto de maior cota, **F**, e os pontos **C** e **D**, da base inferior.

Temos três pontos de cada um dos ramos da hipérbole. Para a obtenção dos outros pontos que permitem o traçado mais ou menos preciso das curvas, recorremos ao método dos planos auxiliares, paralelos aos planos das bases.

Deste modo, nos espaços úteis de cada uma das folhas do sólido, traçamos três planos auxiliares.

Cada um dos planos auxiliares origina dois pontos, pelo que os seis planos originarão doze pontos, sendo seis de cada um dos ramos da hipérbole.

Cada ramo já tinha três pontos dos contornos aparentes, dos quais dois da base e um duma geratriz do contorno aparente. A esses três juntam-se mais seis, fazendo um total de nove pontos para cada ramo da hipérbole.

Portanto, os dezoito pontos da secção permitem-nos traçar as curvas da secção com uma relativa precisão (Fig. 61).

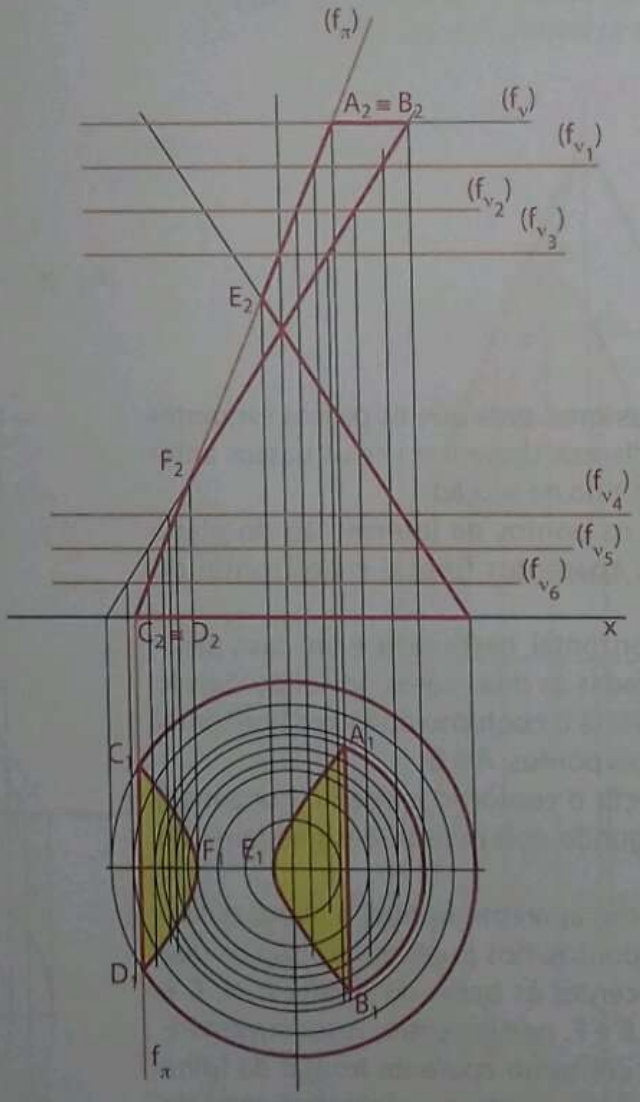


Fig. 61 Hipérbole

Embora não tenha sido pedida a determinação da verdadeira grandeza da figura da secção, convém que seja determinada para uma melhor visualização das curvas.

Por meio do rebatimento do plano secante sobre o plano horizontal de projecção obtemos a verdadeira grandeza da figura de secção (Fig. 62).

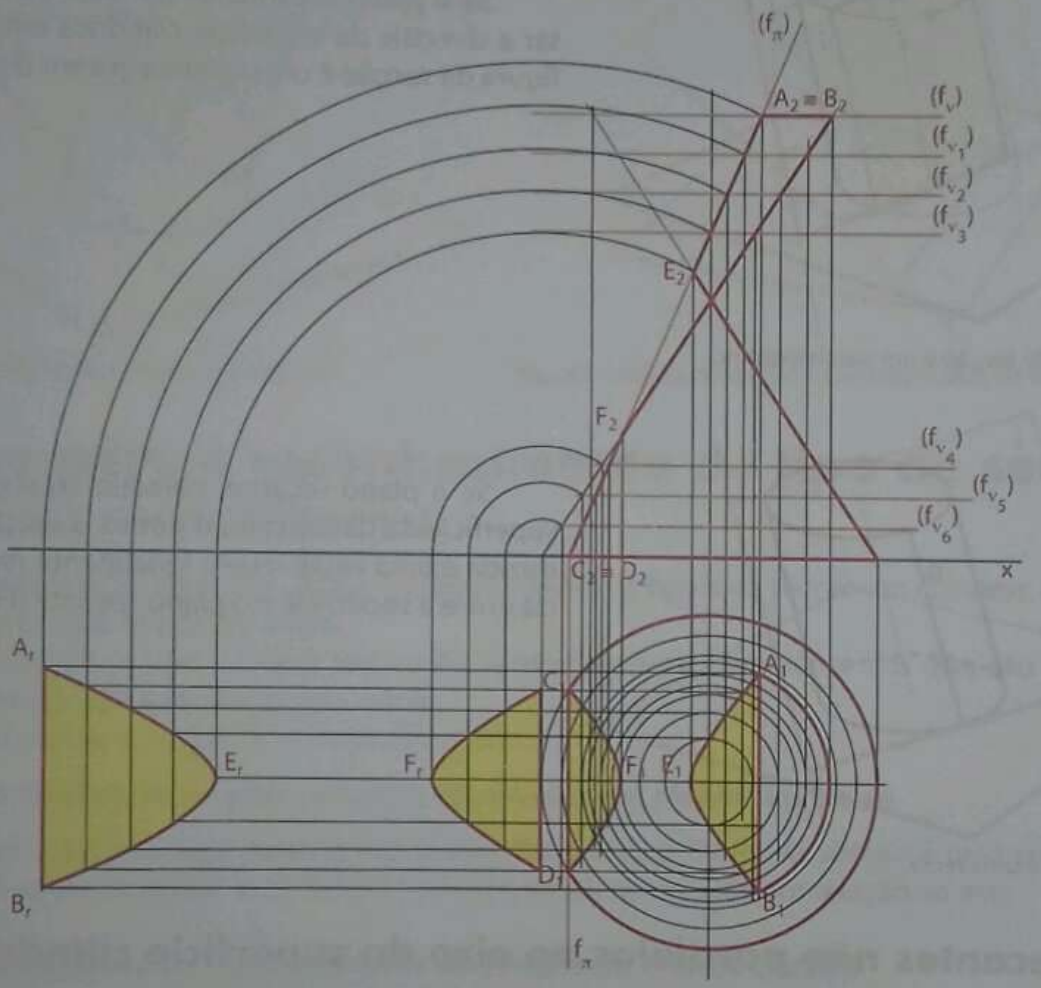


Fig. 62 Verdadeira grandeza da figura de secção

Diferentes tipos de secções cilíndricas

As secções produzidas em cilindros são chamadas **secções cilíndricas**.

Uma superfície cilíndrica é também uma superfície cónica, pois as suas geratrizes cruzam-se no infinito, ou seja, o vértice duma superfície cilíndrica situa-se num ponto impróprio. Deste modo, as curvas geradas por **secções cilíndricas** também são **cónicas**.

De acordo com a relação entre o plano secante e a superfície cilíndrica, podem obter-se diferentes tipos de secções, nomeadamente uma recta, um paralelogramo, uma circunferência, uma elipse ou um ramo de elipse, se se tratar dum cilindro.

Vejamos as relações entre planos e os elementos dos cilindros, e os diferentes tipos de secções daí resultantes:

Planos secantes paralelos ao eixo da superfície cilíndrica

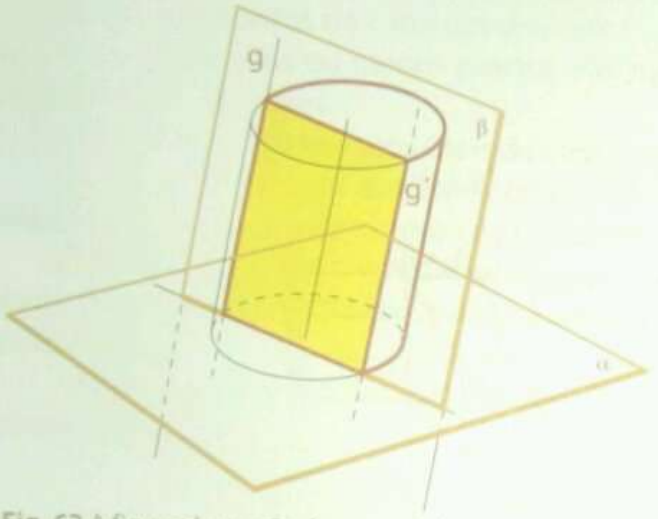


Fig. 63 A figura de secção é um paralelogramo.

Os planos paralelos ao eixo da superfície cilíndrica podem conter o eixo, duas geratrizes ou uma geratriz.

Se o plano secante for paralelo ao eixo e intersectar a directriz da superfície cilíndrica em dois pontos, a figura da secção é um **paralelogramo** (Fig. 63).

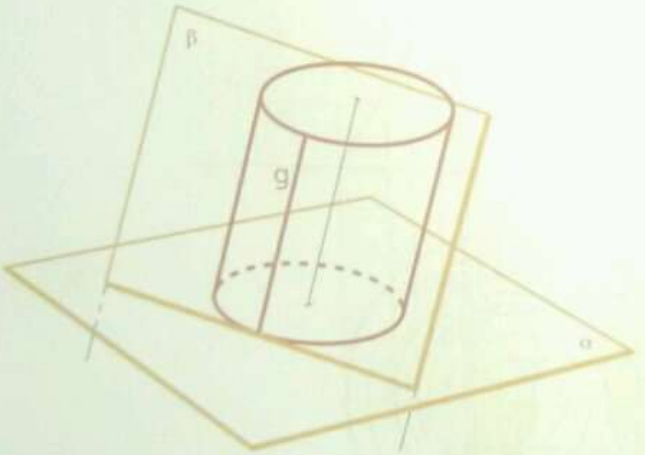


Fig. 64 A secção é uma recta.

Se o plano secante, paralelo ao eixo, intersecta a superfície da directriz num ponto, a secção por ele produzida é uma **recta**, que é igualmente recta de tangência entre a superfície e o plano secante (Fig. 64).

Planos secantes não paralelos ao eixo da superfície cilíndrica

Os planos não paralelos ao eixo da superfície cilíndrica não são, evidentemente, paralelos às geratrizes da superfície, ou seja, cortam todas as geratrizes da superfície cilíndrica.

Se esse plano que corta todas as geratrizes da superfície cilíndrica for paralelo ao plano da directriz, a figura da secção será uma **circunferência** (Fig. 65).

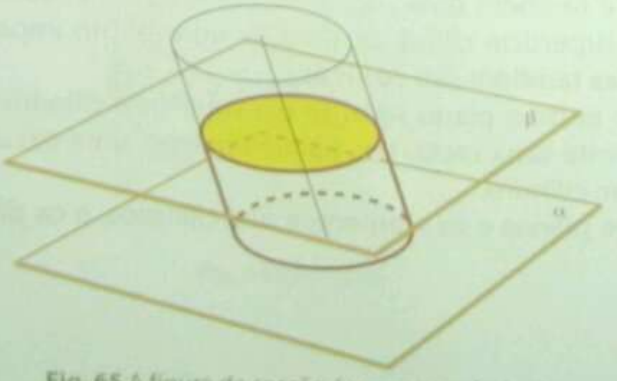


Fig. 65 A figura de secção é uma circunferência.

A figura de secção será uma **elipse** se o plano que secciona todas as geratrizes da superfície for oblíquo em relação ao plano da directriz (Fig. 66). É necessário ter em conta que se se tratar dum cilindro, este plano secante poderá não cortar todas as geratrizes e, como tal, a figura da secção não será uma elipse, mas um **segmento da elipse** (Fig. 67).

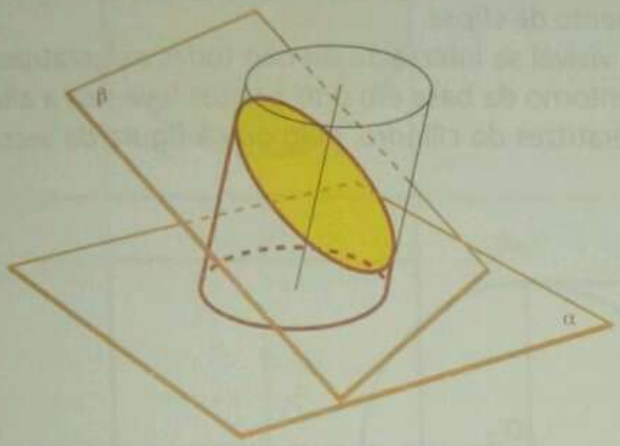


Fig. 66 A figura de secção é uma elipse.

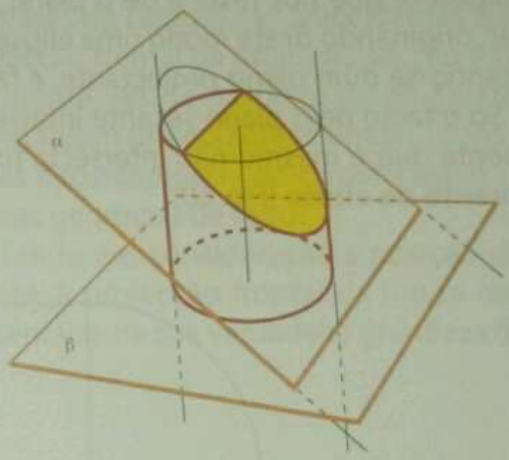


Fig. 67 A figura de secção é um segmentos de elipse.

Processo para o reconhecimento do tipo de secção produzida num cilindro

Tal como em secções em cones, antes da determinação da figura da secção em cilindros, é conveniente identificar a cónica que resulta da secção.

Para o efeito, os passos a seguir são muito simples comparativamente aos que são dados para o reconhecimento da figura da secção em cones.

No caso do cilindro há que considerar dois casos:

1. Análise da posição do plano secante em relação aos planos das bases

Caso o plano secante seja paralelo aos planos das bases, a figura da secção é uma **circunferência**. De contrário deveremos passar ao estudo da posição do plano secante em relação ao eixo.

2. Análise da posição do plano secante em relação ao eixo do cilindro

Caso o plano secante não seja paralelo aos planos das bases, será logicamente oblíquo ou perpendicular a esses, pelo que teremos pelo menos dois tipos de figuras da secção, nomeadamente:

- **Paralelogramo**, se o plano secante é paralelo ao eixo ou contém o eixo do cilindro.
- **Elipse ou segmento da elipse**, se o plano secante não é paralelo ao eixo e aos planos das bases do cilindro.

Analisemos um exemplo concreto do que acabámos de referir. O desenho que se segue **representa as projecções de um cilindro oblíquo de bases assentes em planos de frente.** O cilindro é seccionado por um plano projectante horizontal.

Para se saber qual é a figura da secção resultante da intersecção do plano com o cilindro, seguem-se os seguintes passos:

1. Análise da posição do plano secante em relação aos planos das bases

Os planos das bases são de frente e o plano secante é projectante horizontal, logo estes dois planos não podem ser paralelos e, portanto, a figura da secção não pode ser uma circunferência.

2. Análise da posição do plano secante em relação ao eixo do cilindro

Um plano projectante horizontal pode ser paralelo ao eixo de nível dum cilindro, ou pode contê-lo, mas não é o presente caso, logo, a figura da secção não pode ser um paralelogramo.

A hipótese que nos resta é de o plano secante intersectar o eixo e, portanto, algumas ou todas as geratrizes, originando deste modo uma elipse ou segmento da elipse.

Tratando-se dum plano projectante, é facilmente visível se intersecta ou não todas as geratrizes do cilindro. Só o facto de o plano secante intersectar o contorno da base em dois pontos leva-nos a afirmar seguramente que o mesmo não intersecta todas as geratrizes do cilindro, pelo que a figura da secção é um **segmento da elipse** (Fig. 68).

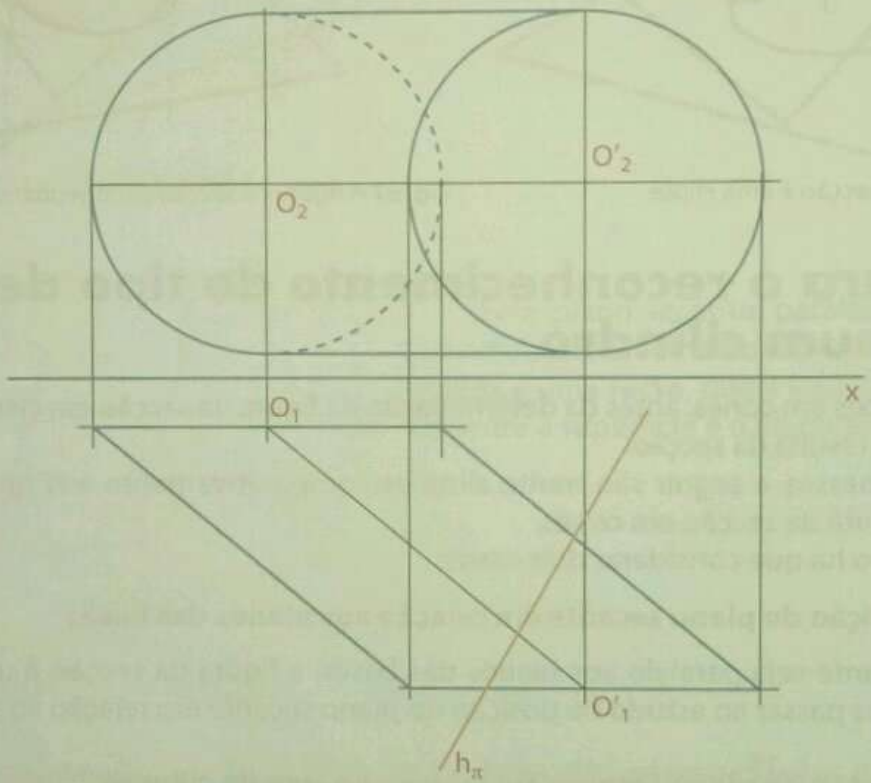


Fig. 68 Análise do plano secante em relação ao eixo do cilindro

Secções produzidas em cilindros por planos paralelos à sua base

Quando estudámos os diferentes tipos de secções cilíndricas, vimos que a figura da secção resultante da intersecção dum plano paralelo aos planos das bases do cilindro com esse cilindro era uma circunferência.

Como sabe, a circunferência é uma figura plana de fácil e rigorosa construção. Para traçá-la, basta conhecer o seu centro, e o seu raio ou diâmetro.

Dado um cilindro de revolução de bases de frente, determinemos a secção nele produzida por um plano de frente.

Tendo em conta que o plano secante é paralelo aos planos das bases, a figura da secção é, sem dúvida, uma circunferência, cuja projecção horizontal é um segmento de recta contido no traço do plano secante.

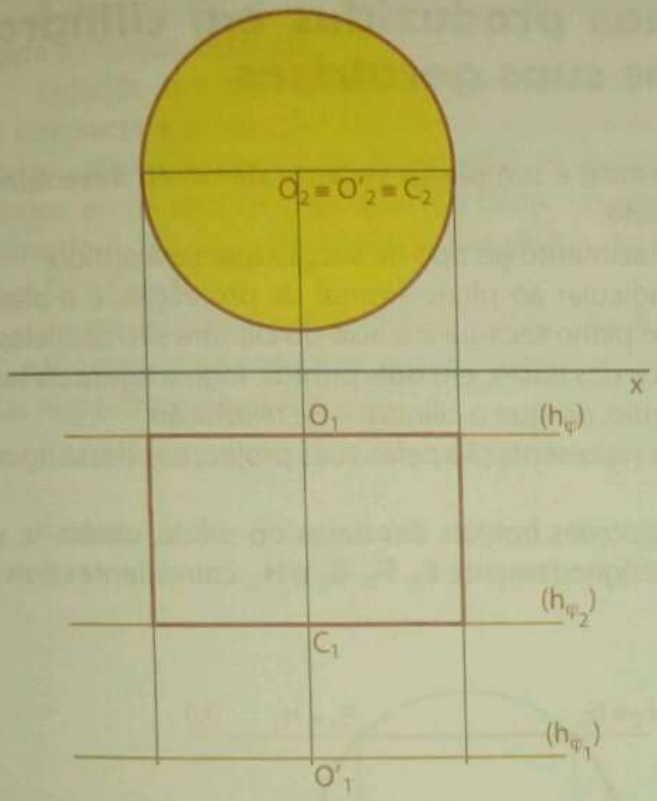


Fig. 69 Secção produzida num cilindro de revolução, por um plano de frente.

A projecção frontal da figura da secção é uma circunferência coincidente com as projecções frontais das bases do cilindro.

A razão por que as projecções frontais das duas bases do cilindro são coincidentes e também a projecção frontal da figura da secção é com elas coincidente, reside no facto de as geratrizes do cilindro serem projectantes frontais. Todos os pontos das circunferências do cilindro estão contidos nas suas geratrizes de topo.

Tendo em consideração a posição do plano secante, a projecção frontal da figura da secção apresenta-se na sua verdadeira grandeza (Fig. 69).

Vejamos um outro exemplo, dum **cilindro oblíquo que é igualmente seccionado por um plano paralelo aos planos das suas bases. Trata-se dum cilindro com bases de nível seccionado por um plano também de nível.**

Está claro que a figura da secção resultante da intersecção desse plano com o cilindro é uma circunferência com o mesmo raio que o das bases e paralela a elas.

O centro da figura da secção encontra-se no ponto de intersecção do eixo do cilindro com o plano secante. Inicia-se por designá-lo em projecção frontal, C_2, e seguidamente procura-se a sua projecção horizontal, C_1, sobre a projecção horizontal do eixo do cilindro, $[O_1O'_1]$.

Com abertura do compasso igual ao raio das bases do cilindro e centro em C_1, traça-se uma circunferência. Essa circunferência é a projecção horizontal da figura de secção, cuja projecção frontal fica contida no traço frontal do plano secante (Fig. 70).

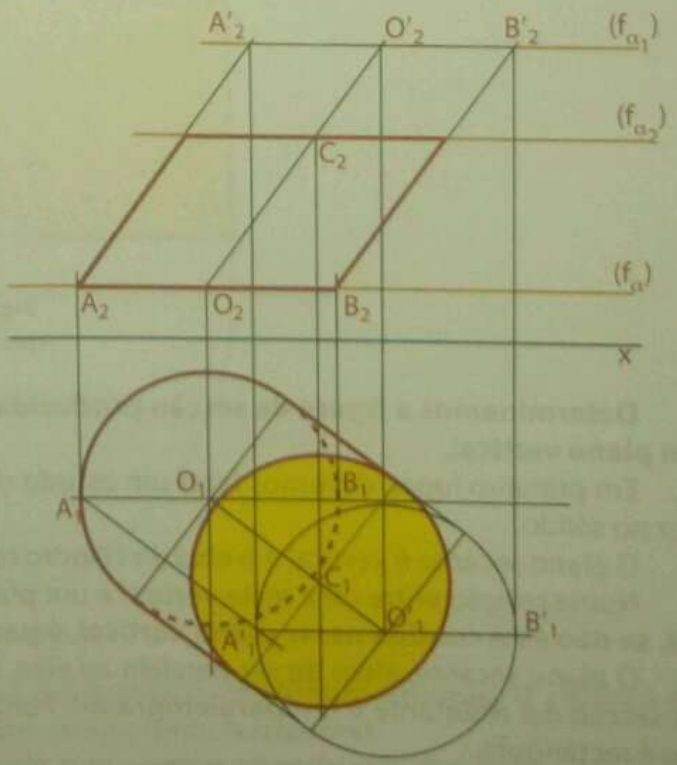


Fig. 70 Secção produzida num cilindro oblíquo por um plano de nível.

Determinação de secções planas produzidas em cilindros por planos que contêm duas das suas geratrizes

Dados um cilindro de revolução de bases de frente e um plano secante de nível, determinemos a figura da secção que esse plano produz no sólido.

A primeira coisa que deve ser efectuada é o reconhecimento do tipo de secção que será obtido.

Tendo em conta que o eixo do cilindro é perpendicular ao plano frontal de projecção, e o plano secante também o é, então ambos são paralelos, isto é, o plano secante e o eixo do cilindro são paralelos.

Além disso o plano secciona cada um dos contornos das bases, em dois pontos, logo a figura da secção é um **paralelogramo**. Este paralelogramo é rectângulo, porque o cilindro é de revolução.

Uma vez identificada a figura da secção, segue-se a representação pelas suas projecções dessa figura da secção.

Quando o traço do plano secante intersecta as projecções frontais das bases do sólido, obtêm-se as projecções frontais dos quatro vértices do rectângulo, designadamente E_2, F_2, G_2 e H_2, coincidentes dois a dois, $E_2 \equiv H_2$ e $F_2 \equiv G_2$.

As projecções horizontais desses quatro pontos E_1, F_1, G_1 e H_1, situam-se sobre as projecções horizontais das respectivas bases.

Uma vez que o plano secante é paralelo a um dos planos de projecção, neste caso ao plano horizontal de projecção, a projecção horizontal da figura da secção apresenta-se na sua verdadeira grandeza pelo que não será necessário recorrer a um processo geométrico auxiliar (Fig. 71).

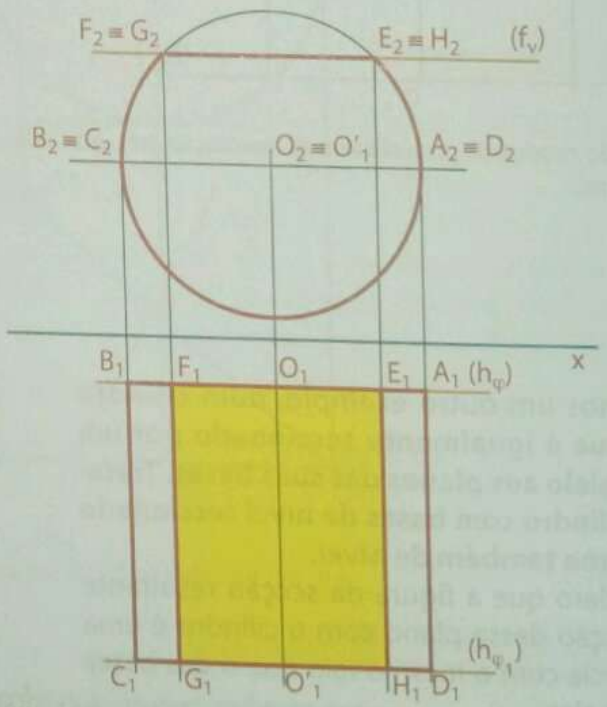


Fig. 71 Secção produzida num cilindro por um plano paralelo ao seu eixo.

Determinemos a figura da secção produzida num cilindro de revolução, de bases de nível, por um plano vertical.

Em primeiro lugar, devemos fazer um estudo de identificação do tipo de secção que este plano produz no sólido.

O plano secante é vertical e o eixo do cilindro também o é, portanto são paralelos.

Numa relação entre uma recta vertical e um plano vertical podemos dizer que **qualquer recta vertical, se não está contida nesse plano vertical, é paralela a ele.**

O plano secante, além de ser paralelo ao eixo, contém duas das geratrizes do cilindro, logo a figura da secção daí resultante é um **paralelogramo**. Porque se trata dum cilindro de revolução o paralelogramo é rectângulo.

Passemos à determinação da figura da secção. O plano secante intersecta o cilindro segundo duas geratrizes e dois segmentos de recta contidos nas bases.

A determinação dos pontos que definem a figura da secção é directa.

Quando o traço horizontal do plano secante intersecta a projecção horizontal das base do sólido, origina as projecções horizontais de quatro pontos, sendo dois de cada uma das bases, nomeadamente A_1, B_1, C_1 e D_1, coincidentes dois a dois, $A_1 \equiv D_1$ e $C_1 \equiv B_1$.

As projecções frontais desses pontos A_2, B_2, C_2 e D_2, encontram-se sobre as projecções frontais das respectivas bases (Fig. 72).

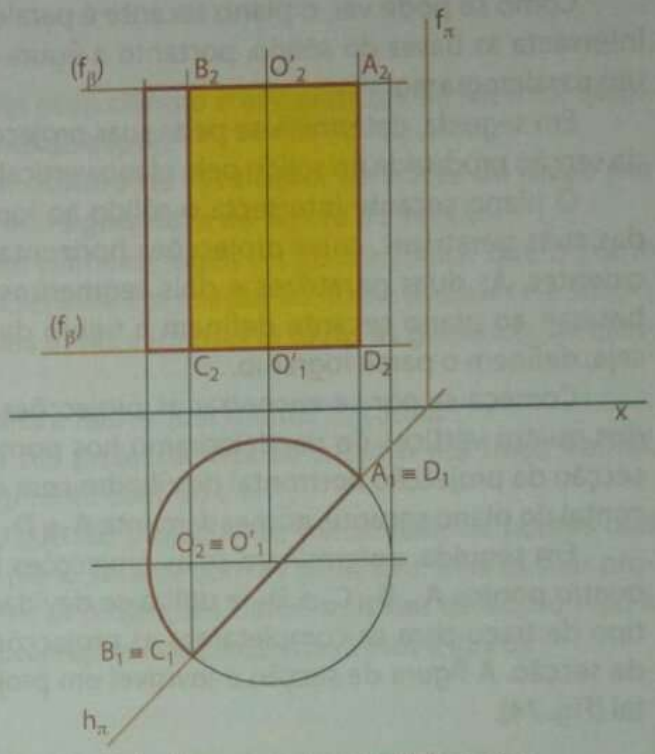


Fig. 72 Secção produzida por um plano paralelo ao eixo.

Tendo em conta que o plano secante não é paralelo a nenhum dos planos de projecção, a figura da secção não se encontra em verdadeira grandeza em nenhuma das suas projecções.

Para obtenção da verdadeira grandeza da figura da secção $[A_r B_r C_r D_r]$ efectuou-se um rebatimento, sobre o plano frontal de projecção (Fig. 73).

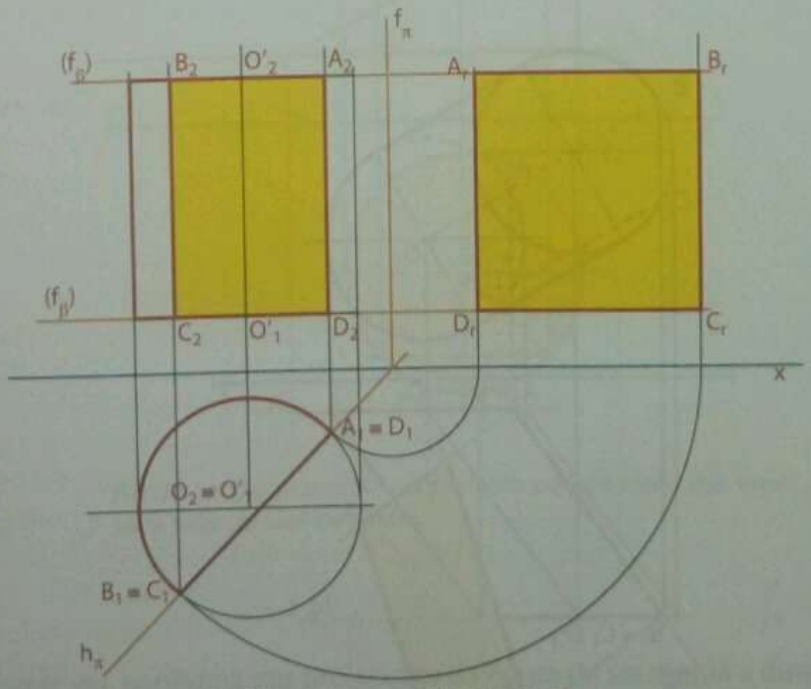


Fig. 73 Verdadeira grandeza da secção

Segue-se a determinação da figura da secção produzida num cilindro oblíquo. O cilindro tem as suas bases de frente e é seccionado por um plano projectante horizontal.

O primeiro passo consiste em efectuar um estudo que permite identificar o tipo de secção que daí pode resultar.

Como se pode ver, o plano secante é paralelo ao eixo e intersecta as bases do sólido, portanto a figura da secção é um paralelogramo.

Em seguida, determina-se pelas suas projecções a figura da secção produzida no sólido pelo plano vertical.

O plano secante intersecta o sólido ao longo de duas das suas geratrizes, cujas projecções horizontais são coincidentes. As duas geratrizes e dois segmentos comuns às bases e ao plano secante definem a figura da secção, ou seja, definem o paralelogramo.

Começa-se por se encontrar as projecções horizontais dos quatro vértices do paralelogramo nos pontos de intersecção da projecção horizontal do cilindro com o traço horizontal do plano secante, nomeadamente $A_1 \equiv D_1$ e $B_1 \equiv C_1$.

Em seguida, determinam-se as projecções frontais dos quatro pontos A_2, B_2, C_2 e D_2, e utiliza-se devidamente cada tipo de traço para se completarem as projecções da figura da secção. A figura da secção é invisível em projecção frontal (Fig. 74).

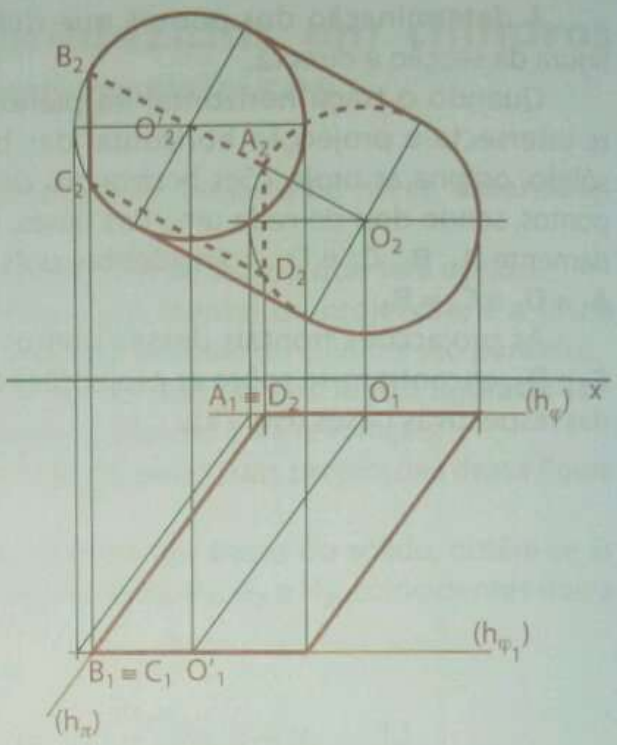


Fig. 74 Projecções da figura da secção

Um rebatimento do plano vertical sobre o plano horizontal de projecção permitiu obter a verdadeira grandeza da figura da secção $[A_rB_rC_rD_r]$ (Fig. 75).

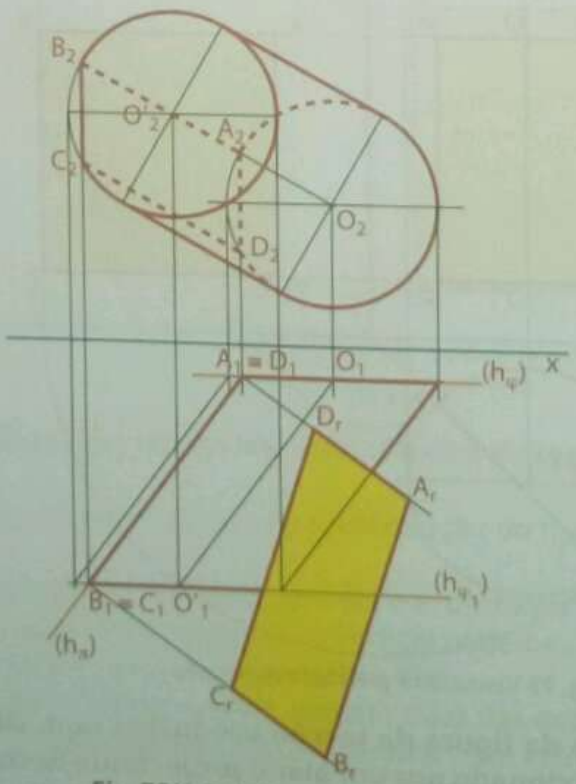


Fig. 75 V. G. da figura da secção

Secções elípticas em cilindros

Um plano que não seja paralelo aos planos das bases dum cilindro e às geratrizes do mesmo, quando o secciona, a figura da secção é uma elipse ou segmento da elipse.

Determinemos a figura da secção produzida num cilindro de revolução, de bases de nível, por um plano π, de topo. Determinemos, também, a verdadeira grandeza da figura da secção.

Conforme o que é recomendável, identificamos, em primeiro lugar, o tipo de cónica que o plano secante produz no sólido. Analisando a posição do plano secante em relação ao eixo e às bases do sólido, verificamos que não é paralelo ao eixo nem aos planos das bases e intersecta todas as geratrizes do cilindro, logo a figura da secção é uma **elipse**.

A determinação da figura da secção é bastante simples e não requer muitos traçados.

Qualquer figura contida num plano de topo tem a sua projecção frontal sobre o seu traço frontal. Portanto a projecção frontal da figura da secção é um segmento contido em f_π.

O plano secante corta todas as geratrizes do sólido, que são projectantes horizontais. Os pontos que definem a figura da secção situam-se nas intersecções do plano secante com as geratrizes, logo as suas projecções horizontais coincidem com os pontos que definem as projecções horizontais das bases, ou seja, a projecção horizontal da figura da secção coincide com as projecções horizontais das bases (Fig. 76).

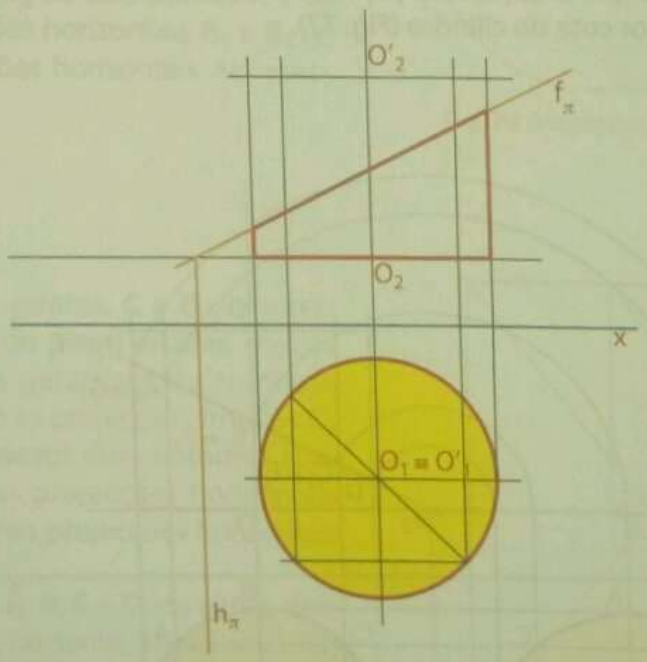


Fig. 76 Secção produzida num cilindro por um plano que intersecta todas as suas geratrizes.

Como se pode ver, nenhuma das projecções da figura da secção dá a dimensão real da secção. A projecção frontal é um segmento de recta, e a projecção horizontal é uma circunferência.

Portanto, faz sentido que se determine a verdadeira grandeza da figura da secção para se perceber claramente a forma e as dimensões da figura da secção.

A determinação da verdadeira grandeza da figura da secção exige a marcação dos principais pontos para a construção da elipse e outros que estejam distribuídos de forma equilibrada ao longo da curva, designadamente **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G** e **H**. Oito pontos serão os mínimos necessários para efectuar o desenho, mais ou menos preciso, da curva.

Os principais pontos de uma elipse são os seus vértices que constituem extremos dos seus eixos maior e menor, que se bissectam de forma perpendicular.

O eixo maior é o segmento de recta de maior comprimento que toca dois pontos da curva, cujos extremos, neste caso, correspondem aos pontos de intersecção do plano secante com as geratrizes do contorno aparente frontal, os pontos **D** e **H**.

O eixo menor do cilindro, como sabe, é perpendicular no ponto médio, ao eixo maior. Uma vez que o eixo maior é de frente, o eixo menor, pertencendo ao mesmo plano de topo, para que seja concorrente perpendicular, só pode ser de topo.

Determinámos o ponto médio do eixo maior e designámos em projecção frontal $B_2 \equiv F_2$, projecção frontal do eixo menor, que é de topo e determina-se as suas projecções horizontais, B_1 e F_1.

Já temos quatro pontos, os vértices da elipse. Falta encontrar mais quatro para se efectuar o rebatimento da figura da secção, para se determinar a sua verdadeira grandeza.

Esses outros quatro pontos deverão ser distribuídos de forma equilibrada para uma maior precisão no traçado da curva. A marcação dos pontos é directa em ambas as projecções, porquanto tanto as geratrizes, como o plano secante são projectantes.

Efectuando o rebatimento dos oito pontos sobre o plano horizontal de projecção, obtém-se a verdadeira grandeza da figura da secção [$A_r B_r C_r D_r E_r F_r G_r H_r$]. O rebatimento foi efectuado sobre o plano de nível, que contém a base de menor cota do cilindro (Fig. 77).

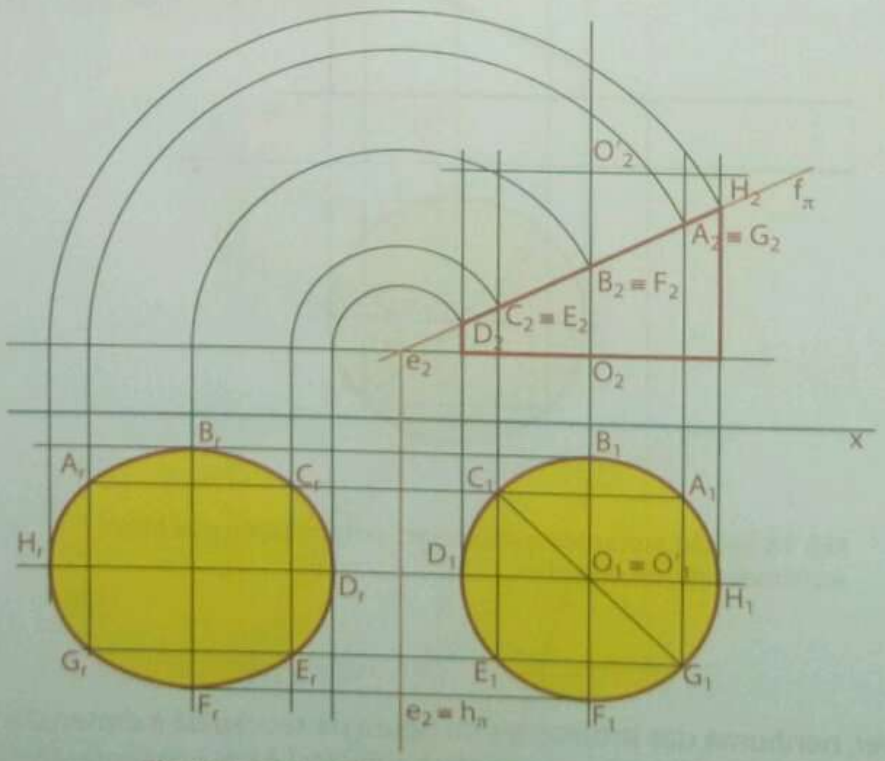


Fig. 77 Secção elíptica

Determinemos a figura da secção produzida num cilindro oblíquo, de bases de nível, por um plano de topo.

Em primeiro lugar, devemos identificar o tipo de secção que o plano produz no cilindro.

O plano secante não é paralelo aos planos das bases do cilindro, portanto, a figura da secção não pode ser uma circunferência.

O plano secante não é paralelo ao eixo do cilindro, portanto, a figura da secção só pode ser uma elipse ou segmento da elipse. Como o plano secante intersecta todas as geratrizes do cilindro, a figura da secção é, sem dúvida, uma elipse.

O segundo passo consiste em determinar os pontos em que o plano secante intersecta as linhas que definem os contornos aparente frontal e horizontal do sólido.

Nas intersecções do traço frontal do plano secante com as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente frontal, obtêm-se as projecções frontais A_2 e B_2 de dois pontos **A** e **B**, da secção cujas projecções horizontais A_1 e B_1 se situam sobre as projecções horizontais das mesmas geratrizes (Fig. 78).

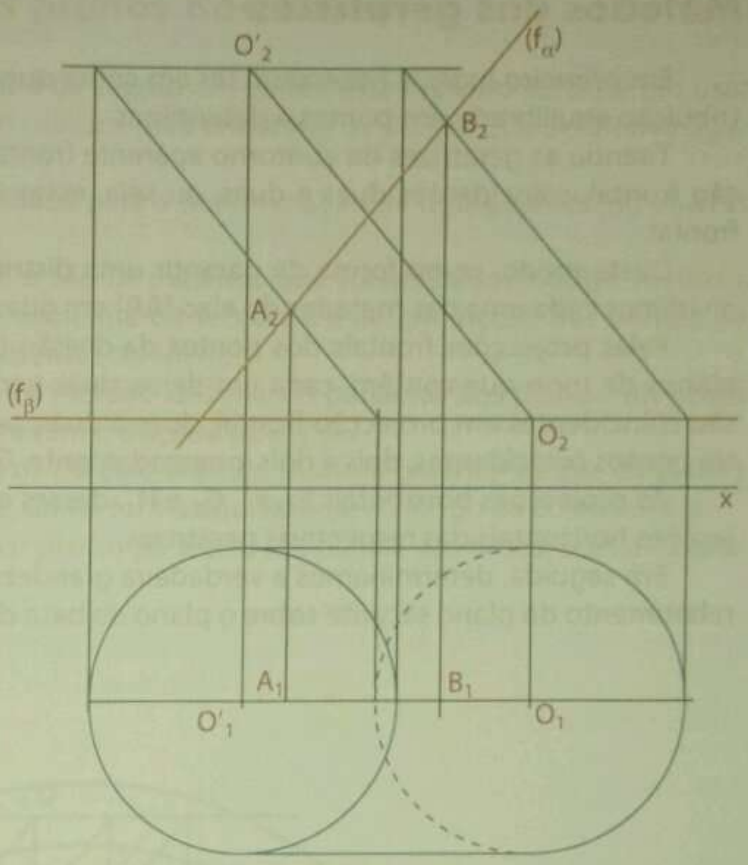


Fig. 78 Projecções de dois pontos da figura de secção

As projecções dos pontos, **C** e **D**, de intersecção do traço frontal do plano secante com as projecções frontais das geratrizes do contorno aparente horizontal, são as projecções frontais C_2 e D_2, dos outros dois pontos dos contornos aparentes do cilindro, cujas projecções horizontais C_1 e D_1, encontram-se nas projecções horizontais das mesmas geratrizes.

Os quatro pontos, **A**, **B**, **C** e **D**, da elipse definem os seus dois eixos, portanto, são os seus vértices (Fig. 79). Uma vez conhecidos os vértices da elipse, o passo seguinte será o da determinação de outros pontos da elipse que nos permitem traçar uma curva relativamente mais precisa.

Para a determinação desses pontos, tal como em cones, poderão ser usados dois métodos, nomeadamente o método das geratrizes e o método dos planos paralelos aos planos das bases.

Ao contrário do que acontece nas secções cónicas, o método das geratrizes, em secções cilíndricas, oferece maior nível de rigor.

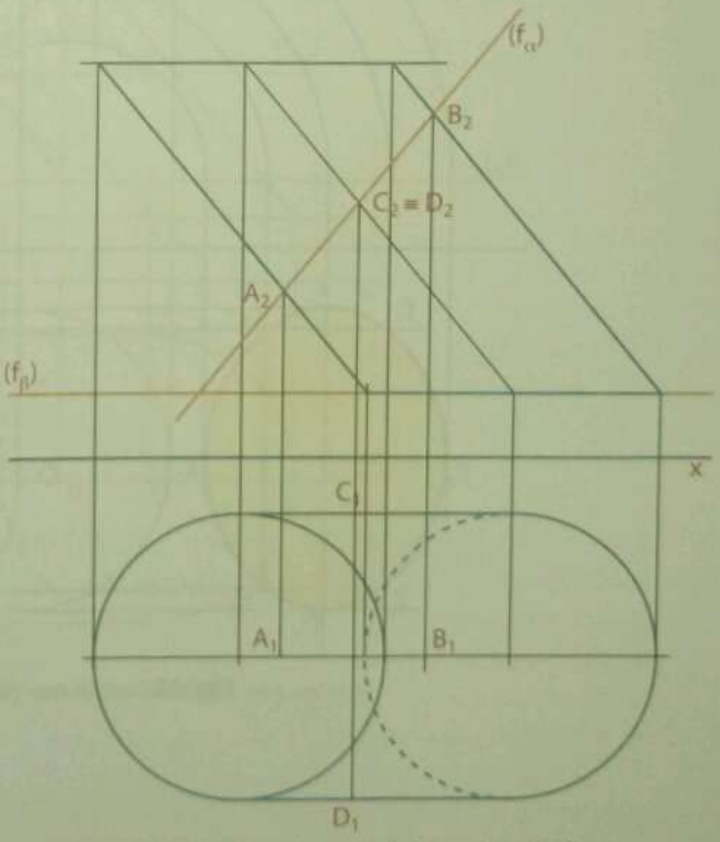


Fig. 79 Projecções de mais dois pontos da figura da secção

Métodos das geratrizes

Em primeiro lugar, é necessário ter em conta que as geratrizes a escolher deverão permitir uma distribuição equilibrada dos pontos a determinar.

Tirando as geratrizes do contorno aparente frontal deste cilindro, todas as geratrizes são em projecção frontal, coincidentes duas a duas, ou seja, essas geratrizes situam-se no mesmo plano projectante frontal.

Deste modo, como forma de garantir uma distribuição equilibrada dos pontos ao longo da curva, dividimos cada uma das metades do eixo [**AB**] em duas partes iguais.

Pelas projecções frontais dos pontos da divisão de cada uma das metades do eixo [**AB**], traçam-se planos de topo que contêm, cada um deles, duas geratrizes do cilindro. Como se disse, essas geratrizes são coincidentes em projecção frontal, duas a duas; portanto, originam projecções frontais de mais quatro pontos coincidentes, dois a dois, nomeadamente, $G_2 \equiv H_2$ e $E_2 \equiv F_2$.

As projecções horizontais E_1, F_1, G_1 e H_1, desses quatro pontos obtêm-se, obviamente, sobre as projecções horizontais das respectivas geratrizes.

Em seguida, determinamos a verdadeira grandeza da figura da secção [$A_rB_rC_rD_rE_rF_rG_rH_r$] através do rebatimento do plano secante sobre o plano da base de menor cota do cilindro (Fig. 80).

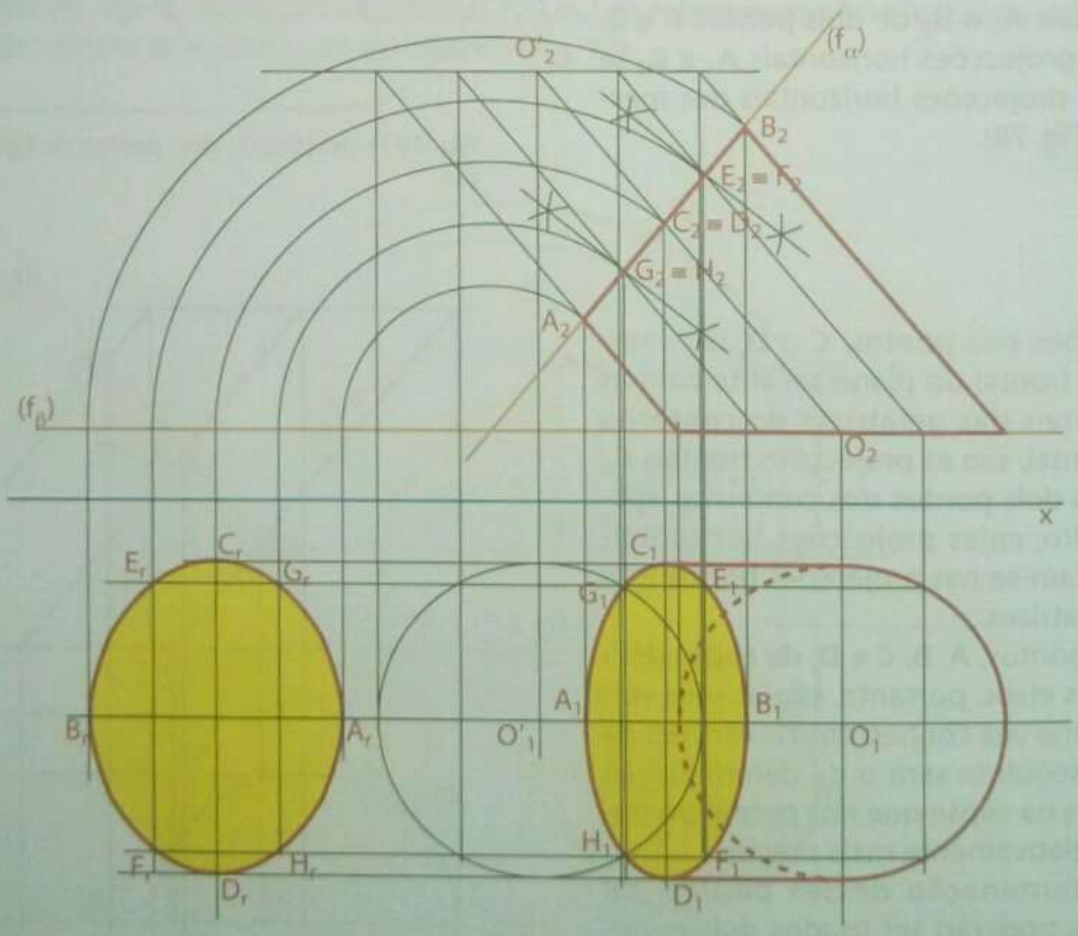


Fig. 80 Secção no cilindro e sua V. G.

Método dos planos paralelos aos planos das bases

Tal como se procede na determinação da figura da secção em cones, este método consiste em usar planos auxiliares, paralelos aos planos das bases do cilindro, para encontrar os pontos que definem a figura da secção.

Consideremos o cilindro e o plano secante usados para a determinação da figura da secção através do método das geratrizes.

Os primeiros passos da resolução do exercício são os mesmos que foram dados noutro método, nomeadamente a identificação do tipo de cónica resultante da secção, e a determinação dos pontos de intersecção do plano secante com os contornos aparentes do sólido.

Assim sendo, o passo seguinte é a aplicação do método dos planos paralelos aos planos das bases para a determinação dos restantes pontos que permitem o traçado da elipse.

Divide-se ao meio cada um dos dois semi-eixos do eixo [**AB**] de modo a garantir-se que os planos que por aí passam determinem pontos distribuídos, duma forma equilibrada, ao longo da curva cónica.

Por esses pontos, como já se disse, faz-se passar planos paralelos aos planos das bases; portanto, planos de nível (Fig. 81).

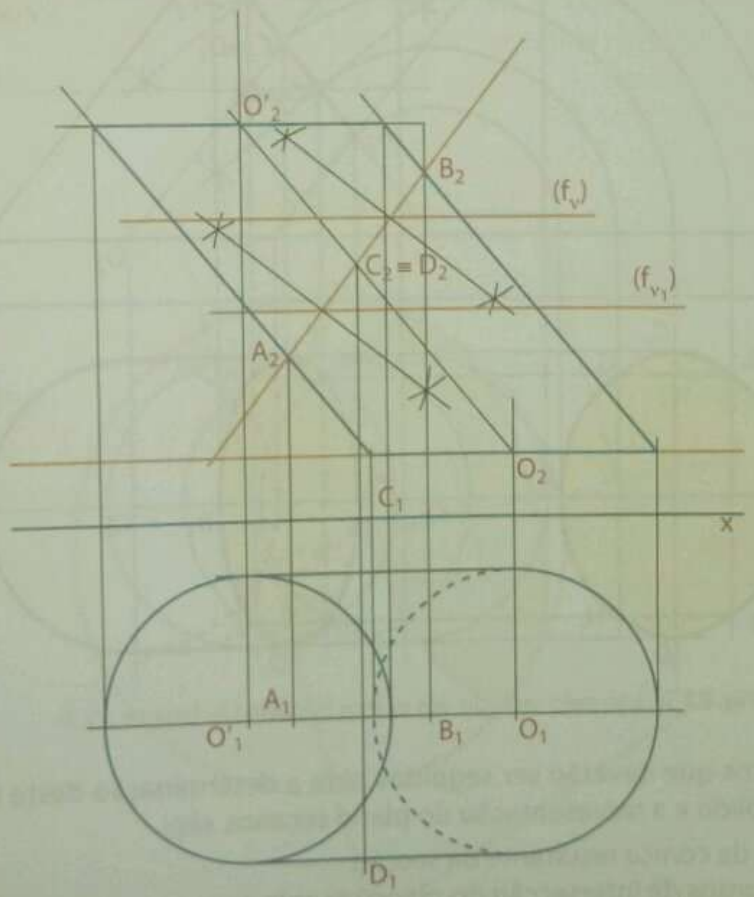


Fig. 81 Representação dos planos auxiliares paralelos aos planos das bases

Cada um dos dois planos de nível vai determinar uma secção no cilindro, resultando duas circunferências iguais às bases. Recorde que os planos secantes, paralelos aos planos das bases dum cilindro, originam um círculo igual às bases do cilindro.

Seguidamente, determina-se a linha de intersecção do plano auxiliar com o plano secante, que neste caso é uma recta de topo, aliás, na intersecção de um plano de topo com um plano de nível o resultado é sempre uma recta de topo.

A intersecção da secção circular auxiliar com a recta de topo de intersecção do plano auxiliar com o plano secante, dá origem a dois pontos procurados, por onde deverá passar a curva elíptica.

Este procedimento é igual para ambos os planos de nível auxiliares. Deste modo, obtivemos mais quatro pontos **E**, **F**, **G** e **H** que, adicionados aos vértices da elipse, fazem um total de oito, que é o número mínimo de pontos para se obter uma elipse relativamente rigorosa.

Seguidamente, unem-se os oito pontos e pinta-se de amarelo.

A verdadeira grandeza da secção determina-se da mesma forma que no caso anterior, pois a figura da secção é a mesma (Fig. 82).

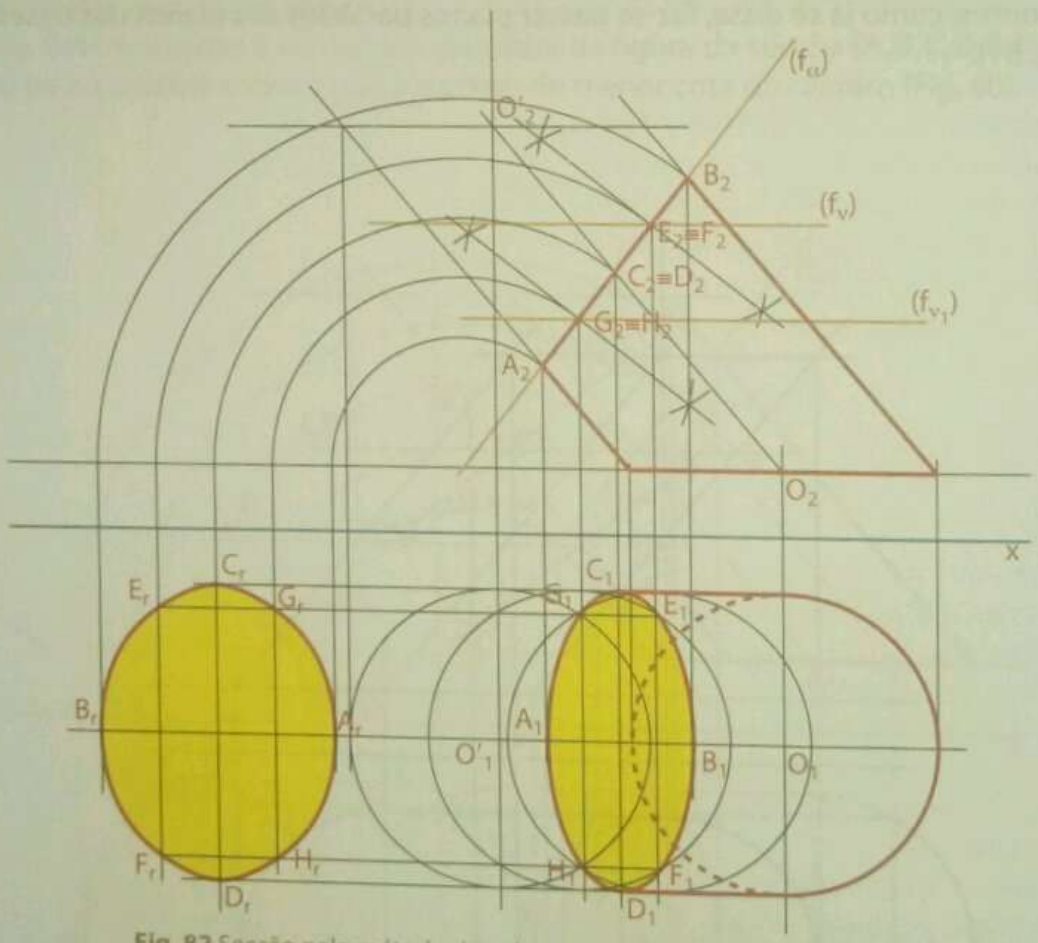


Fig. 82 Secção pelo método dos planos paralelos às bases e a V. G.

Em síntese, os passos que deverão ser seguidos para a determinação deste tipo de secções (elipse), após as projecções do sólido e a representação do plano secante, são:

1. Identificar o tipo de cónica resultante da secção.
2. Determinar os pontos de intersecção do plano secante com os contornos aparentes do sólido.
3. Determinar, sempre que possível, os eixos da elipse.
4. Seguir devidamente os passos de um dos dois métodos, para a determinação dos restantes pontos da secção.
5. Unir os pontos em ambas as projecções e determinar a verdadeira grandeza da figura da secção, caso seja pedido.

Secções planas em esferas

Recorde que os contornos aparente frontal e horizontal duma esfera são invariavelmente duas circunferências, isto é, seja qual for o ângulo donde se observa uma esfera, o seu contorno aparente é sempre uma circunferência.

Independentemente da posição do plano secante, a figura da secção produzida numa superfície esférica é uma **circunferência**. No caso específico da esfera, a figura da secção é um **círculo**.

Na determinação da figura da secção produzida numa esfera é fundamental, após as projecções do sólido e a representação do plano secante, em primeiro lugar, determinar o centro da figura da secção.

O centro da figura da secção, C, situa-se numa recta r, perpendicular ao plano secante, que contém o centro da esfera, O. O ponto C, centro da figura da secção, encontra-se na intersecção da recta r com o plano secante.

Portanto, para se obter o centro da figura da secção, basta traçar-se uma perpendicular ao plano secante, que contém o centro da esfera e encontrar-se o ponto de intersecção dessa perpendicular com o plano secante (Fig. 83).

Caso o plano secante contenha o centro da esfera, o traçado da perpendicular torna-se desnecessário, pois o centro da figura da secção coincide com o centro da esfera, e o raio da secção é igual ao raio da esfera. Numa situação dessas, a figura da secção será o **círculo máximo** da esfera.

A situação contrária ao círculo máximo é um **ponto**, resultante da secção produzida por um plano tangente à superfície esférica.

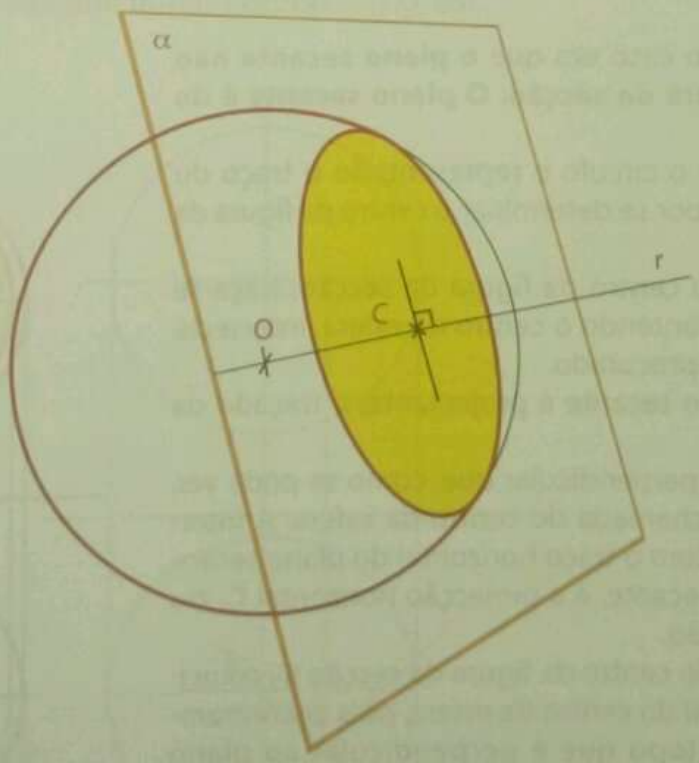


Fig. 83 Secção na esfera

Secções planas produzidas em esferas por planos paralelos aos planos de projecção

Determinemos a figura da secção produzida numa esfera por um plano de nível que contém o seu centro.

Uma vez que o plano secante contém o centro do sólido, não há necessidade de traçar uma perpendicular ao plano secante que contém o centro da esfera, porquanto o centro da figura da secção coincide com o centro da esfera, $O \equiv C$.

Sendo assim, a projecção frontal da figura da secção coincide com a projecção frontal do diâmetro fronto-horizontal da esfera.

A projecção horizontal da figura da secção é o **círculo máximo horizontal**, cujo contorno ou circunferência coincide com o contorno aparente horizontal da esfera.

Qualquer figura contida num plano de nível apresenta-se na sua verdadeira grandeza, em projecção horizontal; portanto, a projecção horizontal da figura da secção está em sua verdadeira grandeza.

Considerou-se a semi-esfera situada entre o plano secante e o plano horizontal de projecção, pelo que essa parte ficou destacada e também coloriu-se toda a projecção horizontal da esfera, pois coincide com a projecção horizontal da figura da secção (Fig. 84).

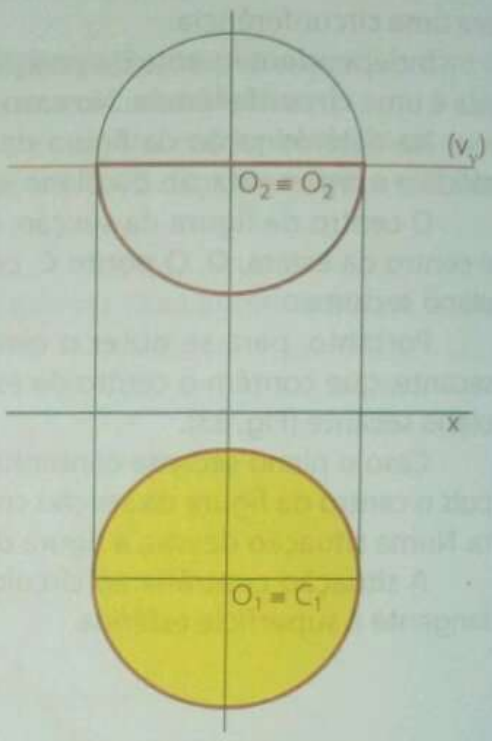


Fig. 84 Círculo máximo

Analisemos um outro caso em que **o plano secante não contém o centro da figura da secção. O plano secante é de frente.**

Uma vez projectado o círculo e representado o traço do plano secante, começa-se por se determinar o centro da figura da secção.

Para se determinar o centro da figura da secção, traça-se uma perpendicular que, contendo o centro da esfera, intersecta o plano secante no ponto procurado.

Uma vez que o plano secante é projectante, o traçado da perpendicular é directo.

Por O_1 traça-se uma perpendicular que, como se pode ver, coincide com a linha de chamada do centro da esfera. A intersecção da perpendicular com o traço horizontal do plano secante, único traço do plano secante, é a projecção horizontal C_1 do centro C da figura da secção.

A projecção frontal do centro da figura da secção C_2 coincide com a projecção frontal do centro da esfera, pois encontram-se na mesma recta de topo que é perpendicular ao plano secante.

Designa-se A_1 a um dos dois pontos de intersecção do traço do plano secante com o contorno aparente horizontal, cuja projecção frontal, A_2, se situa na projecção frontal do diâmetro fronto-horizontal.

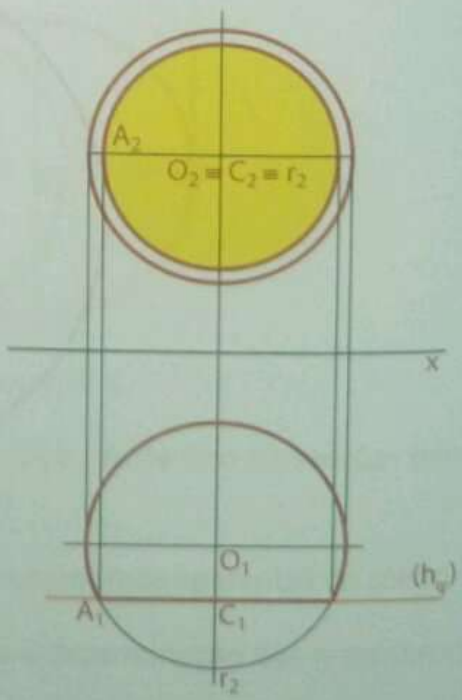


Fig. 85 Secção na esfera por um plano de frente

O ponto **A** é um dos pontos da circunferência da secção, pelo que a distância do centro da figura da secção **C** ao ponto **A** é o raio da figura da secção.

A projecção horizontal da figura da secção é um segmento de recta contido no traço do plano secante e a projecção frontal é um círculo cujo centro é C_2 e o raio é $[C_2A_2]$.

Considerou-se a parte da esfera situada entre o plano secante e o plano frontal de projecção, pelo que representou-se-lhe a vermelho (traço grosso). A figura da secção apresenta-se em sua verdadeira grandeza no plano frontal de projecção (Fig. 85).

Secções planas em esferas por planos projectantes não paralelos aos planos de projecção

Dadas as projecções duma esfera e um plano secante, projectante horizontal, determinemos a figura da secção que esse plano produz no sólido.

O primeiro passo da resolução deste exercício consiste em determinar o centro **C**, da figura da secção que, como sabemos, é um círculo.

Para se obter o ponto **C** traça-se uma perpendicular ao plano secante, que contém o centro da esfera, que intersecta esse plano no ponto procurado, ou seja:

Por O_1 traça-se uma perpendicular r_1, a h_δ.

A intersecção de r_1 com h_δ é a projecção horizontal C_1 do ponto **C**, cuja projecção frontal, C_2 se situa sobre a projecção frontal do diâmetro fronto-horizontal (Fig. 86).

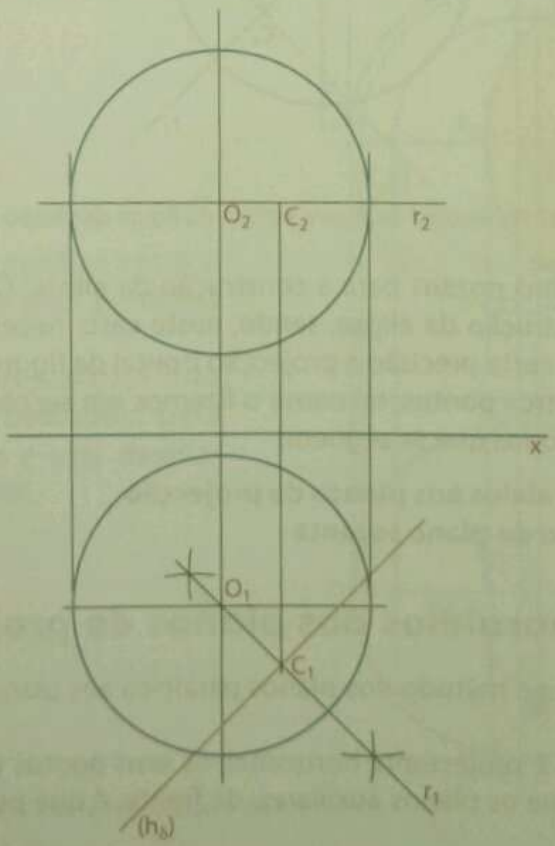


Fig. 86 Determinação do centro da secção

O plano secante, tratando-se dum plano projectante horizontal, a projecção horizontal da figura da secção é directa, é um segmento de recta contido no seu traço horizontal.

A projecção frontal da figura da secção mantém a dimensão real do diâmetro vertical, diminuindo todos os outros diâmetros seus, sendo o menor o diâmetro de nível, [**AB**].

Sendo assim, a deformação do círculo, neste caso, em projecção frontal, transforma-o em elipse, cujo eixo menor é o segmento de recta [$\mathbf{A_2B_2}$].

A intersecção do plano secante com o contorno aparente frontal origina os pontos **K** e **Y**, que são igualmente pontos comuns entre a figura da secção e o contorno aparente frontal da esfera, ou seja, são pontos de tangência entre a secção e o contorno aparente frontal do círculo (Fig. 87).

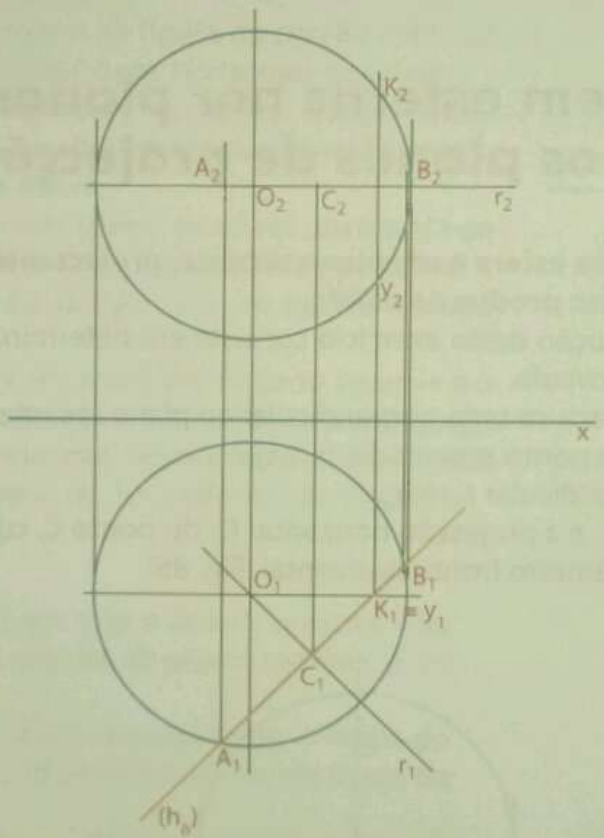


Fig. 87 Projecções de alguns pontos da figura da secção

Deste modo, já temos quatro pontos para a construção da elipse. Como sabe, estes quatro pontos não são suficientes para a construção da elipse, sendo, neste caso, necessários, no mínimo mais quatro pontos para construir com uma certa precisão a projecção frontal da figura da secção.

Para se encontrar esses outros pontos, tal como o fizemos em secções produzidas em cones e cilindros, utiliza-se um dos dois métodos que se seguem:

1. **Método dos planos paralelos aos planos de projecção**
2. **Método de rebatimento do plano secante**

Método dos planos paralelos aos planos de projecção

Este método assemelha-se ao método dos planos paralelos aos planos das bases, estudado nas secções em cones e cilindros.

Dado que o plano secante é projectante horizontal, os seus pontos têm projecção directa no plano horizontal de projecção, pelo que os planos auxiliares, de frente, é que permitem encontrar mais rapidamente a solução do exercício.

A projecção horizontal da figura da secção é um segmento de recta. Os planos auxiliares, de frente, deverão ser distribuídos de forma equidistante no segmento que corresponde à projecção horizontal da figura da secção.

O eixo maior da elipse, [**EF**] é vertical, e contém, naturalmente, o centro **C** da elipse, cujas projecções horizontais são com ele coincidentes, $C_1 \equiv E_1 \equiv F_1$.

Traça-se o plano auxiliar, que permite obter as projecções frontais dos extremos do eixo maior.

Por $C_1 \equiv E_1 \equiv F_1$, traça-se um plano auxiliar, de frente, que determina uma secção circular na esfera que se projecta, em verdadeira grandeza, no plano frontal de projecção. (O diâmetro da circunferência dessa secção corresponde ao segmento do traço do plano secante auxiliar, situado dentro do contorno aparente horizontal da esfera).

A intersecção da circunferência com a projecção frontal da recta de intersecção do plano secante dado, com o plano secante auxiliar, origina as projecções frontais, E_2 e F_2, dos extremos do eixo maior da elipse (Fig. 88).

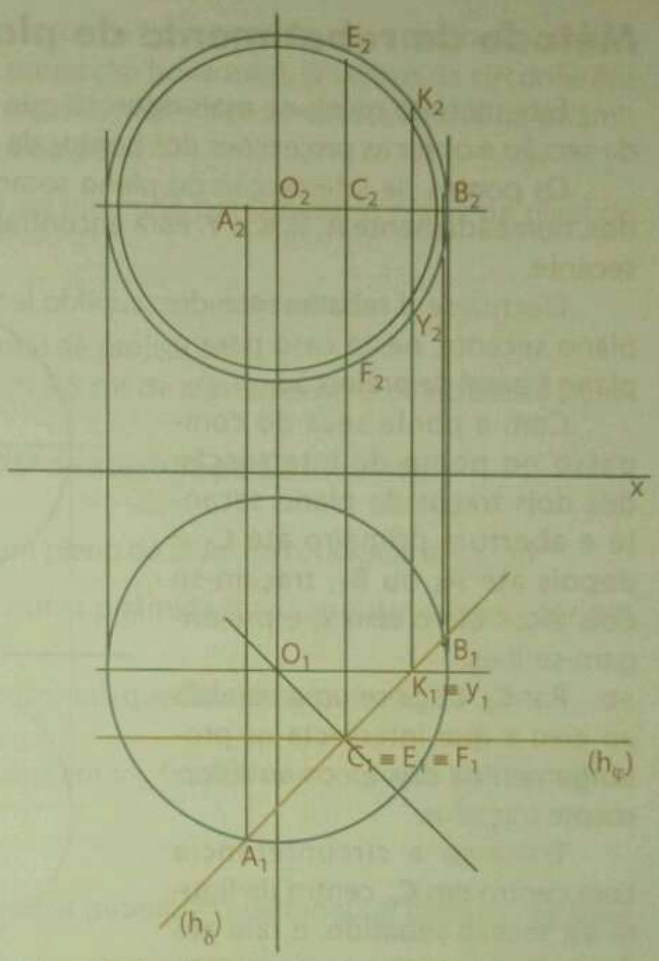


Fig. 88 Projecções de mais pontos da figura da secção

Traça-se mais um plano auxiliar entre o ponto **A** e o segmento [**EF**], o qual permitirá obter os pontos **G** e **H**.

Deste modo, já foram projectados oito pontos da figura da secção bastando, para completar o exercício, uni-los e usar devidamente cada tipo de traço (Fig. 89).

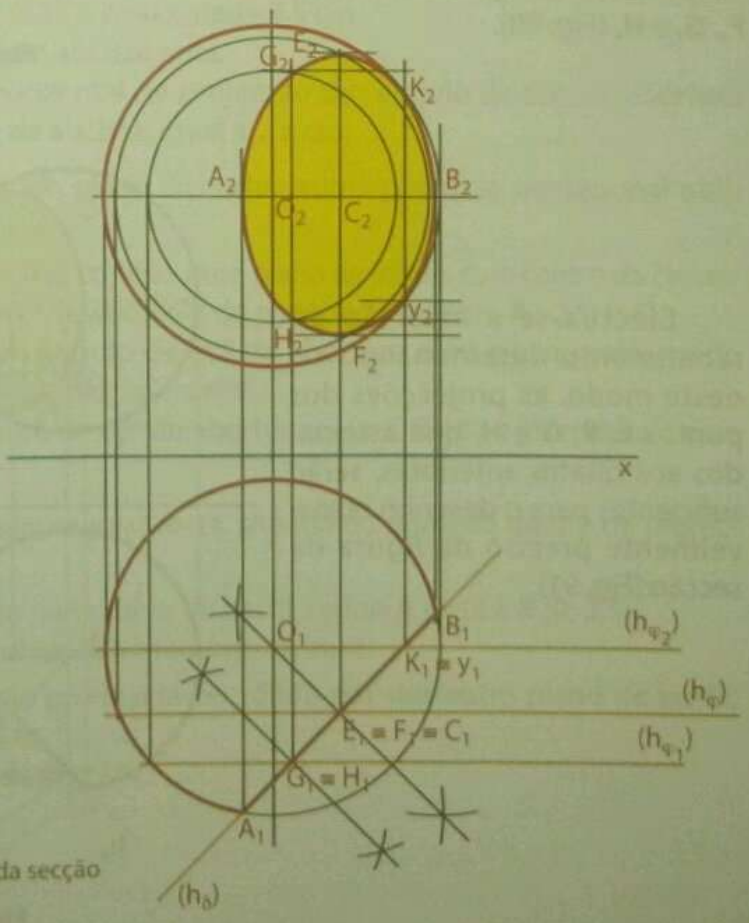


Fig. 89 Projecções da figura da secção

Método do rebatimento do plano secante

Este método revela-se mais rigoroso que o anterior e consiste em efectuar o rebatimento da figura da secção e obter as projecções dos pontos da curva a partir da inversão do rebatimento.

Os pontos de intersecção do plano secante com os contornos aparentes do sólido já são conhecidos, nomeadamente **A**, **B**, **K** e **Y**. Para encontrar outros, vamos utilizar o método de rebatimento do plano secante.

Efectua-se o rebatimento do plano secante, neste caso para o plano frontal de projecção.

Com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção dos dois traços do plano secante e abertura primeiro até C_1 e depois até A_1 ou B_1, traçam-se dois arcos até o eixo **x**, e prolongam-se-lhes.

Por C_2, traça-se uma paralela ao eixo **x** que intersecta os prolongamentos dos arcos anteriormente traçados.

Traça-se a circunferência com centro em C_r, centro da figura da secção rebatido, e raio até A_r ou B_r e marcam-se os pontos necessários designadamente E_r, F_r, G_r e H_r (Fig. 90).

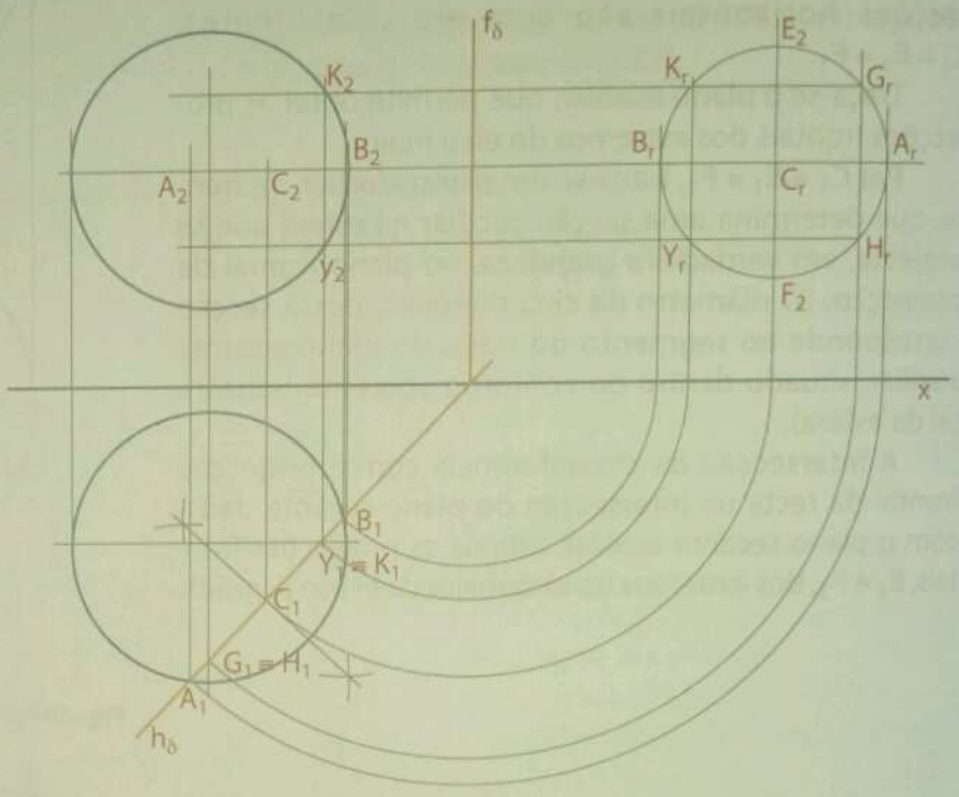


Fig. 90 Rebatimento da figura de secção

Efectua-se a inversão do rebatimento determinando-se, deste modo, as projecções dos pontos **E**, **F**, **G** e **H**, que associados aos quatro anteriores, serão suficientes para o desenho razoavelmente preciso da figura da secção (Fig. 91).

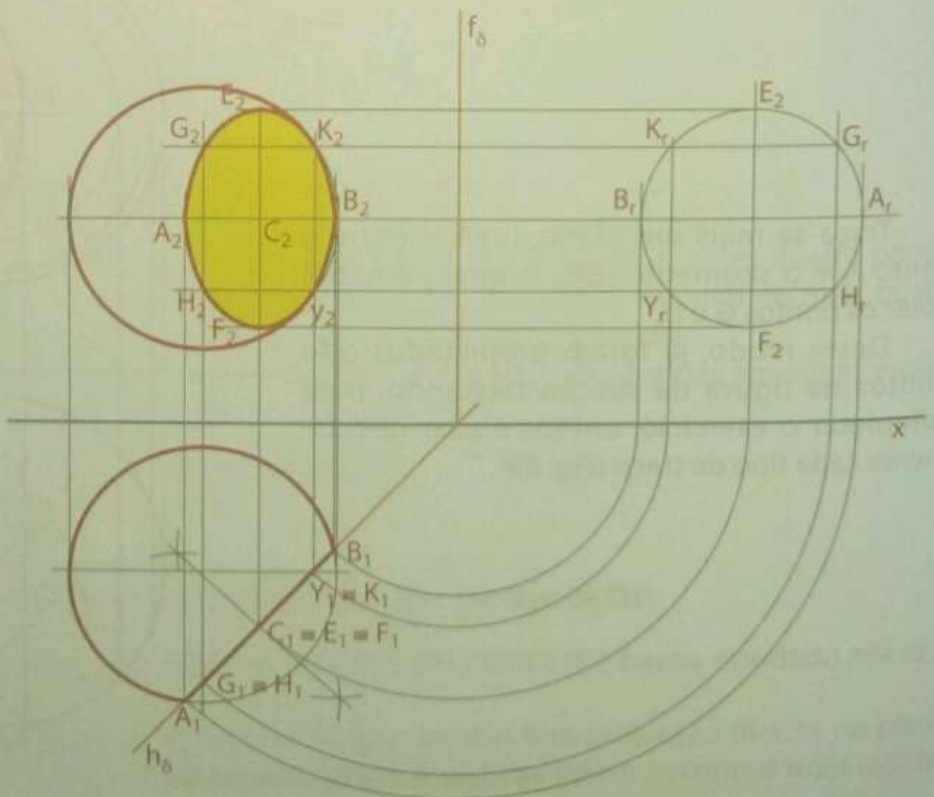


Fig. 91 Projecções da figura da secção



1. Uma pirâmide pentagonal regular situa-se no 1.º diedro e com a base contida num plano de nível. A altura da pirâmide é de 5 cm, cujo vértice é invisível em projecção horizontal. O centro da circunferência, circunscrita à base da pirâmide, é o ponto **O** (3,5; 6) e o raio mede 3 cm. A aresta lateral da pirâmide, que contém o vértice de maior afastamento da base, é de perfil.

   Determine as projecções da figura da secção produzida na pirâmide por um outro plano de nível de cota igual a 4,5 cm.

2.* Represente, pelas suas projecções, um prisma pentagonal oblíquo, sabendo que:
   - Uma das bases do prisma está assente no plano horizontal de projecção.
   - Os centros das circunferências, circunscritas às bases, têm 3,5 cm de afastamento, e o raio mede 3 cm.
   - A face de maior afastamento do prisma é de frente.
   - As arestas laterais do prisma fazem com ν_0 ângulos de 75º de abertura para a esquerda.
   - A altura do prisma mede 5 cm.

   Determine a figura de secção produzida no prisma por um plano de nível de cota igual a 3,5 cm.

3.* Construa as projecções da figura de secção produzida numa pirâmide quadrangular regular, por um plano de frente de 3,5 cm de afastamento, sabendo que:
   - A base da pirâmide situa-se num plano projectante horizontal, que faz um ângulo de 30º com φ_0, de abertura par a esquerda.
   - Uma das arestas da base tem um extremo em ν_0 e outro em φ_0, faz 60º com o plano horizontal de projecção, de abertura para a direita e mede 4,5 cm.
   - A altura da pirâmide é de 6 cm.

4.* Construa as projecções da figura da secção produzida numa pirâmide quadrangular oblíqua, de base de nível, situada no 1º diedro, sabendo que:
   - A base da pirâmide tem uma diagonal que faz 20º com φ_0, de abertura para a esquerda; o centro da circunferência a ela circunscrita é o ponto **O** (0; 6; 5), e o raio mede 3,5 cm.
   - O vértice da pirâmide é um ponto do eixo **x**, e tem abcissa nula.
   - O plano secante é de topo, faz com o plano horizontal de projecção um ângulo de 60º de abertura para esquerda e intersecta o eixo **x** num ponto de abcissa, igual a 2,5 cm.

5. Desenhe as projecções da figura da secção que um plano β produz numa pirâmide pentagonal oblíqua, situada no 1º diedro, sabendo:
   - A base da pirâmide é um pentágono regular [**ABCDE**], contido num plano de frente, cujo centro da circunferência a ela circunscrita é o ponto **O** (0; 7; 3,5), e um dos vértices do polígono é o ponto **A** (-2,5; 7; 5).
   - A aresta lateral [**AV**] é de nível, faz com φ_0 um ângulo de 60º de abertura para a esquerda, mede 8 cm, e o vértice **V** da pirâmide é invisível em projecção frontal.
   - O plano secante β é vertical, faz com φ_0 um diedro de 60º de abertura para a direita e intersecta o eixo **x** num ponto de abcissa, igual a – 2,5 cm.

6. Construa as projecções de uma pirâmide triangular regular recta, situada no primeiro diedro de projecção, sabendo que:
   - A base é um triângulo equilátero [**ABC**], contido num plano de perfil, sendo **A** (5; 0) e **B** (0; 3,5)
   - A altura da pirâmide é de 5 cm, e o seu vértice situa-se a esquerda da base.

   a) Determine as projecções da figura da secção produzida no sólido por um outro plano de perfil, que se situa 2 cm à esquerda do plano da base.
   b) Determine a verdadeira grandeza da figura da secção.

7.* Desenhe as projecções de um prisma quadrangular oblíquo, assente por uma das bases num plano de topo, que faz com v_0 um ângulo de 40º de abertura para a direita. As bases são quadrados de 5 cm de lado, e a altura do prisma é de 2,5 cm. Uma das arestas da base, de referência, pertence ao plano horizontal de projecção e outra ao plano frontal de projecção. As projecções frontais e horizontais das arestas laterais fazem com o eixo x, respectivamente, ângulos de 50º e 40º, de abertura para a esquerda.

a) Determine a figura da secção produzida no prisma por um plano vertical, que faz com o plano frontal de projecção um diedro de 45º de abertura para a direita, e intersecta o eixo x 3,5 cm à esquerda da aresta de cota nula.

b) Determine a verdadeira grandeza da figura da secção.

8.* Represente, pelas suas projecções, um prisma hexagonal oblíquo, tendo em conta que:

- As bases do prisma são hexágonos regulares, assentes em planos projectantes horizontais, que fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 60º de abertura para a esquerda.
- A aresta [**AB**] da base mais próxima do plano frontal de projecção mede 2,5 cm, existe em v_0 e o vértice **A**, o mais próximo de φ_0, tem 2,5 cm de afastamento.
- A altura do prisma mede 6 cm e as arestas laterais são de nível, e fazem com φ_0 ângulos de 45º de abertura para a direita.

a) Determine as projecções da figura da secção produzida no prisma por um plano de perfil, que contém o ponto médio da linha que une os centros das bases do prisma.

b) Determine a verdadeira grandeza da figura da secção.

9. Indique com V as afirmações verdadeiras, e com F as falsas:

a) Num cone, uma secção é um ponto, se o plano secante intersecta todas as geratrizes duma superfície cónica.

b) A figura duma secção pode ser uma circunferência apenas em casos em que o plano secante é paralelo ao plano da base.

c) Num cone, se a recta de intersecção do plano secante que contém o vértice com o plano da base intersectar a base, a figura da secção é uma recta.

d) Uma hipérbole resulta da intersecção duma superfície cónica com um plano que é paralelo a duas das geratrizes dessa superfície.

10.* Construa as projecções de um cone de revolução, situado no 1.º diedro, sabendo que:

- A base do cone situa-se num plano de frente, de afastamento igual a 1 cm.
- O centro da base tem 4 cm de cota, e o raio mede 3 cm.
- A altura do cone é de 7 cm.

Determine a secção produzida no cone por um plano de frente, de 4 cm de afastamento.

11. Desenhe as projecções de um cone oblíquo, situado no 1.º diedro de projecção, sabendo que:

- A base do cone é um círculo, contido no plano horizontal de projecção, cujo centro é ponto **O** (0; 3,5; 0).
- Um dos pontos da base pertence ao plano frontal de projecção.
- O vértice do cone é o ponto **V** (3,5; 6; 7).

Determine a secção produzida no cone por um plano de topo, que faz com v_0 um diedro de 60º de abertura para a esquerda e que contém o ponto médio do eixo do cone.

12.* Desenhe as projecções dum cone oblíquo, situado no 1.º diedro, sabendo que:

- A base pertence a v_0, o seu raio mede 3,5 cm, e o seu centro é o ponto **O**, de afastamento igual a 4 cm e abcissa 0 cm.
- O vértice do cone é o ponto **V** (6; 7; 7).

Usando o método das geratrizes, construa as projecções da figura da secção produzida no cone por um plano projectante horizontal, que contém um ponto do eixo do cone de 4,5 cm de afastamento e faz um diedro de 45º com φ_0, de abertura para a esquerda.

13. Indique com V as afirmações verdadeiras, e com F as falsas:

a) Curvas cónicas não são apenas aquelas que se obtêm seccionando superfícies cónicas, como também aquelas que são resultantes de secções cilíndricas.

b) A elipse resulta da secção produzida numa superfície cilíndrica por um plano que contém duas das suas geratrizes.

c) Uma secção cilíndrica pode ser uma recta.

d) Numa superfície cilíndrica não é possível obter um segmento da elipse.

e) Uma superfície cilíndrica é também uma superfície cónica.

14.* Determine a figura da secção produzida num cilindro oblíquo, situado no 1.º diedro, por um plano vertical, considerando que:

- As bases do cilindro são de frente e distam entre si 6 cm.
- A base mais próxima do plano frontal de projecção tem 1 cm de afastamento, e a cota do seu centro é de 5 cm e o seu raio mede 4 cm.
- As geratrizes do cilindro são de nível e fazem com o eixo **x** ângulos de 40º de abertura para a esquerda.
- O plano secante contém o ponto do eixo do cilindro, de 4 cm de afastamento, e faz um diedro de 60º com φ_0, de abertura para a direita.

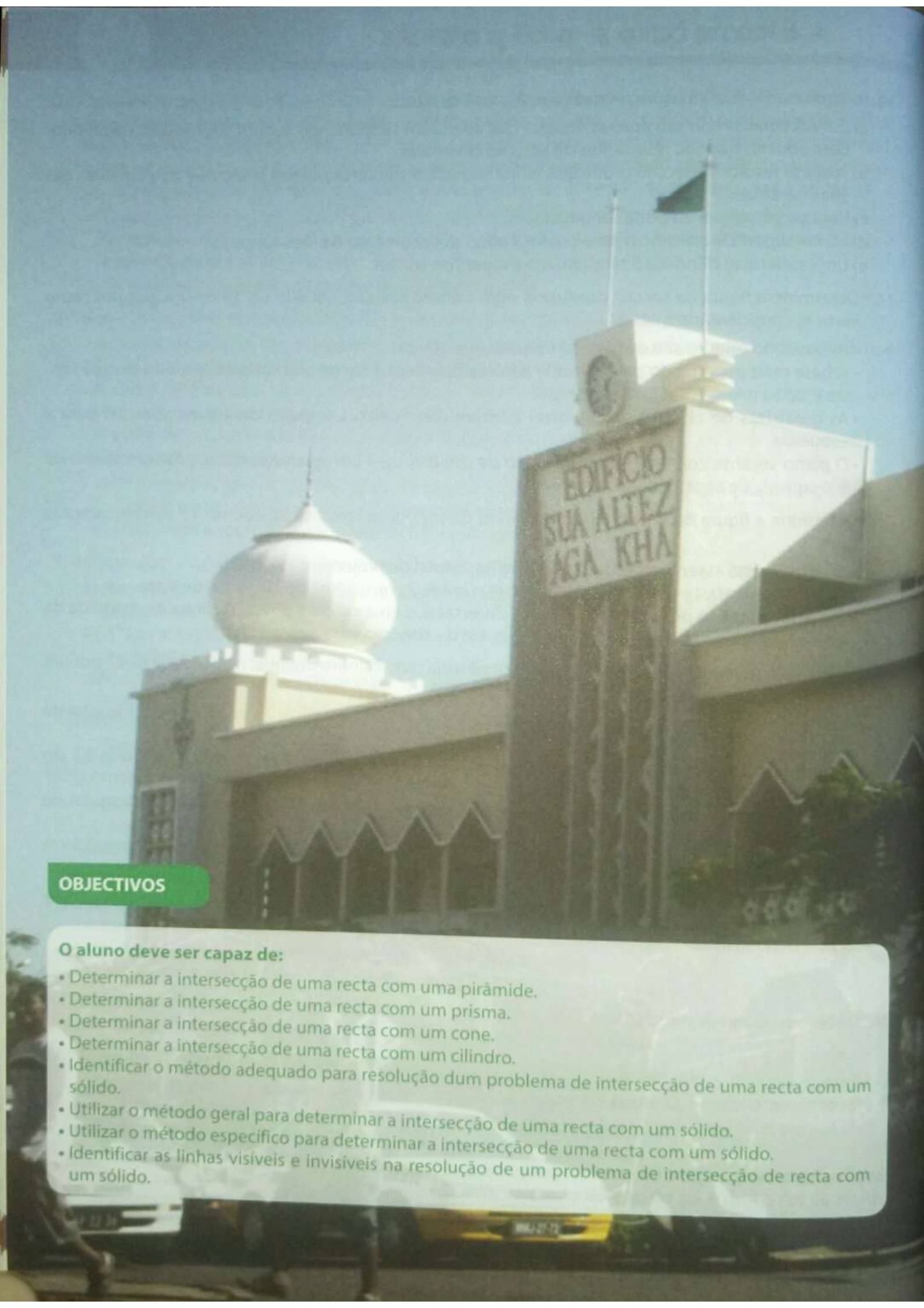
15.* Determine a figura da secção produzida num cilindro de revolução, situado no 1.º diedro, sabendo que:

- O cilindro está assente pela base no plano horizontal de projecção;
- O centro tem afastamento igual a 5 cm, o raio mede 3 cm, e altura do cilindro é de 6 cm.
- O plano secante é projectante horizontal, intersecta o eixo **x** 6 cm à direita da linha de chamada do eixo do cilindro e faz com φ_0, um diedro de 45º de abertura para a esquerda.

16. Desenhe as projecções da figura da secção produzida num cilindro oblíquo, de bases de nível, por um plano de topo, sabendo que:

- A base mais próxima de ν_0 tem 1 cm de cota, e a de maior cota dista 7 cm do plano horizontal de projecção.
- O centro da base, de menor cota, tem 7 cm de afastamento, e o da base, de maior cota, tem 3,5 cm de afastamento.
- O raio das bases mede 3 cm, e as projecções frontais das geratrizes fazem com o eixo **x** ângulos de 45º de abertura para a esquerda.
- O plano secante faz com ν_0 um ângulo de 30º de abertura para a direita e intersecta o eixo **x**, 3,5 cm à esquerda do centro da base de maior cota.

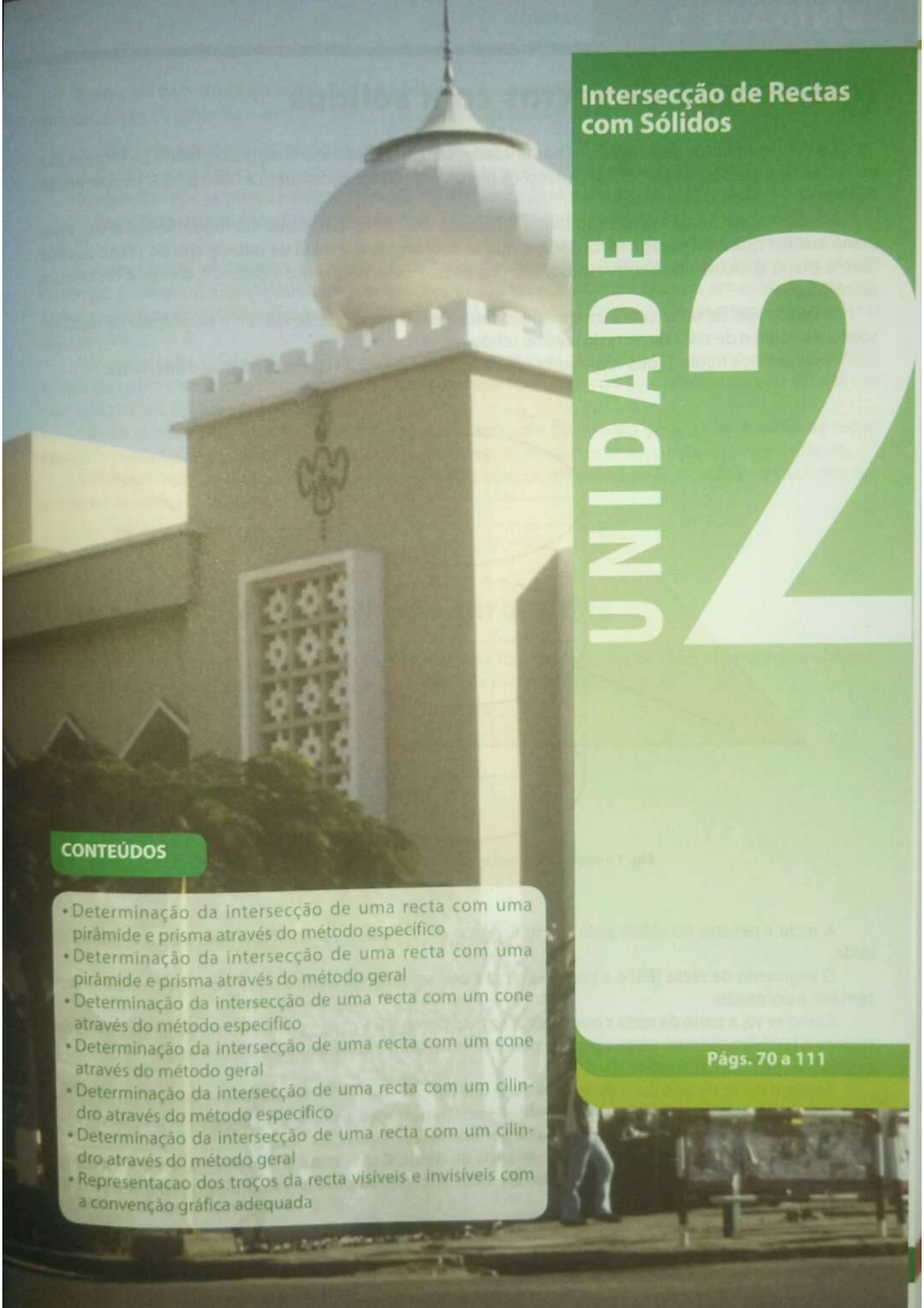
Determine a verdadeira grandeza da figura da secção.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Determinar a intersecção de uma recta com uma pirâmide.
- Determinar a intersecção de uma recta com um prisma.
- Determinar a intersecção de uma recta com um cone.
- Determinar a intersecção de uma recta com um cilindro.
- Identificar o método adequado para resolução dum problema de intersecção de uma recta com um sólido.
- Utilizar o método geral para determinar a intersecção de uma recta com um sólido.
- Utilizar o método específico para determinar a intersecção de uma recta com um sólido.
- Identificar as linhas visíveis e invisíveis na resolução de um problema de intersecção de recta com um sólido.



Intersecção de Rectas com Sólidos

UNIDADE 2

CONTEÚDOS

- Determinação da intersecção de uma recta com uma pirâmide e prisma através do método específico
- Determinação da intersecção de uma recta com uma pirâmide e prisma através do método geral
- Determinação da intersecção de uma recta com um cone através do método específico
- Determinação da intersecção de uma recta com um cone através do método geral
- Determinação da intersecção de uma recta com um cilindro através do método específico
- Determinação da intersecção de uma recta com um cilindro através do método geral
- Representacao dos troços da recta visíveis e invisíveis com a convenção gráfica adequada

Págs. 70 a 111

Intersecção de rectas com sólidos

Os conhecimentos desenvolvidos nas unidades temáticas anteriores, particularmente na intersecção de rectas com planos, na 11.ª Classe, e secções planas em sólidos constituem a base para a compreensão da intersecção de rectas com sólidos.

Na determinação da intersecção duma recta com um plano, vimos que era fundamental o uso dum plano auxiliar que contivesse a recta dada, e que se determinasse a recta de intersecção do plano auxiliar com o plano dado. No presente estudo, um dos passos consiste precisamente em conter a recta num plano auxiliar.

A intersecção de uma recta com um sólido resulta em dois pontos, sendo um o de entrada da recta no sólido, e o outro o de saída da recta do mesmo sólido.

Analisemos a figura 1, que representa um cilindro de revolução e uma recta que o intersecta.

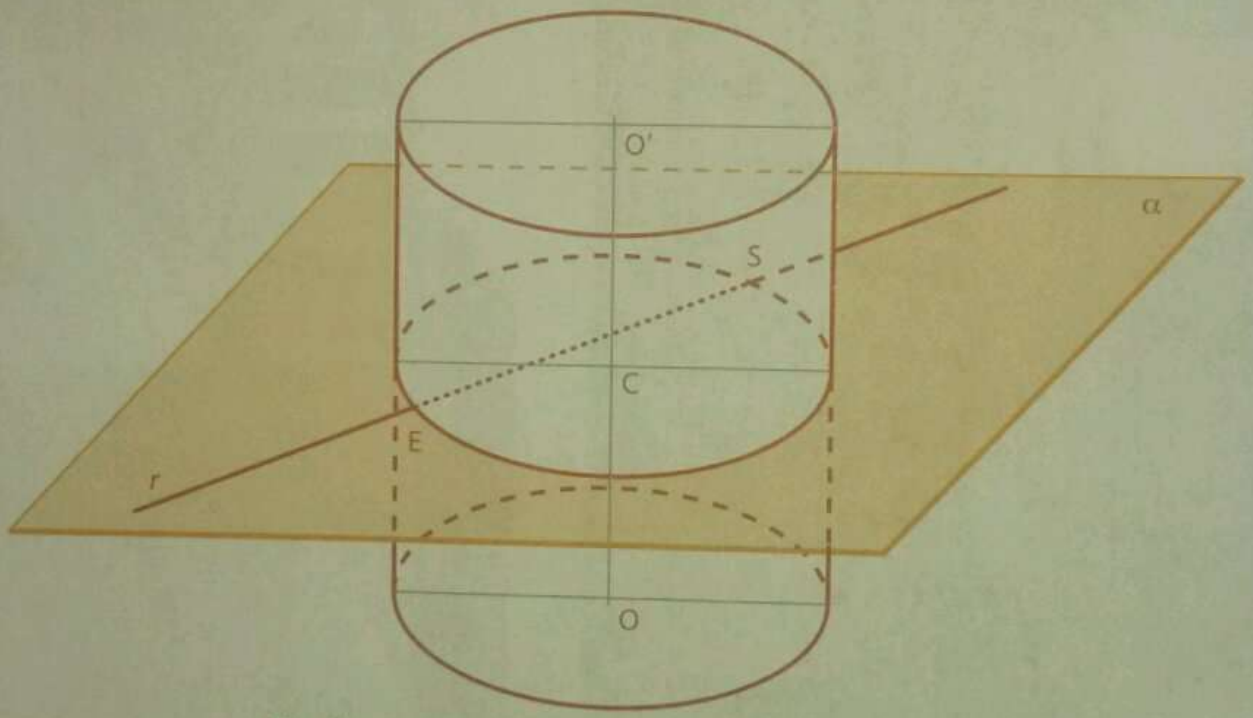


Fig. 1 Intersecção da recta **r** com o cilindro da revolução

A recta **r** penetra no sólido pelo ponto **E**, ponto de entrada, e sai do sólido pelo ponto **S**, ponto de saída.

O segmento de recta [**ES**] é a parte da recta **r** que se encontra dentro do cilindro, pelo que é representado a ponteado.

Como se vê, a parte da recta **r** que se situa entre o ponto **S** e a geratriz do contorno aparente direito do cilindro é também invisível, neste caso não por estar no interior do sólido, mas porque a massa do cilindro a oculta.

Assim, trata-se de dois tipos de invisibilidade que ocorrem na recta **r**, sendo uma resultante do facto de a recta estar no interior do sólido, a **invisibilidade por penetração**, e outra resultando da ocultação da visibilidade pela massa do sólido, a **invisibilidade por ocultação**.

A figura mostra que a recta **r** e a circunferência de centro **C** são complanares, ou seja, estão no mesmo plano. Repare que a circunferência de centro **C** é uma secção produzida no cilindro pelo plano α que contém a recta **r**.

É, pois, na base deste raciocínio que está subjacente o método geral para a determinação dos pontos de intersecção de uma recta com um sólido, cujos passos são os seguintes:

1. Conduzir pela recta um plano (plano auxiliar).
2. Determinar a figura da secção produzida no sólido pelo plano auxiliar que contém a recta.
3. Identificar os pontos de entrada e saída (da esquerda para a direita) da recta, na figura da secção. Esses dois pontos são os pontos de intersecção da recta com o sólido.

Uma vez que já efectuámos as projecções de sólidos assentes em diferentes planos (excepto os planos de rampa e oblíquos) quando estudámos projecções de sólidos e secções produzidas em sólidos, nesta unidade temática as nossas atenções estarão voltadas para a determinação dos pontos de intersecção de rectas com sólidos.

Por outro lado, a determinação das projecções de rectas com diferentes posições no espaço também é algo do nosso domínio, pelo que existem bases suficientes para que não haja dificuldades no estudo dos conteúdos desta unidade temática.

Sendo assim, o mais importante é compreender a aplicação do método geral da intersecção de rectas com diferentes tipos de sólidos estudados, nomeadamente pirâmides, prismas, cones, cilindros e esferas.

Determinemos os pontos de intersecção de rectas com os diferentes tipos de sólidos estudados nas unidades temáticas anteriores.

Intersecção de rectas com pirâmides

Dada uma pirâmide triangular regular assente pela base num plano de nível, e uma recta oblíqua, **determinemos os pontos E de entrada e S de saída da recta no sólido** (Fig. 2).

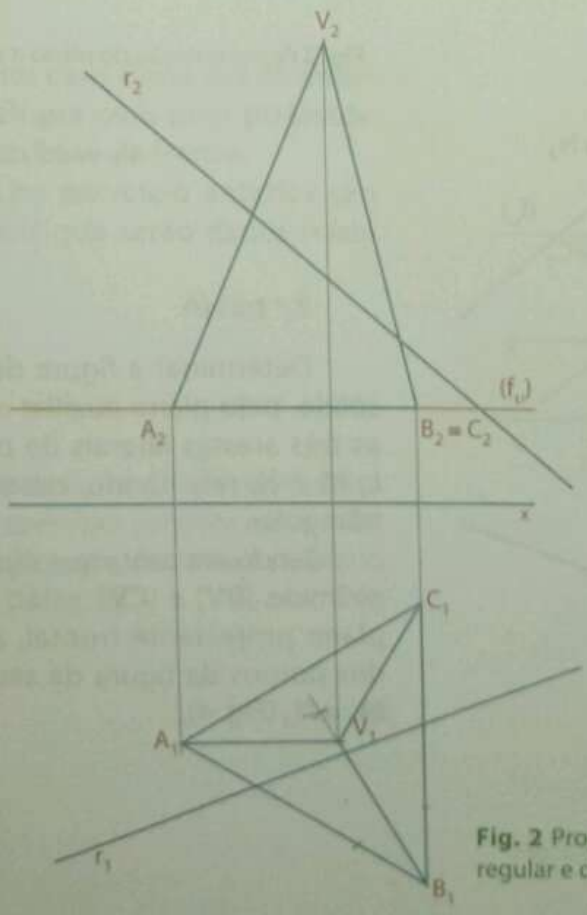


Fig. 2 Projecções da pirâmide triangular regular e da recta **r**

Para a resolução deste exercício recorremos ao método geral de intersecção de rectas com sólidos, seguindo os três passos enumerados na descrição do mesmo.

1.º passo

Dado o sólido e a recta que o intersecta, o primeiro passo consiste em conter a recta dada, num plano auxiliar, neste caso num plano projectante frontal (os planos projectantes são os aconselháveis, pois permitem a determinação da figura da secção sem o recurso a muitos traçados). Assim, pela recta **r**, conduz-se um plano auxiliar π, projectante frontal. Pois, qualquer recta contida num plano projectante frontal tem a sua projecção frontal coincidente com o traço frontal desse plano (Fig. 3).

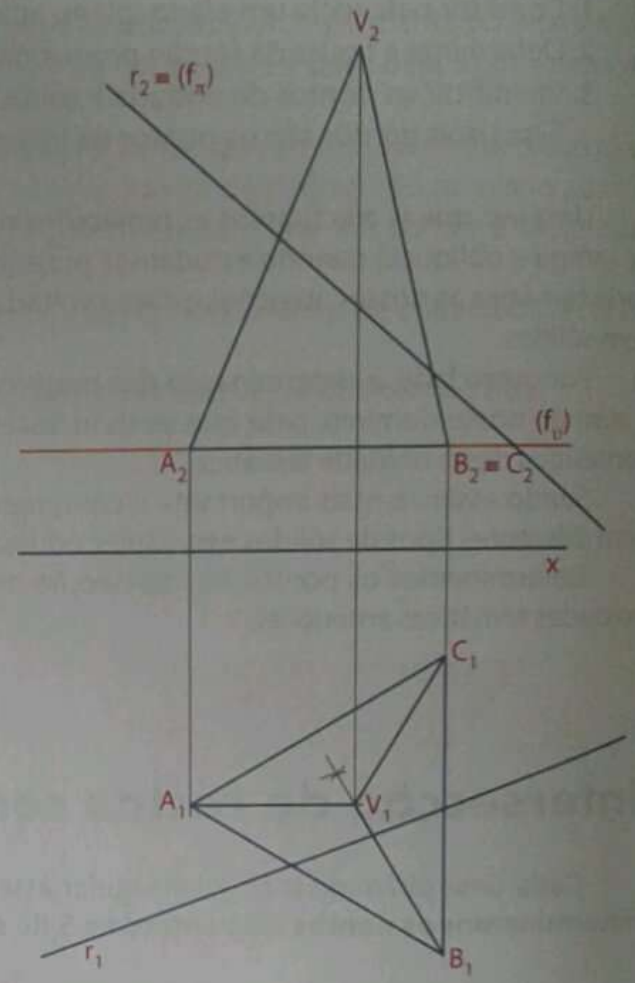


Fig. 3 Representação do plano auxiliar π que contém a recta **r**.

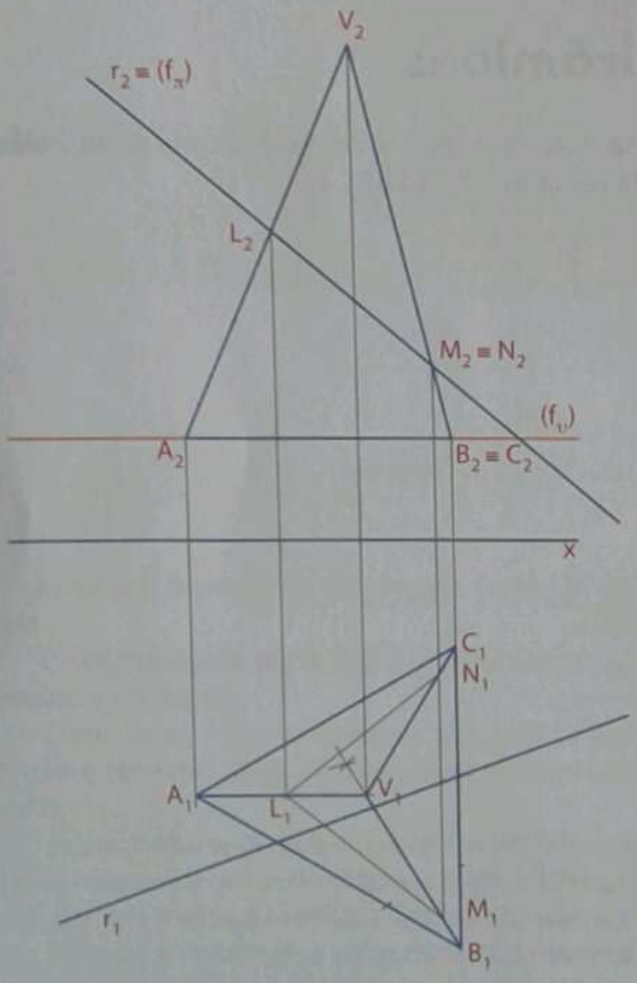


Fig. 4 Determinação da secção produzida pelo π.

2.º passo

Determinar a figura da secção produzida no sólido, pelo plano auxiliar π. O plano π intersecta as três arestas laterais da pirâmide, pelos pontos **L**, **M** e **N**, resultando, deste modo, numa secção triangular.

Tendo em conta que duas das arestas laterais da pirâmide, [**BV**] e [**CV**], estão contidas num mesmo plano projectante frontal, as projecções frontais dos pontos da figura da secção são coincidentes, $\mathbf{M_2 \equiv N_2}$ (Fig. 4).

3.º passo

Determinar os pontos de intersecção da recta dada com a figura da secção produzida pelo plano auxiliar.

A recta **r** dada e a figura de secção [**LMN**] são complanares, ou seja, situam-se no mesmo plano, o plano π auxiliar. Sendo assim, pelos pontos de intersecção da recta **r** com o triângulo [**LMN**], temos da esquerda para a direita, os pontos **E**, de entrada da recta no sólido, e **S** de saída da recta **r** na pirâmide.

O segmento de recta [**ES**] que se situa no interior do sólido representa-se a ponteado. Os pontos de entrada e saída da recta no sólido são visíveis em ambas as projecções, pelo que a recta é apenas invisível por penetração.

Neste caso, as partes da recta que não estão situadas no interior do sólido são representadas a traço grosso, tal como as arestas visíveis do sólido (Fig. 5).

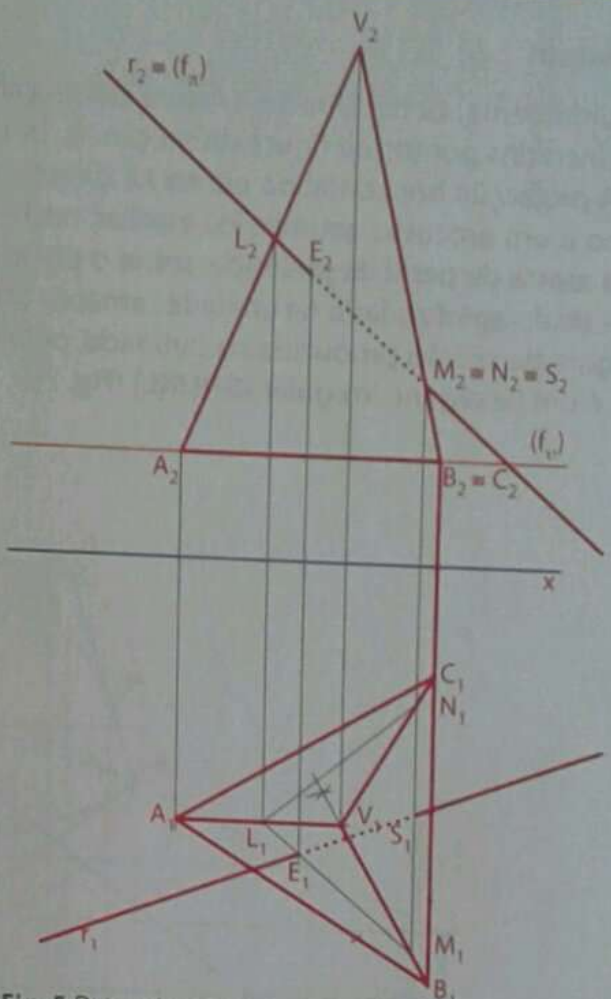


Fig. 5 Determinação dos pontos de intersecção da recta **r** com a pirâmide

Analisemos um outro caso, desta vez de **intersecção duma recta oblíqua com uma pirâmide pentagonal regular com base de frente.**

Os passos dados no exercício anterior são exactamente os mesmos que serão dados neste exercício.

1.º passo

Uma vez dada a recta e a pirâmide, o primeiro passo da resolução do exercício consiste em conter a recta **r** num plano projectante, neste caso, o plano projectante horizontal, β (Fig. 6).

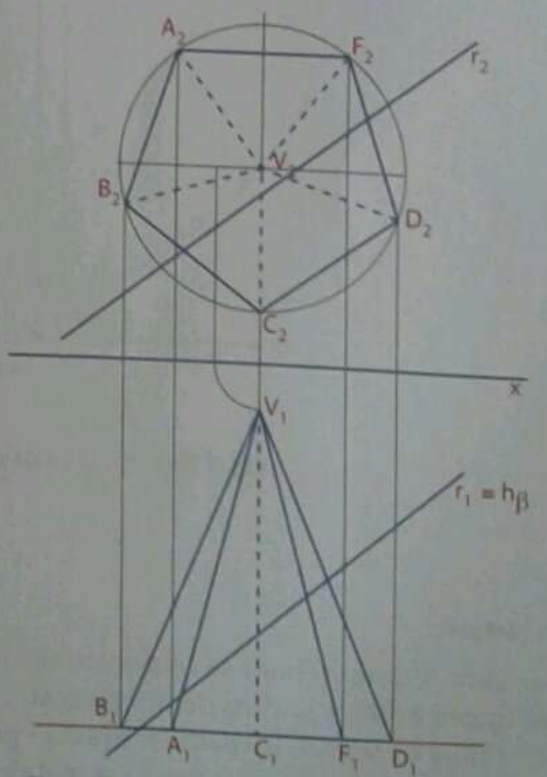


Fig. 6 Conter a recta no plano auxiliar.

2.º passo

Seguidamente, determina-se a figura da secção produzida pelo plano β, na pirâmide pentagonal regular. Cinco dos pontos da figura de secção, **G**, **H**, **I**, **K** e **L**, são obtidos directamente, em ambas as projecções. A projecção horizontal do ponto **J** é directa, mas a determinação da sua projecção frontal carece do recurso a um processo geométrico auxiliar, neste caso, o rebatimento do plano auxiliar de perfil, que contém a aresta de perfil da pirâmide, sobre o plano frontal de projecção (sobre este procedimento fizemos um estudo aprofundado na unidade temática sobre secções em sólidos).

A figura da secção produzida na pirâmide, pelo plano projectante horizontal β, auxiliar, que contém a recta **r**, é um hexágono irregular [**GHIJKL**] (Fig. 7).

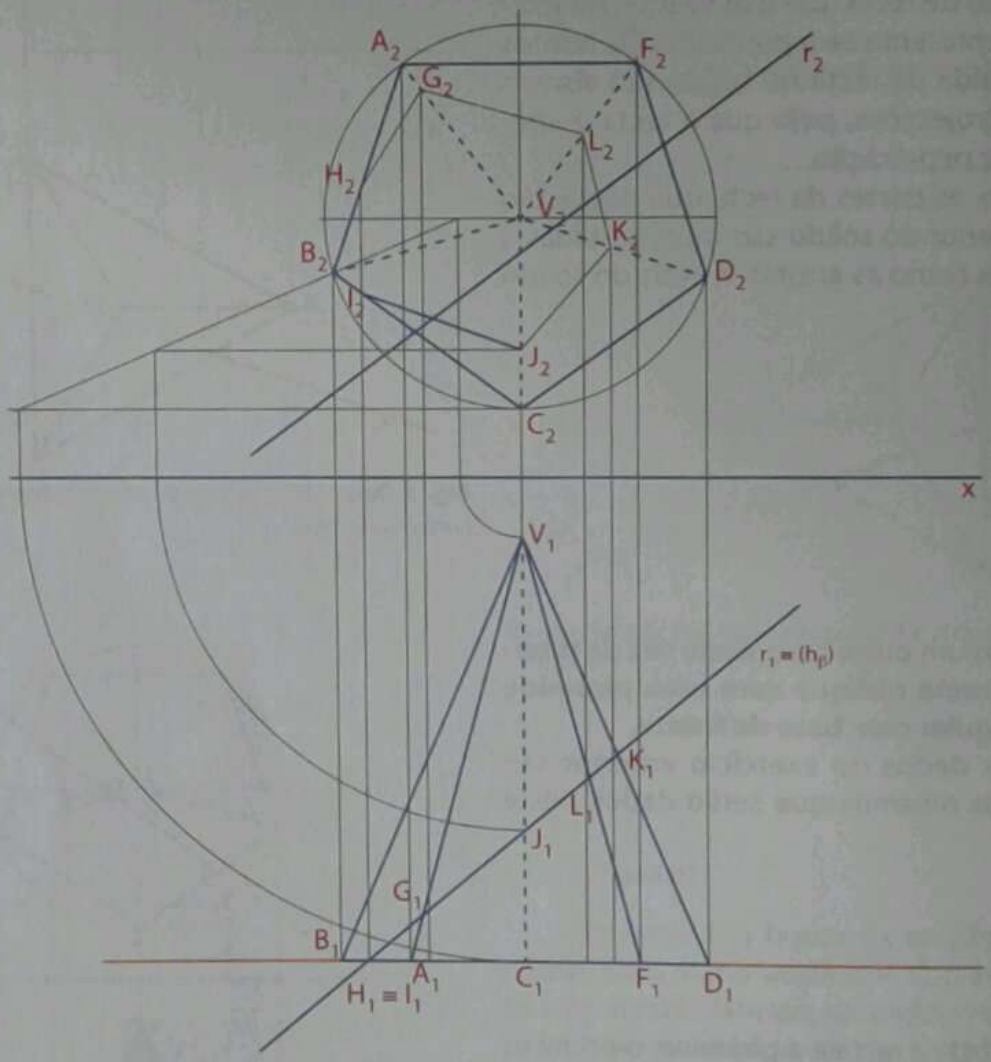


Fig. 7 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar β.

3.º passo

Por último, determinam-se os pontos de intersecção do hexágono irregular (a secção) com a recta **r**, que são igualmente os pontos de intersecção da recta **r** com a pirâmide pentagonal regular dada. Recorde que a figura de secção [**GHIJKL**] e a recta **r** pertencem ao plano β.

Assim, da esquerda para a direita, a recta **r** entra na pirâmide pelo ponto **E** e sai pelo ponto **S**, ambos invisíveis em projecção frontal, e sendo visível apenas o ponto de saída em projecção horizontal.

A recta **r** é invisível, por penetração, no seu segmento **[ES]**, pelo que se representa a ponteado.

Em projecção frontal, além do segmento invisível por penetração, dois segmentos que se situam dentro do contorno aparente frontal do sólido também são invisíveis, mas, neste caso, por ocultação, pelo que são representados a traço interrompido. Em projecção horizontal, para além do segmento situado no interior do sólido, a recta **r** é invisível no segmento compreendido entre o contorno da base do sólido e o ponto **E**.

Como se pode constatar neste exercício, contrariamente ao anterior, o sólido apresenta arestas invisíveis sem nenhuma sobreposição com arestas visíveis (nas suas projecções), as quais, uma vez que uma face ou base as ocultam, são representadas a traço interrompido, tal como se representam as partes da recta que são ocultadas pela massa do sólido.

Neste exercício podemos ver claramente como se representam as partes da recta, invisíveis por penetração e por ocultação, bem como as partes visíveis (Fig. 8).

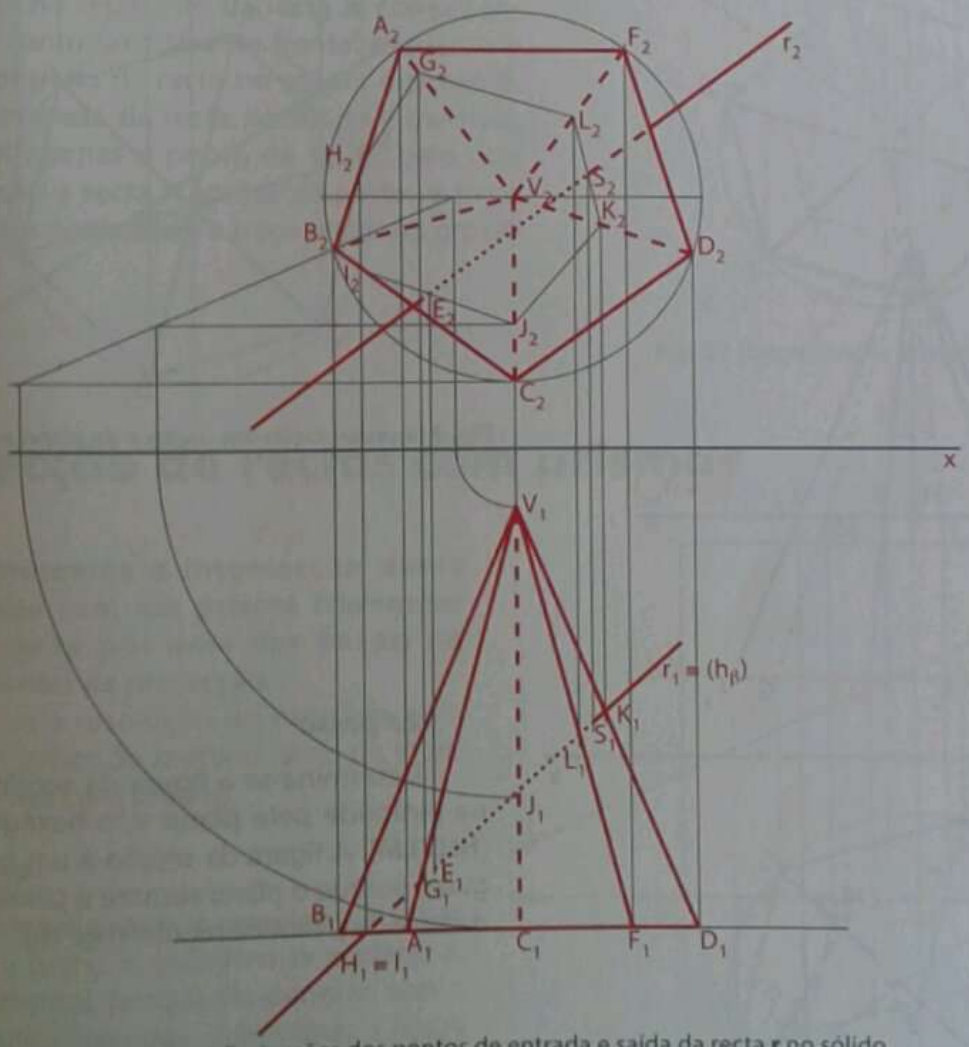


Fig. 8 Projecções dos pontos de entrada e saída da recta **r** no sólido

Para finalizarmos o estudo da intersecção de rectas com pirâmides, analisemos a **intersecção duma recta de nível com uma pirâmide hexagonal regular de base também de nível.**

Resolvamos o exercício.

1.º passo

Começa-se por conter a recta **n** num plano projectante, no caso concreto, um plano de nível, ν, portanto, $n_2 \equiv (f_{\nu_1})$ (Fig. 9).

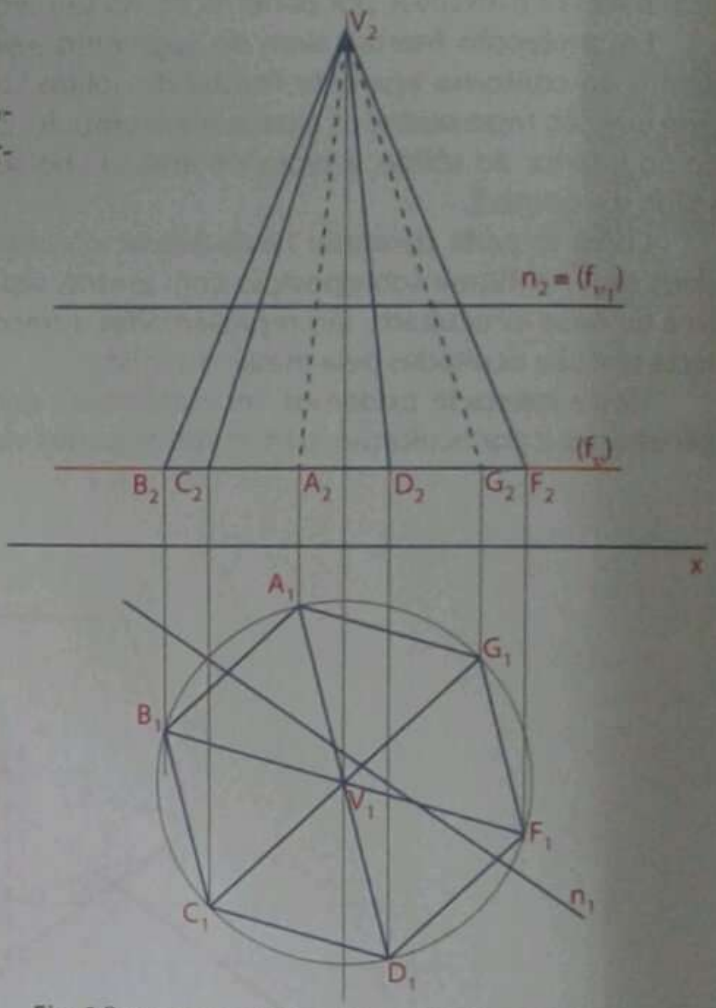


Fig. 9 Representação dos dados e do plano auxiliar ν_1

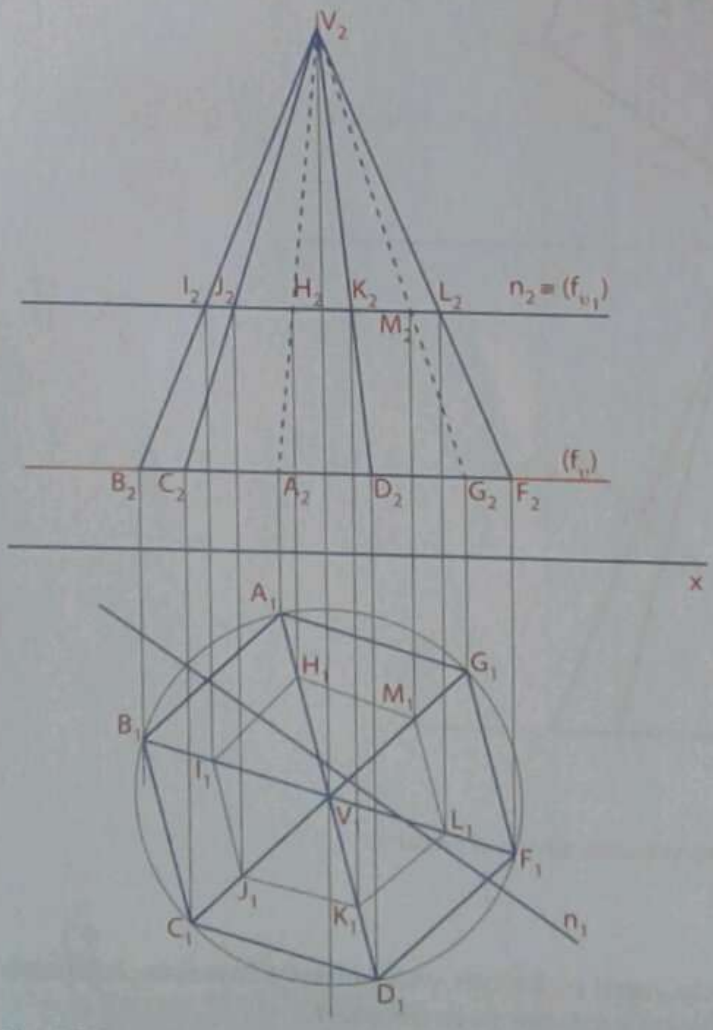


Fig. 10 Determinação da secção produzida na pirâmide pelo plano auxiliar ν_1.

2.º passo

Determina-se a figura da secção produzida na pirâmide pelo plano ν, o hexágono regular [**HIJKLM**]. A figura da secção é um hexágono regular, porque o plano secante é paralelo ao plano da base da pirâmide regular (Fig. 10).

3.º passo

Determina-se os pontos **E** e **S**, na intersecção da recta **n** com a figura da secção [**HIJKLM**], que obviamente serão, respectivamente, os pontos de entrada e saída da recta na pirâmide.

Em projecção horizontal, não acontece nenhuma invisibilidade por ocultação, pelo que nenhuma parte da recta será representada a traço interrompido. Nesta projecção, o segmento que se encontra no interior do sólido representa-se a ponteado, e as restantes partes da recta representam-se a traço grosso, pois os pontos de entrada e saída da recta no sólido são visíveis.

Em projecção frontal acontece a invisibilidade por ocultação, no segmento da recta **n**, compreendido entre o contorno aparente frontal esquerdo e o ponto de entrada da recta no sólido, o ponto **E**. O ponto da entrada da recta no sólido é invisível, sendo visível apenas o ponto de saída, pelo que nesta projecção a recta **n** apresenta partes a traço interrompido, a ponteado e a traço contínuo grosso (Fig. 11).

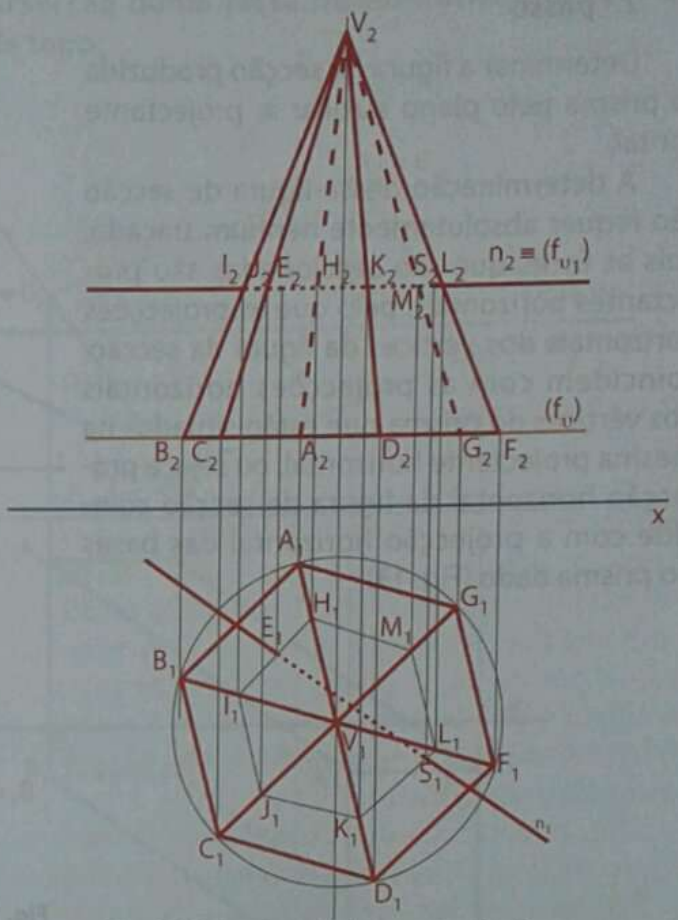


Fig. 11 Determinação dos pontos **E** e **S**

Intersecção de rectas com prismas

Determinemos a intersecção duma recta oblíqua com um prisma triangular regular assente por uma das bases, no plano horizontal de projecção.

Passemos à resolução do exercício aplicando, o já conhecido método geral da intersecção de rectas com sólidos.

1.º passo

Conduzir pela recta **r** um plano auxiliar, neste caso, o plano π. Escolheu-se o plano π, projectante frontal, porque ele permite, sem o recurso a muitos traçados, determinar a figura da secção. Recorde que, na medida do possível, devemos escolher um plano que requeira o menor número possível de traçados para a determinação da figura da secção (Fig. 12).

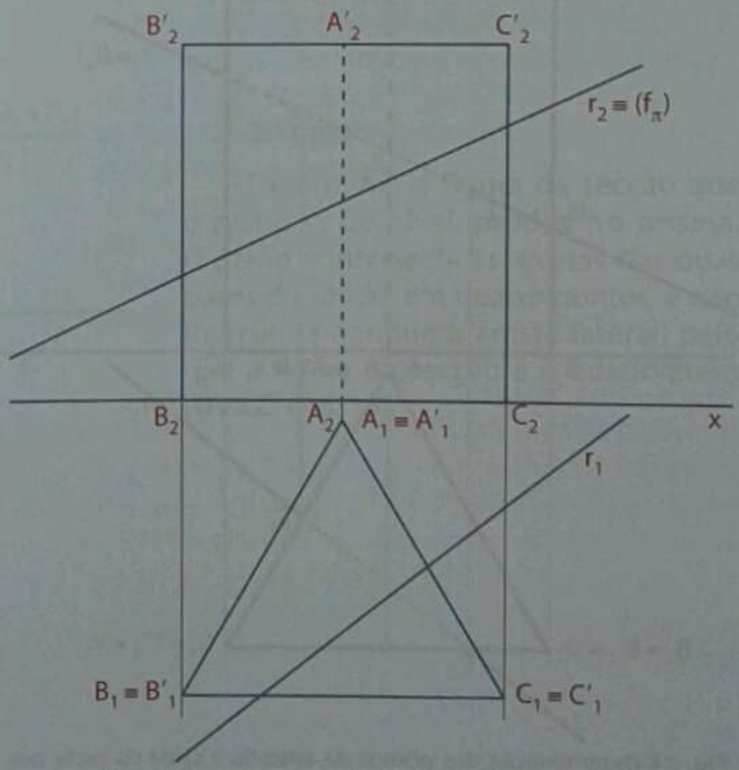


Fig. 12 Representação do plano auxiliar

2.º passo

Determinar a figura da secção produzida no prisma pelo plano auxiliar π, projectante frontal.

A determinação dessa figura de secção não requer absolutamente nenhum traçado, pois as faces que são seccionadas são projectantes horizontais, pelo que as projecções horizontais dos vértices da figura da secção, coincidem com as projecções horizontais dos vértices do prisma que estão situados na mesma projectante horizontal, ou seja, a projecção horizontal da figura de secção coincide com a projecção horizontal das bases do prisma dado (Fig. 13).

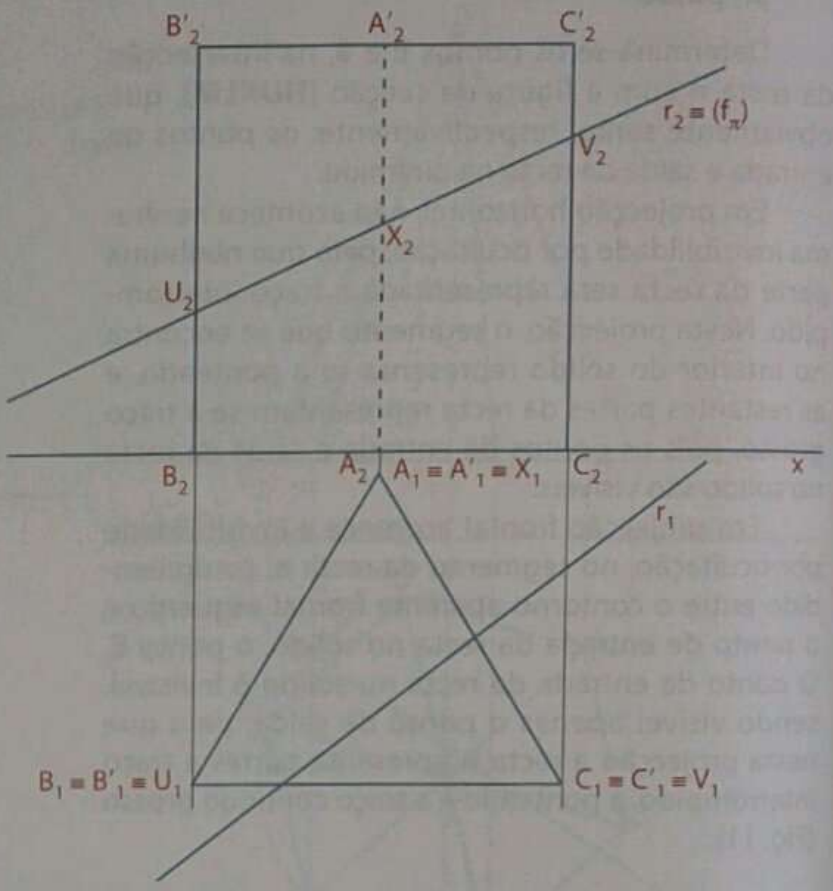


Fig. 13 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar π.

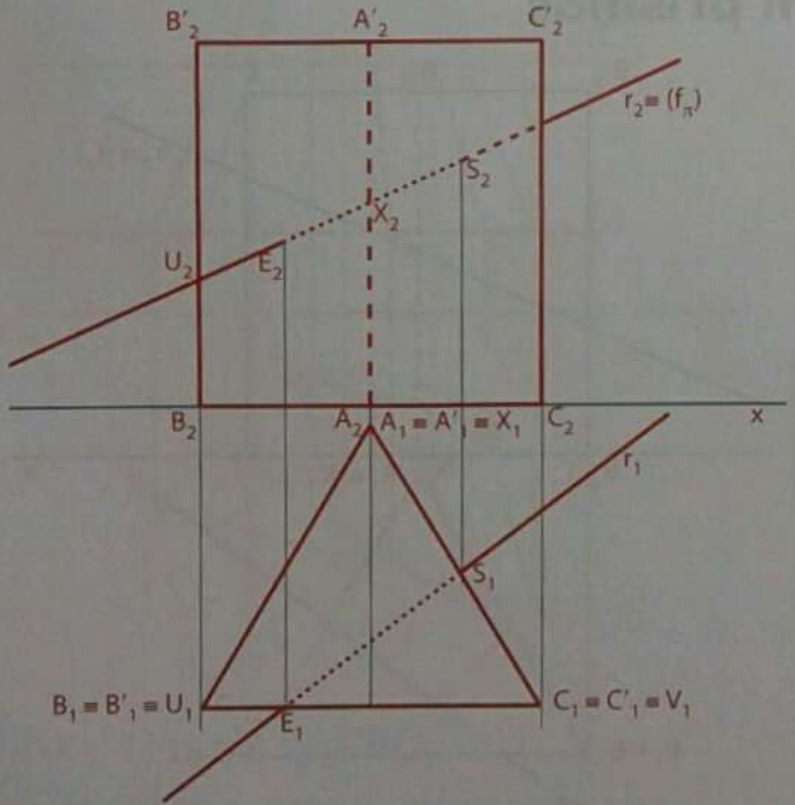


Fig. 14 Determinação dos pontos de entrada e saída da recta no sólido

3.º passo

Determinar os pontos de intersecção da recta com a figura de secção, que são igualmente os pontos de intersecção da recta **r**, com o prisma. Da esquerda para a direita, a recta **r** intersecta a figura da secção nos pontos **E**, ponto da entrada da recta no sólido e **S**, ponto de saída da recta **r** no prisma triangular regular.

Em projecção horizontal, a recta **r** é obviamente invisível por penetração no segmento [**ES**].

Em projecção frontal, o ponto de entrada da recta **r** no prisma é visível, e o ponto de saída é invisível, o que significa que nesta projecção ocorrem dois tipos de invisibilidade, nomeadamente por penetração no segmento [**ES**] e por ocultação no segmento compreendido entre o ponto **S** e o contorno aparente frontal direito (Fig. 14).

Determinemos, desta vez, os pontos de intersecção duma recta fronto-horizontal com um prisma quadrangular regular oblíquo, com bases de topo.

1.º passo

Conduzir um plano projectante pela recta **a**, neste caso, o plano ν, de nível, pois facilitará encontrar rapidamente a solução do problema. Assim, $a_2 \equiv (f_\nu)$ (Fig. 15).

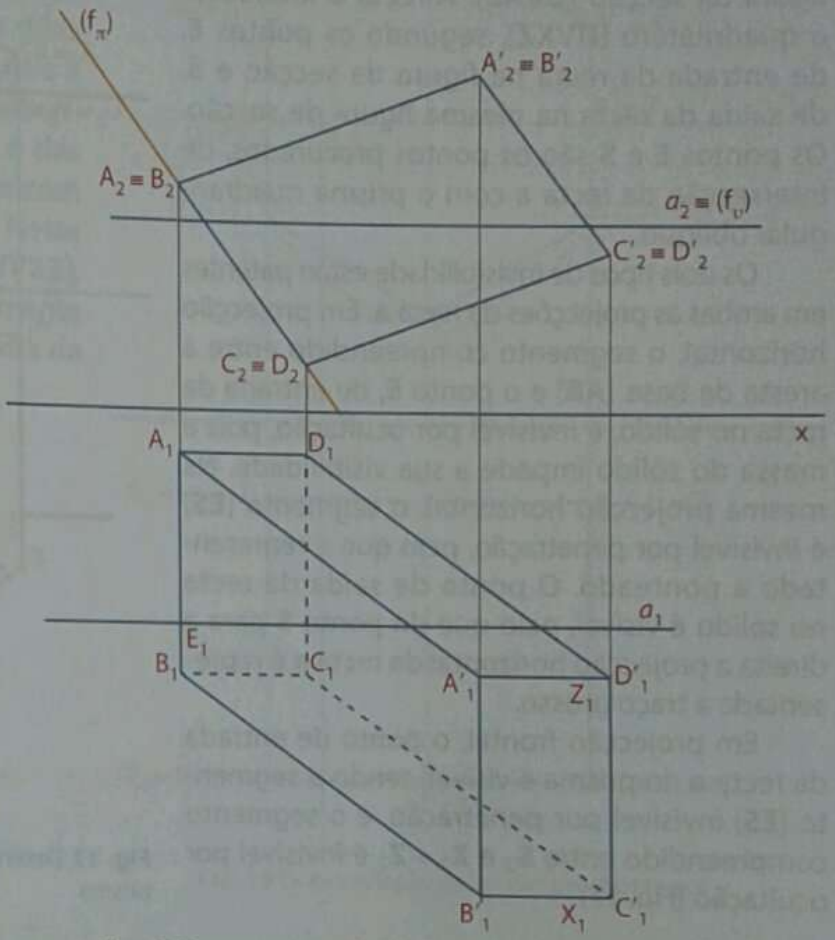


Fig. 15 Representação dos dados e do plano auxiliar ν

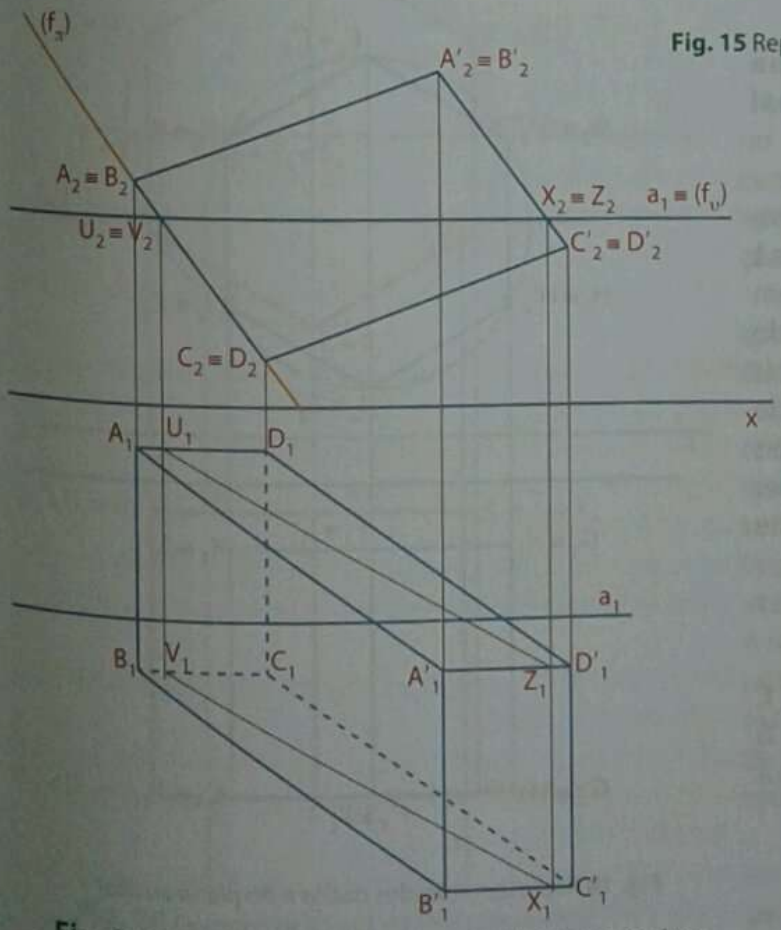


Fig. 16 Determinação da secção produzida por ν no prisma.

2.º passo

Determinar a figura da secção que o plano ν, de nível, produz no prisma. O plano ν intersecta as arestas das duas bases do sólido, em quatro pontos, e não intersecta nenhuma aresta lateral, pelo que a figura da secção é o quadrilátero [**UVXZ**] (Fig. 16).

3.º passo

Determinar a intersecção da recta com a figura da secção [**UVXZ**]. A recta **a** intersecta o quadrilátero [**UVXZ**], segundo os pontos **E**, de entrada da recta na figura da secção e **S**, de saída da recta na mesma figura de secção. Os pontos **E** e **S** são os pontos procurados, de intersecção da recta **a** com o prisma quadrangular oblíquo.

Os dois tipos de invisibilidade estão patentes em ambas as projecções da recta **a**. Em projecção horizontal, o segmento compreendido entre a aresta da base [**AB**] e o ponto **E**, de entrada da recta no sólido, é invisível por ocultação, pois a massa do sólido impede a sua visibilidade. Na mesma projecção horizontal, o segmento [**ES**] é invisível por penetração, pelo que é representado a ponteado. O ponto de saída da recta no sólido é visível, pelo que do ponto **S** para a direita a projecção horizontal da recta **a** é representada a traço grosso.

Em projecção frontal, o ponto de entrada da recta **a** no prisma é visível, sendo o segmento [**ES**] invisível por penetração, e o segmento compreendido entre S_2 e $X_2 \equiv Z_2$ é invisível por ocultação (Fig. 17).

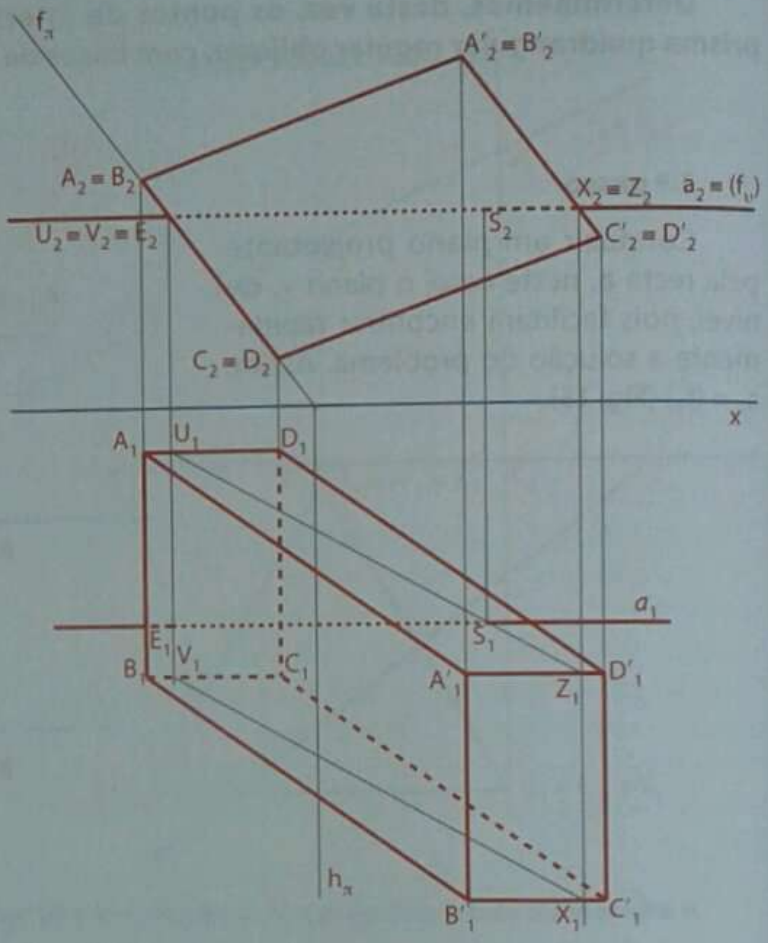


Fig. 17 Determinação dos pontos de intersecção da recta com o prisma

Determinação da intersecção duma recta, de topo, com um prisma hexagonal regular, de bases de frente.

A resolução deste exercício é muito simples, pois os pontos de entrada e saída da recta **t** no sólido são determinados directamente, sem necessidade de se recorrer à aplicação do método geral de intersecção de rectas com sólidos, pois trata-se de um caso particular. Como forma de demonstrar que este método é aplicável em intersecções de qualquer tipo de recta com qualquer tipo de sólido, vamos aplicá-lo também neste exercício.

1.º passo

Conduzir um plano projectante pela recta **t**, no caso concreto, um plano ν, de nível, pois é o que permite resolver o problema sem o recurso a muitos traçados (Fig. 18).

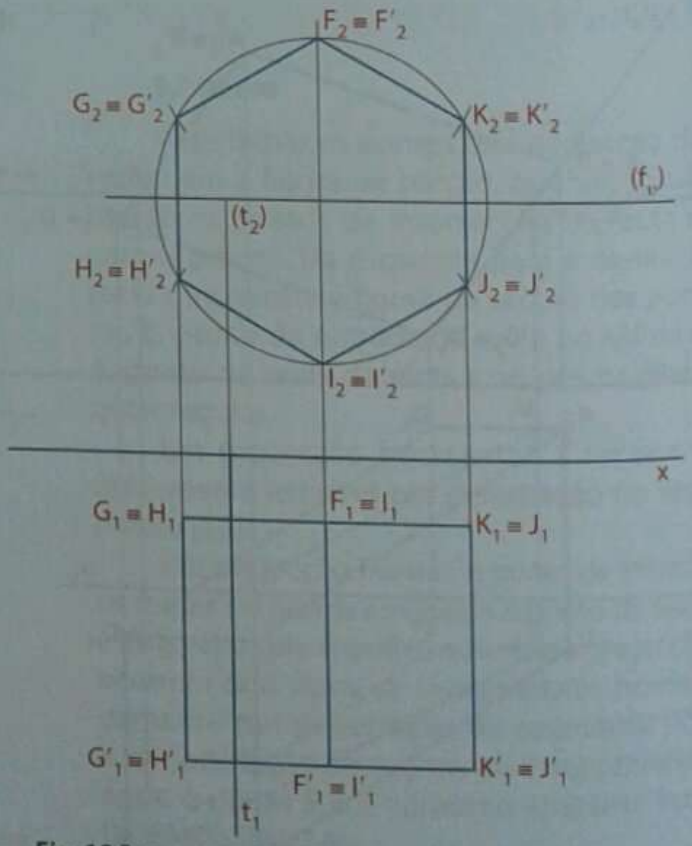


Fig. 18 Representação dos dados e do plano auxiliar ν

2.º passo

Determinar a figura da secção produzida no prisma pelo plano ν, de nível. O plano é paralelo às arestas laterais do prisma, e intersecta as duas bases do sólido e duas faces de perfil, pelo que a figura da secção coincide, em projecção horizontal, com a projecção horizontal das bases e das faces de perfil do prisma, ou seja, coincide com o contorno aparente horizontal do prisma. Neste caso, a figura de secção é o quadrilátero [**UVXZ**]. Note que não foi necessário traçar absolutamente nenhuma linha para a determinação da figura da secção (Fig. 19).

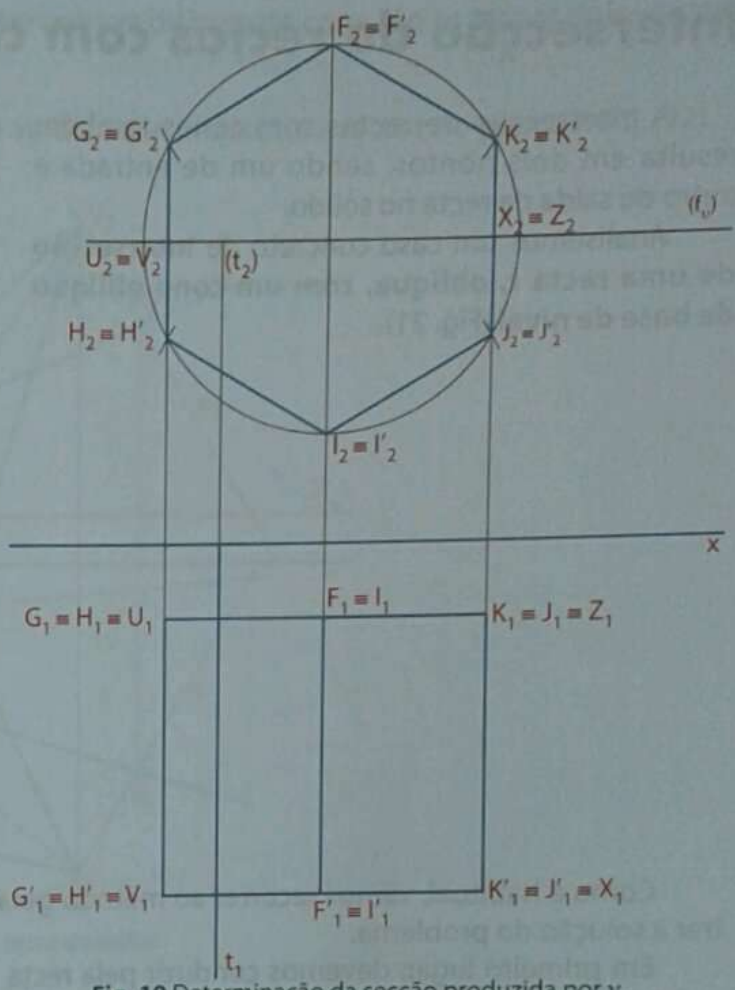


Fig. 19 Determinação da secção produzida por ν.

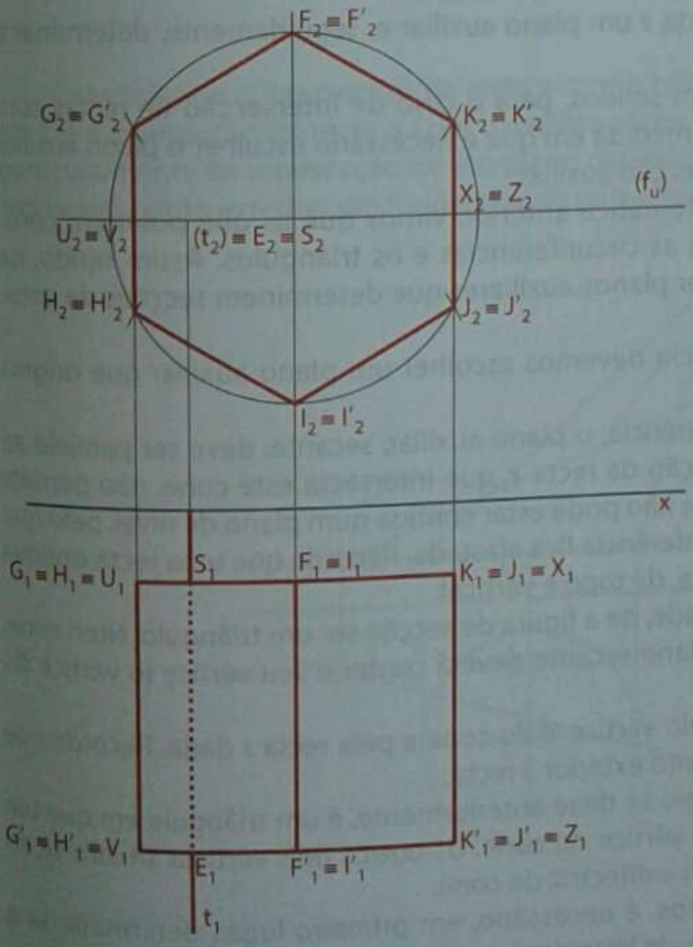


Fig. 20 Determinação dos pontos procurados.

3.º passo

Determinar o ponto **E**, de entrada da recta no sólido, que resulta da intersecção da recta **t** com a figura de secção [**UVXZ**] e o ponto **S**, de saída da recta no sólido, resultante da intersecção da recta com a mesma figura de secção.

Em projecção horizontal, a recta **t** é invisível apenas no segmento que está no interior do sólido, invisibilidade por penetração.

Em projecção frontal, sabemos que acontecem os dois tipos de invisibilidade, mas porque se trata duma recta, cuja projecção frontal se apresenta em forma de um ponto, torna-se impossível a distinção das partes visíveis e invisíveis, por penetração e por ocultação. No entanto, a semi-recta que se situa antes do sólido até ao ponto **E** é visível, o segmento [**ES**] porque se situa no interior do sólido, é invisível por penetração, e de **S** para diante, a semi-recta é invisível por ocultação (Fig. 20).

Saliente-se que os pontos **E** e **S** poderiam ter sido determinados sem o recurso do método geral.

Intersecção de rectas com cones

A intersecção de rectas com cones também resulta em dois pontos, sendo um de entrada e outro de saída da recta no sólido.

Analisemos um caso concreto de **intersecção de uma recta r, oblíqua, com um cone oblíquo de base de nível** (Fig. 21).

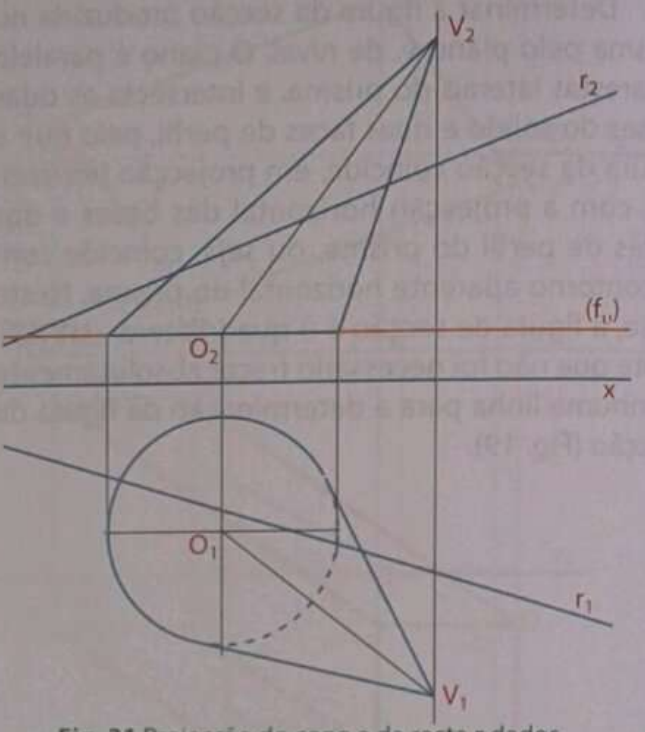


Fig. 21 Projecção do cone e da recta **r** dados.

Como é habitual, vamos recorrer ao método geral de intersecção de rectas com sólidos para encontrar a solução do problema.

Em primeiro lugar, devemos conduzir pela recta **r** um plano auxiliar e, seguidamente, determinar a secção produzida no sólido por esse plano auxiliar.

O método geral de intersecção de rectas com sólidos, para o caso de intersecção de rectas com cones, aplica-se com uma maior complexidade, na medida em que é necessário escolher o plano auxiliar que permite a determinação rigorosa da figura da secção auxiliar.

Das secções cónicas estudadas na unidade temática anterior, vimos que as que possuem construção rigorosa são apenas duas, nomeadamente as circunferências e os triângulos. Assim sendo, na intersecção de rectas com cones, devemos escolher planos auxiliares que determinem secções de construção rigorosa.

Portanto, para solucionarmos o nosso exercício devemos escolher um plano auxiliar que origina uma secção triângular ou circular.

Para que a figura da secção seja uma circunferência, o plano auxiliar, secante, deve ser paralelo ao plano da base do cone, um plano de nível. A posição da recta **r**, que intersecta este cone, não permite contê-la num plano de nível, pois uma recta oblíqua não pode estar contida num plano de nível, pelo que a possibilidade de a figura da secção ser uma circunferência fica afastada. Recorde que uma recta oblíqua só pode estar contida em planos oblíquos, de rampa, de topo e vertical.

Assim sendo, resta-nos apenas uma possibilidade, de a figura de secção ser um triângulo. Num cone, para que a figura da secção seja um triângulo, o plano secante deverá conter o seu vértice (o vértice do cone).

Deste modo, o plano secante será definido pelo vértice **V** do cone e pela recta **r** dada. Recorde que um plano pode ser definido por uma recta e um ponto exterior à recta.

A figura de secção que esse plano produz, como se disse anteriormente, é um triângulo em que um dos seus vértices é o ponto **V**, que coincide com o vértice do cone. Os outros dois vértices situam-se no plano da base, na intersecção do plano secante com a directriz do cone.

Portanto, para se determinar esses dois pontos, é necessário, em primeiro lugar, determinar-se a recta **i**, de intersecção do plano auxiliar com o plano da base do cone.

Os pontos de intersecção da recta **i** com a circunferência da base do cone são os outros dois vértices da secção auxiliar triangular.

Assim, por **V**, conduz-se uma recta **a**, do plano auxiliar, que intersecta a recta **r** no ponto **K** (Fig. 22).

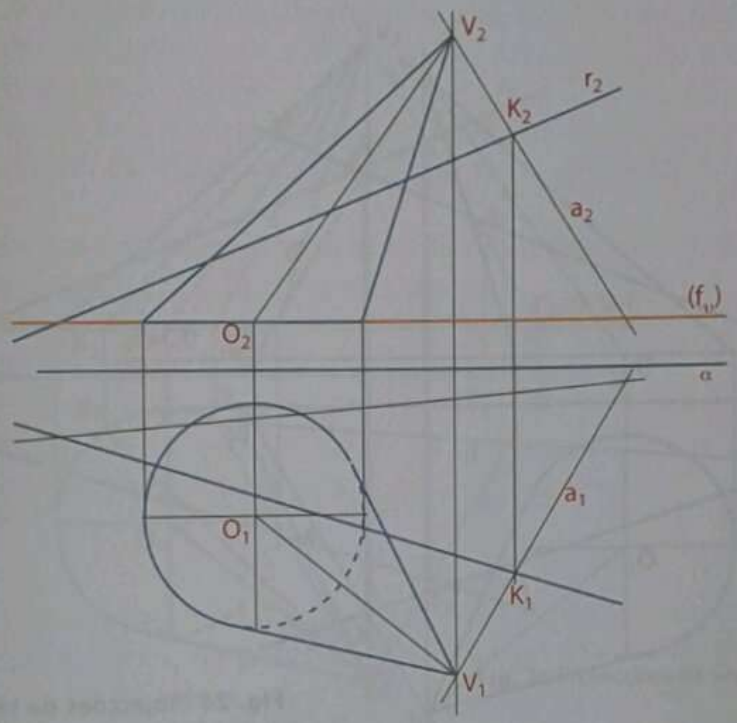


Fig. 22 Projecções da recta ***a*** auxiliar

Determina-se a intersecção da recta **r** com o plano ν da base do sólido, que é directa e que resulta em **I**, e a intersecção da recta **a** com o mesmo plano, que resulta em **I'**. Os conhecimentos já adquiridos particularmente de intersecção de um plano definido pelos seus traços com um plano definido por uma recta e um ponto exterior, são fundamentais para a resolução deste passo do exercício (Fig. 23).

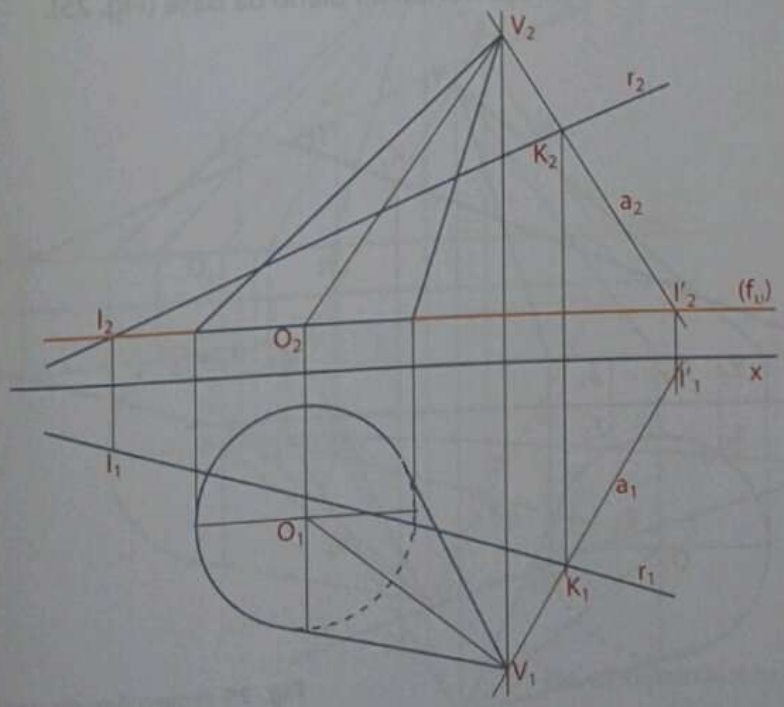


Fig. 23 Determinação dos pontos de intersecção do plano auxiliar com o plano da base

Unindo I_2 a I'_2, obtém-se a projecção frontal i_2, da recta de intersecção do plano da base do sólido com o plano auxiliar que contém a recta r dada.

A união de I_1 com I'_1 dá origem à projecção horizontal i_1 da recta de intersecção de ν, plano da base do sólido, com o plano auxiliar (Fig. 24).

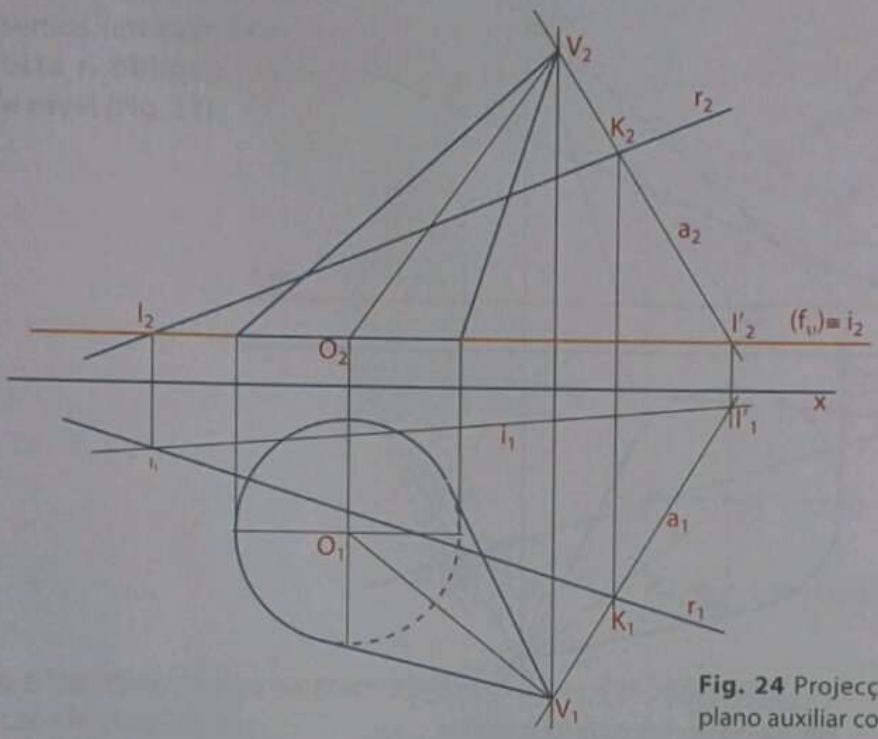


Fig. 24 Projecções da recta de intersecção do plano auxiliar com o plano da base

A intersecção da recta **i** com a circunferência da base do cone dá origem a dois pontos da base, **X** e **Z**, os dois vértices do triângulo [**XVZ**] de que estávamos à procura. Pela intersecção de i_1 com a projecção horizontal da circunferência da base designam-se as projecções horizontais X_1 e Z_1 dos pontos **X** e **Z**.

Determinam-se as projecções frontais dos pontos **X** e **Z**, que naturalmente se situam sobre a projecção frontal da recta **i**, que coincide com o traço frontal do plano da base (Fig. 25).

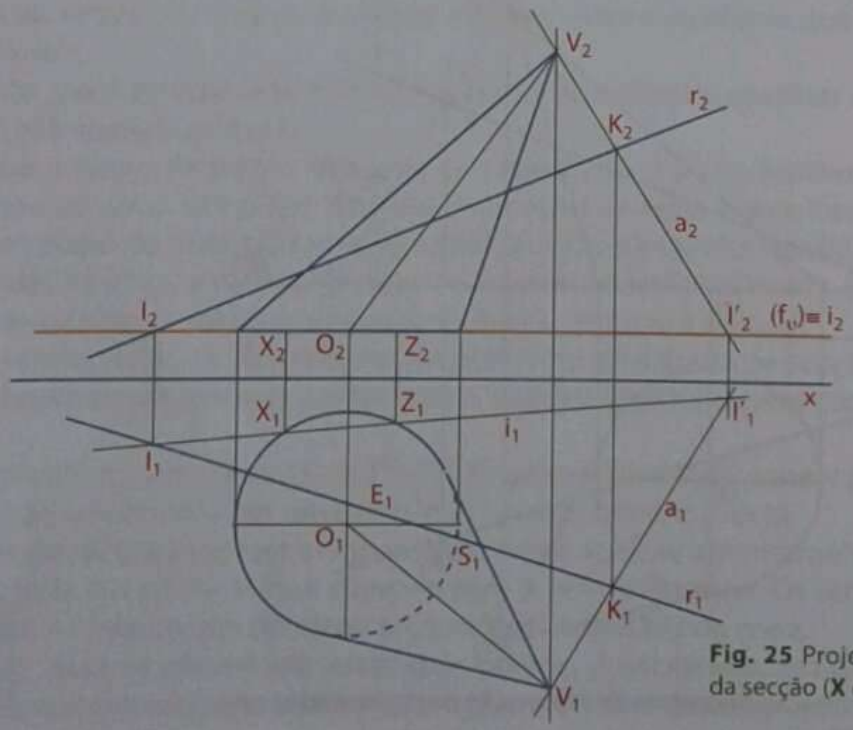


Fig. 25 Projecções de dois pontos da secção (**X** e **Z**)

Unindo as projecções do mesmo nome, dos pontos **X**, **V** e **Z**, obtêm-se as projecções da figura da secção, o triângulo [**XVZ**] (Fig. 26).

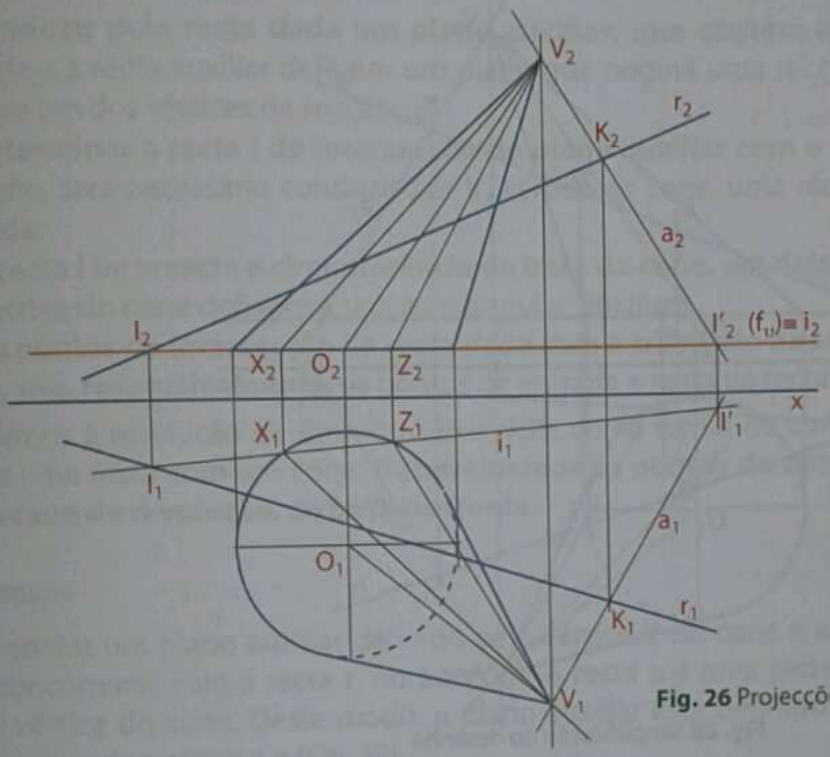


Fig. 26 Projecções da secção triangular

Os pontos de intersecção da recta **r** com a figura da secção são a solução do exercício, ou seja, são os pontos, da esquerda para a direita, **E** de entrada, e **S** de saída, da recta no cone (Fig. 27).

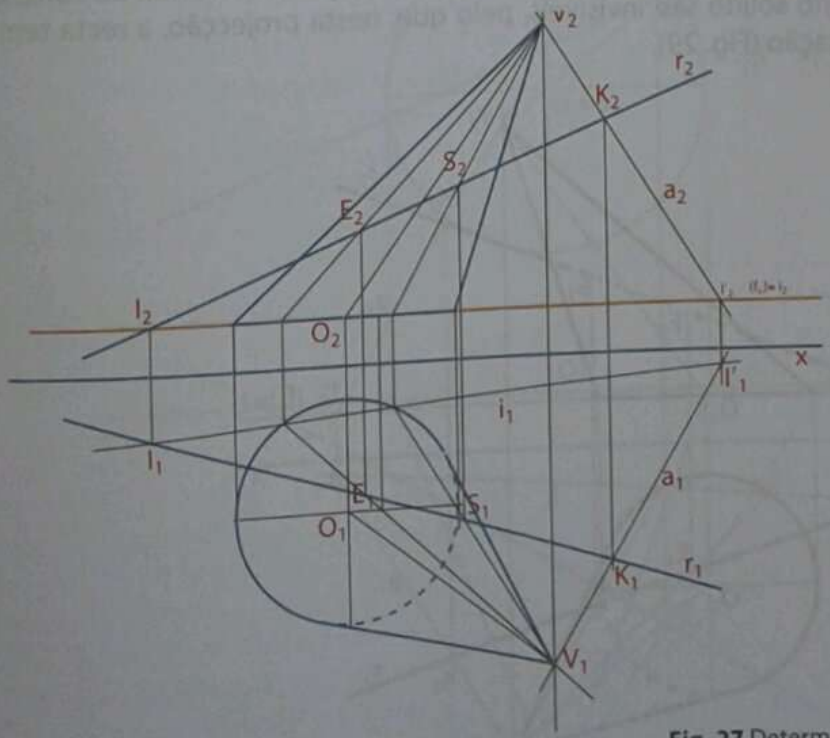


Fig. 27 Determinação dos pontos **E** e **S** procurados.

De modo a simplificar o desenho, pode-se determinar apenas uma projecção da figura de secção e nela encontrar uma das projecções dos pontos de entrada e saída da recta no sólido, ao que se seguirá a determinação da outra projecção desses dois pontos sobre a outra projecção da recta dada (Fig. 28).

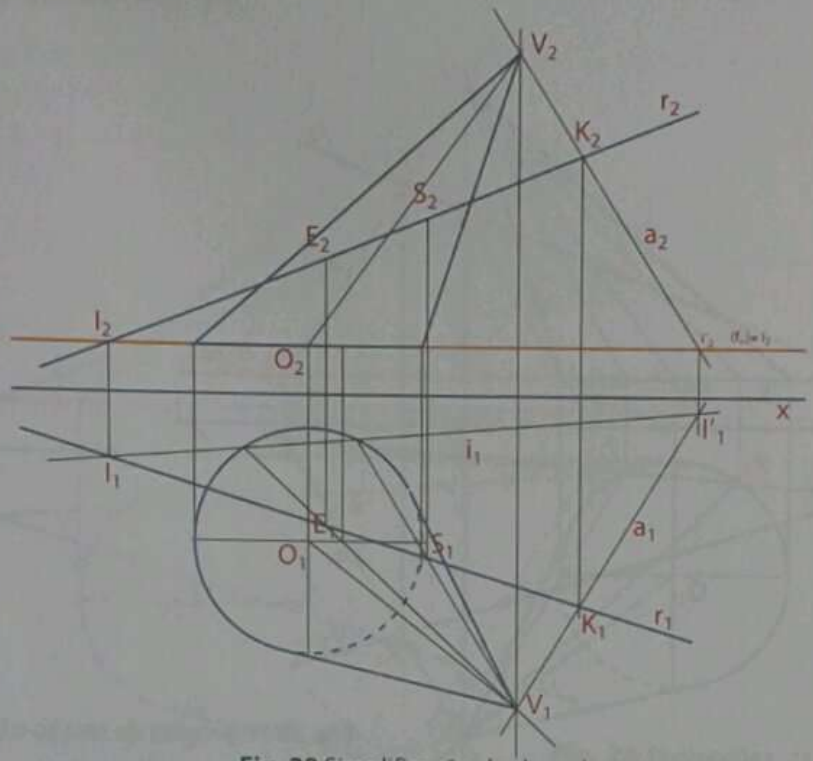


Fig. 28 Simplificação do desenho

Finalmente, distinguem-se as partes visíveis da recta, das partes invisíveis, por penetração e por ocultação. Em projecção horizontal, a recta é invisível apenas no seu segmento situado no interior do sólido, portanto, os pontos de entrada e saída da recta **r**, no sólido, são visíveis nesta projecção.

Em projecção frontal, a recta **r** apenas é visível fora do contorno aparente frontal do cone, ou seja, os seus pontos de entrada e saída no sólido são invisíveis, pelo que, nesta projecção, a recta tem invisibilidade, por penetração e por ocultação (Fig. 29).

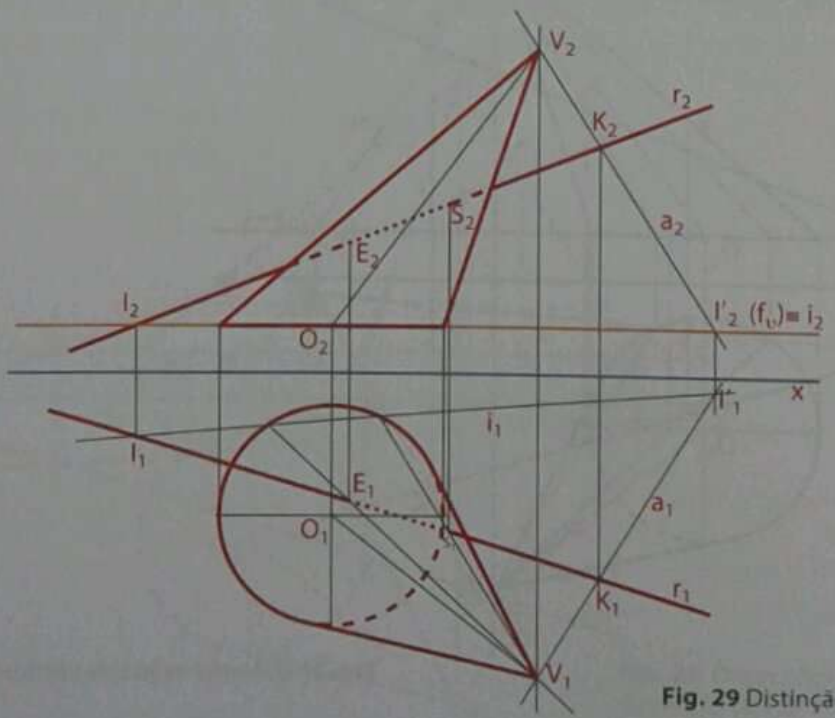


Fig. 29 Distinção dos traços do desenho

Como se pode constatar, o método geral de intersecção de rectas com sólidos tem uma certa especificidade, quando se trata de intersecção de rectas com cones, em que o plano auxiliar não possibilita a obtenção da secção circular, o que dá origem ao método geral de intersecção de uma recta com um cone, que consiste no seguinte:

1. **Conduzir pela recta dada um plano auxiliar, que contém o vértice do cone dado.** A recta dada e a recta auxiliar definem um plano que origina uma secção triangular, sendo o vértice do cone um dos vértices da secção.
2. **Determinar a recta i de intersecção do plano auxiliar com o plano da base do sólido.** Para o efeito, será necessário conduzir por **V**, vértice do cone, uma recta auxiliar que intersecta a recta dada.
3. **A recta i intersecta a circunferência da base do cone, em dois pontos, que juntamente com o vértice do cone** definem a secção triangular, auxiliar.
4. **Os pontos de intersecção da recta dada com o triângulo da secção, da esquerda para a direita, são, respectivamente**, os pontos de entrada e saída da recta no cone.

Passemos à resolução de um outro exercício, como forma de consolidar o método geral de intersecção de uma recta com um cone. **Determinemos os pontos de entrada e saída de uma recta oblíqua num cone de revolução, de base de frente.**

1.º passo

Considerar um plano auxiliar definido pelo vértice **V** do cone e a recta **r** dada. Traçar uma recta **a**, auxiliar, concorrente com a recta **r**, no ponto **K**. A recta **a** é uma recta do plano auxiliar, que contém o ponto **V**, vértice do cone. Deste modo, o plano auxiliar está definido por duas rectas concorrentes no ponto **K**, nomeadamente **r** e **a** (Fig. 30).

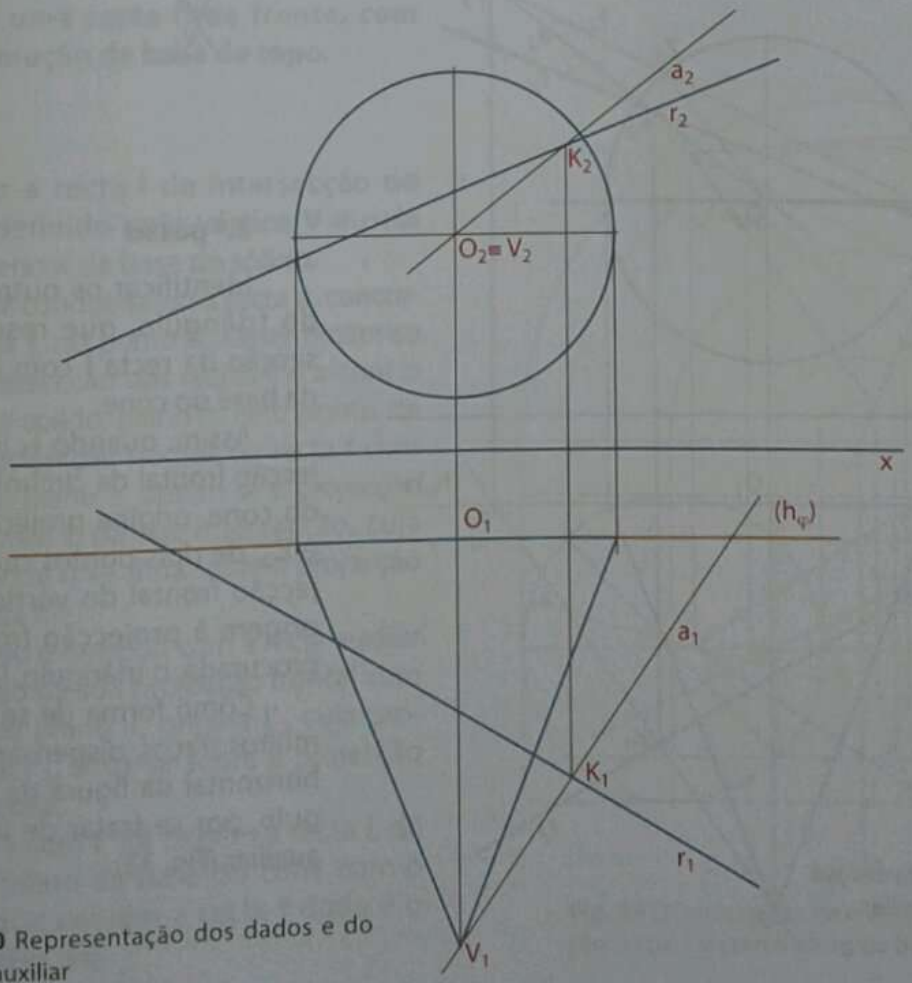


Fig. 30 Representação dos dados e do plano auxiliar

2.º passo

Determinar a recta **i** de intersecção do plano auxiliar com o plano φ da base do cone, através da determinação dos pontos **I**, resultante da intersecção da recta **r** com o plano φ e **I'**, resultante da intersecção da recta **a** com o plano φ da base do sólido.

A união dos pontos **I** e **I'** dá origem à recta **i** de intersecção dos dois planos, o plano auxiliar e o plano da base do cone (Fig. 31).

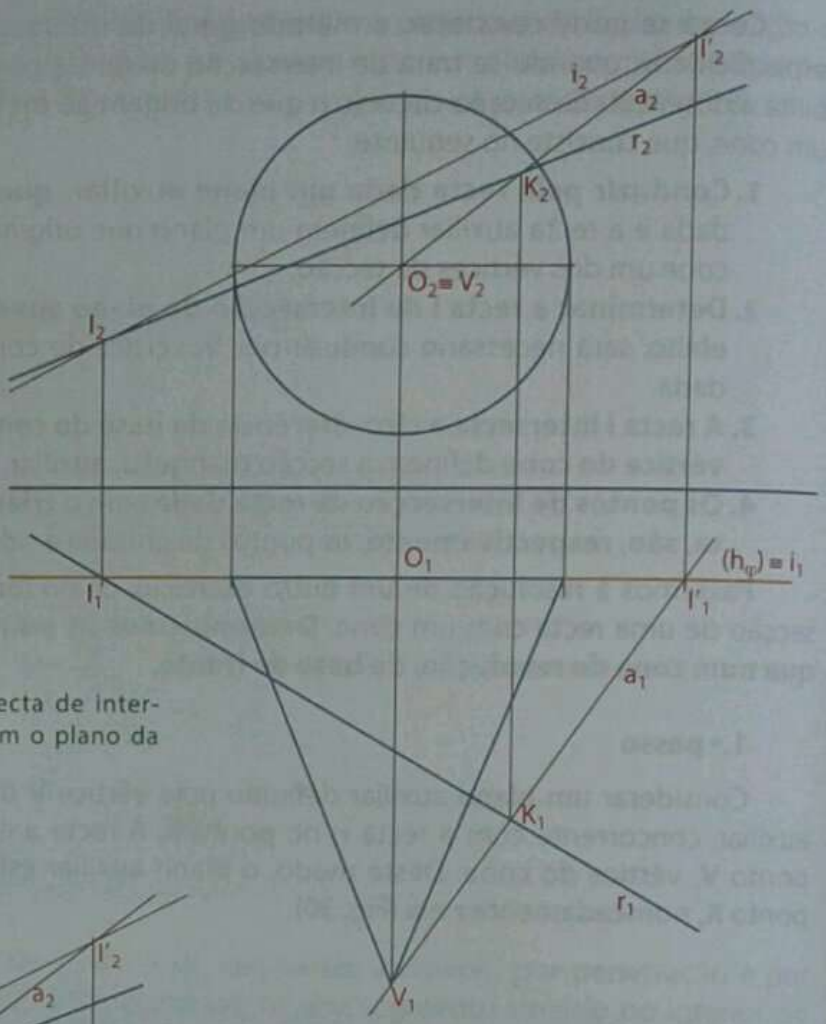


Fig. 31 Determinação da recta de intersecção do plano auxiliar com o plano da base do cone.

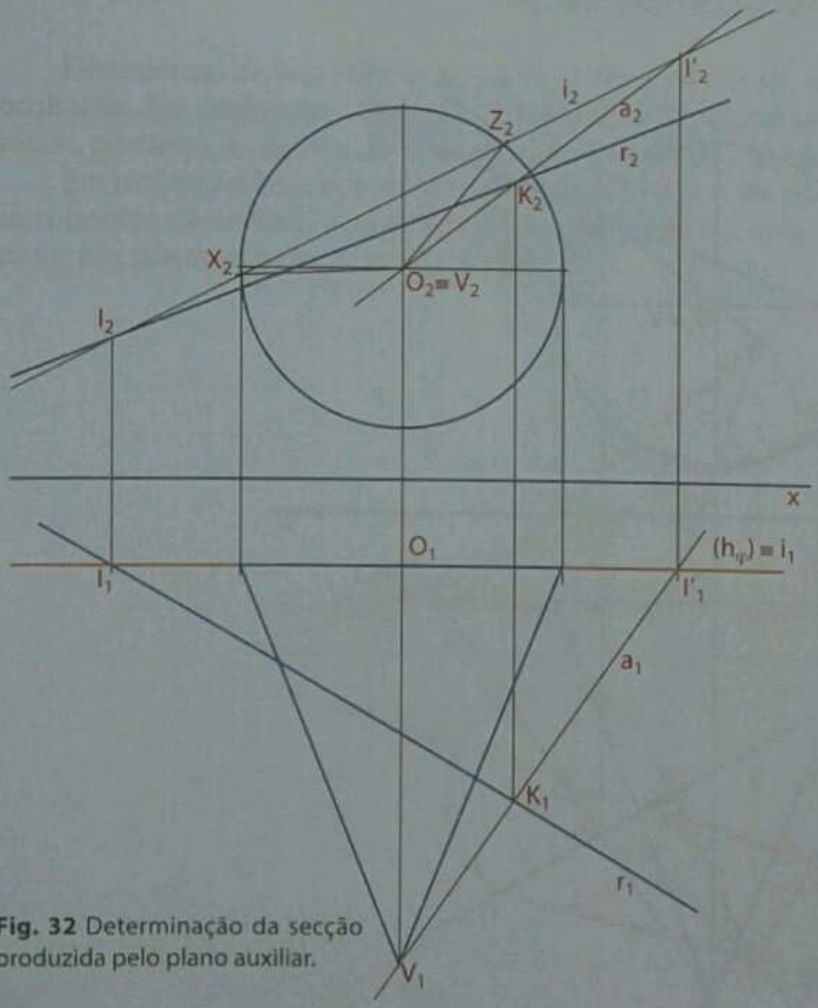


Fig. 32 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar.

3.º passo

Identificar os outros dois vértices do triângulo, que resultam da intersecção da recta **i** com a circunferência da base do cone.

Assim, quando $\mathbf{i_2}$ intersecta a projecção frontal da circunferência da base do cone, origina projecções frontais $\mathbf{X_2}$ e $\mathbf{Z_2}$, de dois pontos que unidos à projecção frontal do vértice do cone dão origem à projecção frontal da secção procurada, o triângulo, $[\mathbf{X_2V_2Z_2}]$.

Como forma de se evitar o uso de muitos traços, dispensamos a projecção horizontal da figura da secção, o triângulo, por se tratar de uma construção auxiliar (Fig. 32).

4.º passo

Determinar os pontos **E** e **S**, respectivamente de entrada e saída da recta no cone, através da intersecção da projecção frontal da recta **r**, r_2 com a projecção frontal da secção auxiliar do cone, o que dá origem às projecções frontais, E_2 e S_2, e seguidamente determinar as suas projecções horizontais E_1 e S_1, sobre a projecção horizontal da recta **r**, r_1.

Finalmente, distinguem-se as partes visíveis das partes invisíveis da recta **r**. Em projecção horizontal, o ponto de entrada da recta no cone é invisível, pelo que o segmento de recta (embora pequeno) situado entre a geratriz, à esquerda do contorno aparente horizontal, e a projecção horizontal do ponto **E**, é invisível, por ocultação. Na mesma projecção, o ponto de saída é visível, pelo que da projecção horizontal de **S** para a direita, a recta é visível.

Em projecção frontal, a recta é apenas invisível por penetração, portanto o segmento de recta [**ES**] fica ponteado (Fig. 33).

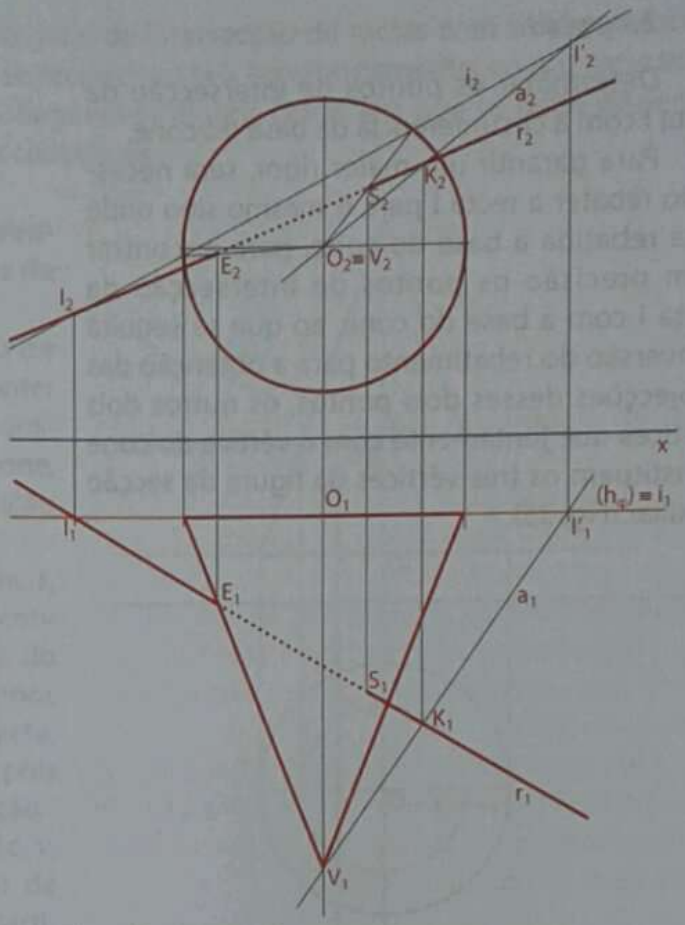


Fig. 33 Projecções dos pontos **E** e **S** procurados.

Determinemos, desta vez, os pontos de intersecção de uma recta f, de frente, com um cone de revolução de base de topo.

1.º passo

Determinar a recta **i** de intersecção do plano auxiliar, definido pelo vértice **V** e pela recta **f**, com o plano π da base do sólido.

Pelo ponto ***V*** conduz-se uma recta **a**, concorrente com a recta **f**, no ponto **K**. Determinam-se os pontos de intersecção das rectas **f** e **a** com o plano da base do sólido, plano π. Pelo ponto de intersecção, da projecção frontal, da recta **f** com o traço frontal do plano π, obtém-se a projecção frontal I_2, do ponto **I**, da sua intersecção, cuja projecção horizontal I_1 se situa sobre a projecção horizontal da recta **f**.

Este raciocínio é repetido com a recta auxiliar **a**, cuja intersecção da sua projecção frontal com o traço frontal do plano π, origina I'_2 cuja projecção horizontal I'_1, situa-se sobre a projecção horizontal da recta **a**.

A união de **I** com **I'** dá origem à recta **i**, de intersecção do plano da base do cone com o plano auxiliar, que contém a recta **f** dada e o vértice do cone (Fig. 34).

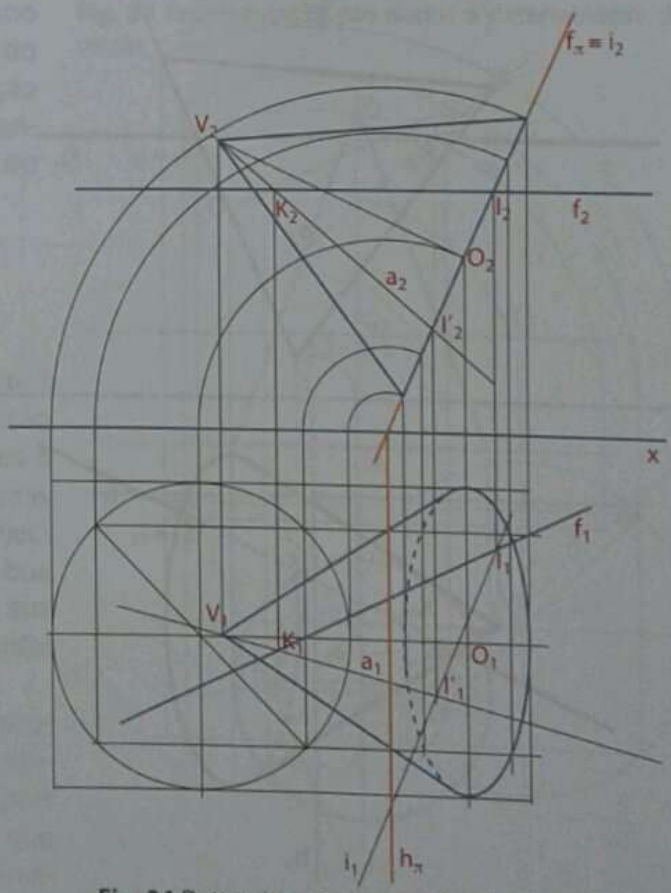


Fig. 34 Determinação da recta **i** de intersecção do plano auxiliar com o plano da base

2.º passo

Determinar os pontos de intersecção da recta **i** com a circunferência da base do cone.

Para garantir um maior rigor, será necessário rebater a recta **i** para o mesmo sítio onde está rebatida a base do cone, para encontrar com precisão os pontos de intersecção da recta **i** com a base do cone, ao que se seguirá a inversão do rebatimento para a obtenção das projecções desses dois pontos, os outros dois vértices que juntamente com o vértice do cone constituem os três vértices da figura da secção auxiliar (Fig. 35).

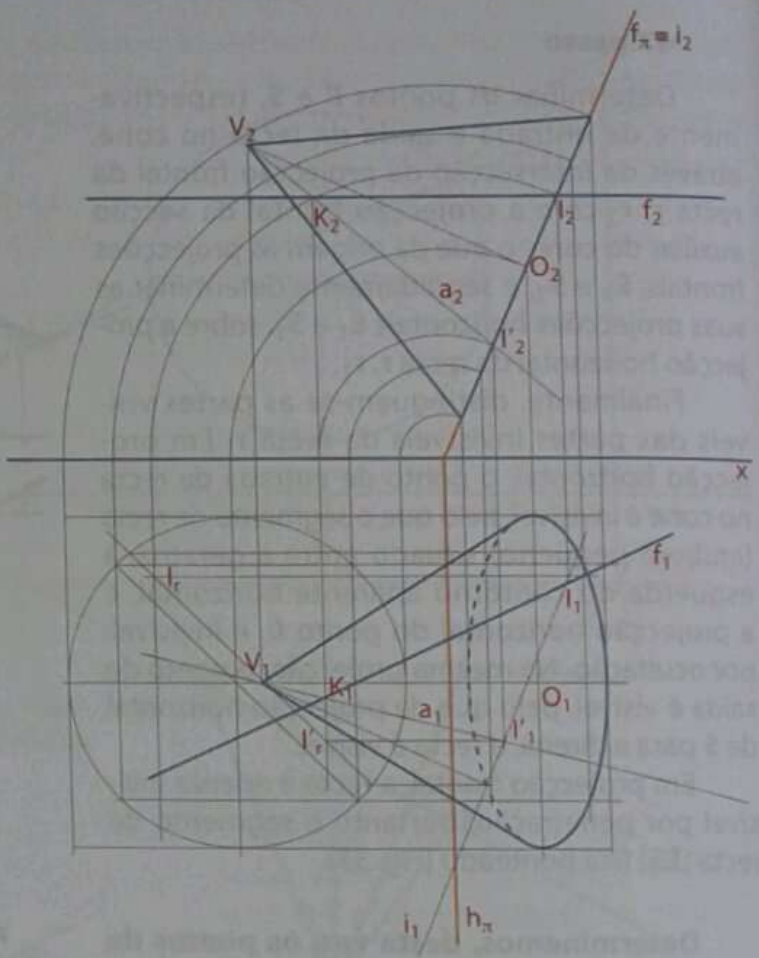


Fig. 35 Determinação dos pontos de intersecção da recta **i** com a directriz do cone

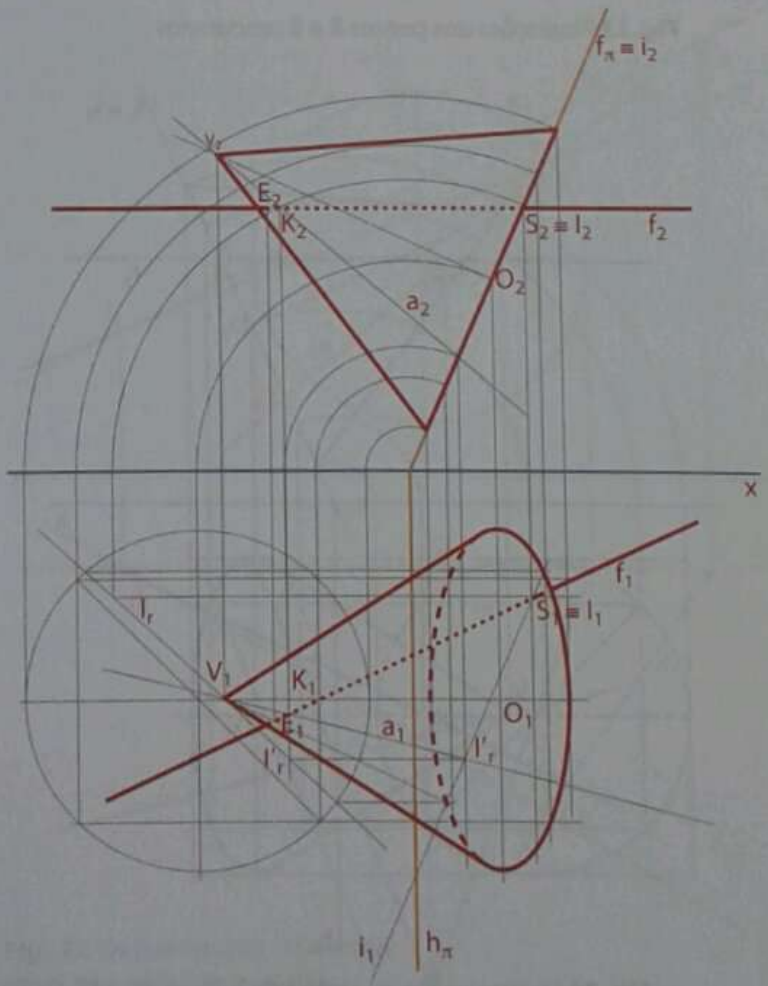


Fig. 36 Determinação dos pontos **E** e **S** procurados.

3.º passo

Determinar os pontos de intersecção da recta **f** com a secção (o triângulo) que são igualmente, da esquerda para a direita, os pontos **E** de entrada e **S** de saída da recta **f**, no cone.

Em projecção frontal, os pontos de entrada e saída da recta no sólido são visíveis, pelo que nesta projecção só ocorre a invisibilidade por penetração.

Em projecção horizontal, os pontos de entrada e saída da recta no sólido são invisíveis, pelo que ocorre uma invisibilidade por ocultação (Fig. 36).

Na intersecção de rectas com cones, o método geral de intersecção de rectas com sólidos também pode ser aplicado tal como ele é, sem no entanto, se recorrer ao seu aprofundamento, com o recurso ao método geral de intersecção de rectas com cones. Seguem-se alguns casos, em que se pode dispensar este método específico para a intersecção de rectas com cones.

Dada uma recta t, de topo, e um cone de revolução, de base de nível, determinemos os pontos da sua intersecção.

Apliquemos o método geral de intersecção de rectas com sólidos. Em primeiro lugar, devemos conter a recta **t** num plano, que origine uma secção de construção rigorosa. Neste caso, como se trata de um cone, as únicas secções cónicas que possuem construção rigorosa são a circunferência e o triângulo.

Para que a secção cónica seja uma circunferência, a condição necessária é que o plano secante, que contém a recta **t** dada, seja paralelo ao plano da base do cone, isto é, um plano de nível. Quando efectuamos o estudo de rectas dum plano, vimos que uma recta, de topo, pode estar contida num plano de nível, pois ambos são paralelos ao plano horizontal de projecção.

Sendo assim, conduz-se pela recta **t** um plano ν, de nível, o qual produz no cone uma secção circular de centro **C** (Fig. 37). De referir que este é um caso particular, em que não se aplica o método de intersecção de rectas com cones, pois, dada a posição do plano auxiliar escolhido e a posição do plano da base do cone, não é possível determinar a recta de intersecção desses dois planos, devido ao facto de a recta resultante dessa intersecção situar-se num ponto impróprio ou inacessível.

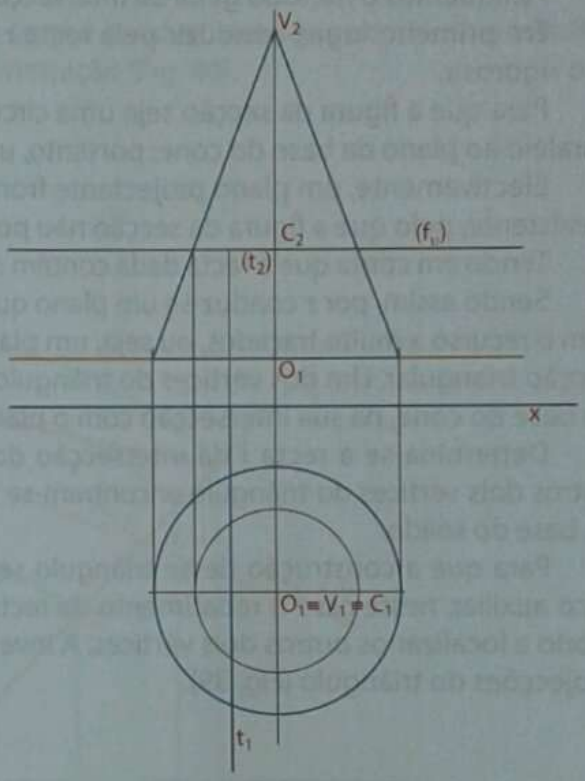


Fig. 37 Representação dos dados e determinação da secção

Pela intersecção, da projecção horizontal, da recta **t** com a projecção horizontal da circunferência da secção obtêm-se as projecções horizontais E_1 e S_1, dos pontos **E** e **S**, respectivamente de entrada e saída da recta no cone, cujas projecções frontais são coincidentes com a projecção frontal da recta de topo $(t_2) \equiv E_2 \equiv S_2$. Recorde que qualquer ponto contido numa recta de topo, tem a sua projecção frontal coincidente com a projecção frontal da recta.

A recta é invisível apenas por penetração, em projecção horizontal. Em projecção frontal, não há possibilidade de se distinguir as diferentes partes da recta, pois ela está reduzida a um ponto. No entanto, sabe-se que o ponto de entrada é visível, e o ponto de saída é invisível. Invisível também é a parte da recta que se situa depois do ponto **S** (Fig. 38).

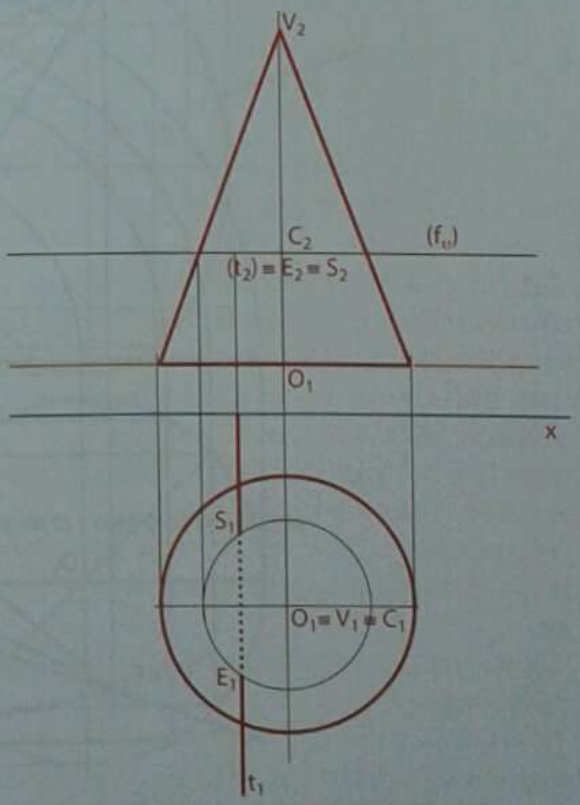


Fig. 38 Determinação dos pontos de intersecção da recta com o cone

Um outro caso que importa estudar, na intersecção de rectas com cones, é quando a recta que intersecta o sólido contém o vértice do cone.

Dada uma recta r oblíqua e um cone oblíquo de base de topo, determinemos os pontos de sua intersecção. A recta r contém o vértice V do cone.

Apliquemos o método geral de intersecção de rectas com sólidos.

Em primeiro lugar, conduzir pela recta **r** um plano que determine uma secção cónica, de construção rigorosa.

Para que a figura da secção seja uma circunferência, o plano secante, contendo a recta **r**, deveria ser paralelo ao plano da base do cone; portanto, um plano projectante frontal.

Efectivamente, um plano projectante frontal, paralelo ao plano da base e contendo a recta **r**, dada, é inexistente, pelo que a figura da secção não pode de forma alguma ser uma circunferência.

Tendo em conta que a recta dada contém o vértice do cone, a figura da secção pode ser um triângulo.

Sendo assim, por **r** conduz-se um plano que mais facilmente permite encontrar a solução do problema sem o recurso a muito traçados, ou seja, um plano projectante frontal. Este plano determina, no cone, uma secção triangular. Um dos vértices do triângulo é o próprio vértice do cone e os outros dois encontram-se na base do cone, na sua intersecção com o plano auxiliar secante.

Determina-se a recta **i** da intersecção do plano γ, com o plano π, auxiliar, contendo a recta **r**. Os outros dois vértices do triângulo encontram-se precisamente na intersecção da recta **i** com a circunferência da base do sólido.

Para que a construção desse triângulo seja rigorosa é necessário recorrer-se a um método geométrico auxiliar, neste caso o rebatimento da recta **i** sobre o mesmo plano que a circunferência rebatida, de modo a localizar os outros dois vértices. A inversão do rebatimento permite determinar rigorosamente as projecções do triângulo (Fig. 39).

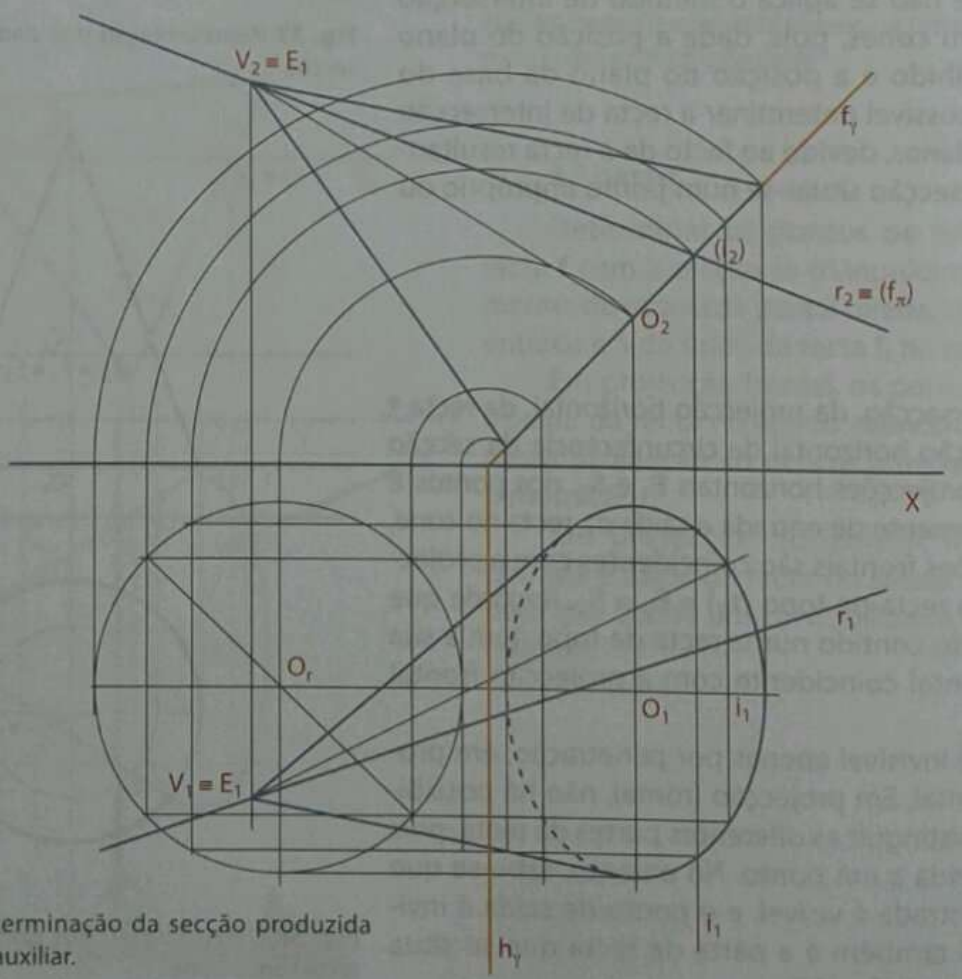


Fig. 39 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar.

O ponto **E**, de entrada da recta no sólido, é coincidente com o vértice do cone, e o ponto **S**, de saída, encontra-se na intersecção de **r** com um dos lados do triângulo da secção (o que se situa na base do cone).

Em projecção frontal, a recta **r** é invisível apenas por penetração, ou seja, os pontos de entrada e saída da recta no sólido são visíveis nesta projecção.

Em projecção horizontal, o ponto de saída da recta no cone é invisível, pelo que ocorre uma invisibilidade por ocultação, além da evidente invisibilidade por penetração (Fig. 40).

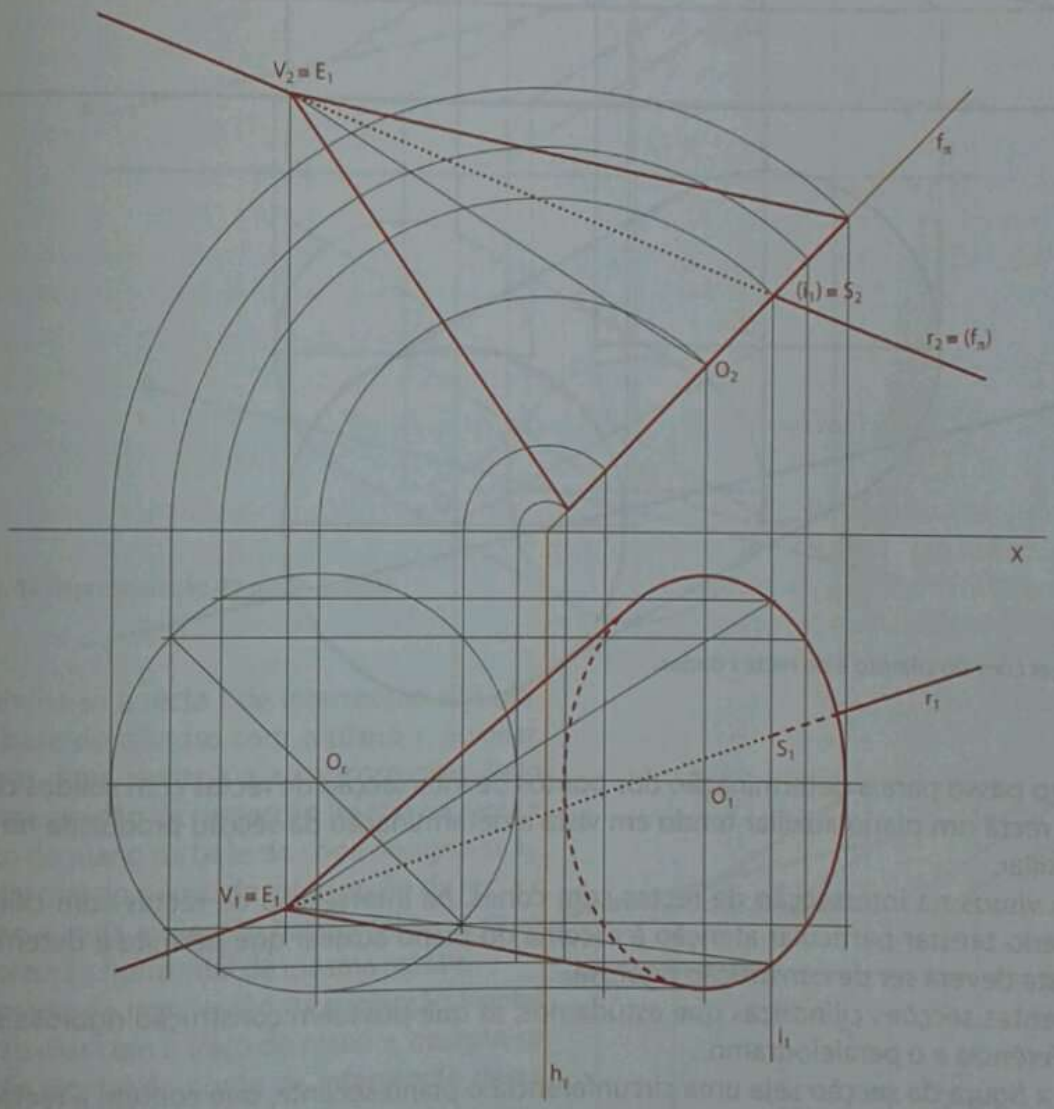


Fig. 40 Projecção dos pontos de intersecção da recta **r** com o cone oblíquo

Intersecção de rectas com cilindros

Dada uma recta oblíqua e um cilindro também oblíquo, determinemos a sua intersecção.

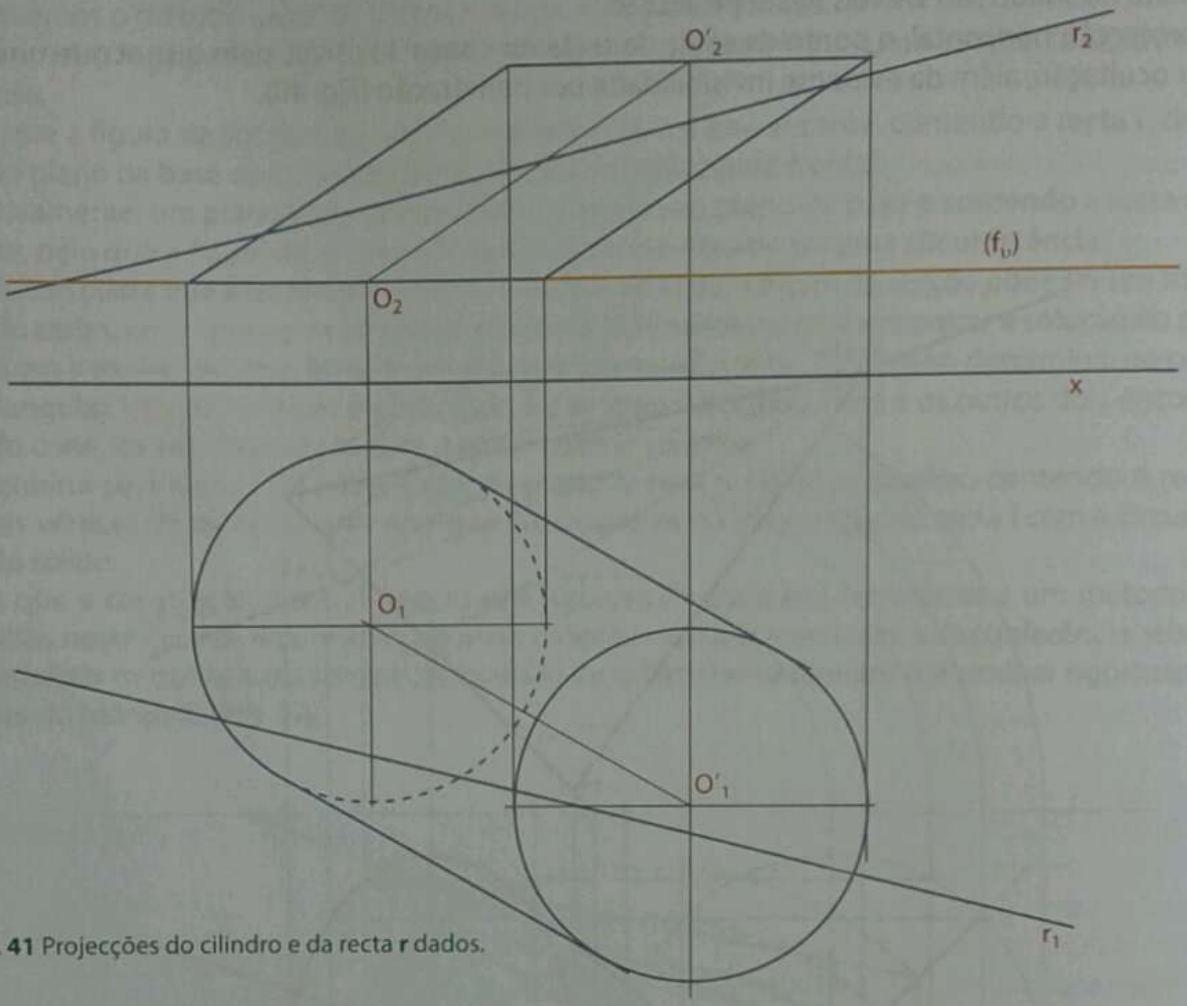


Fig. 41 Projecções do cilindro e da recta **r** dados.

O primeiro passo para a determinação dos pontos de intersecção de rectas com sólidos consiste em conduzir pela recta um plano auxiliar tendo em vista a determinação da secção produzida no sólido por esse plano auxiliar.

Tal como vimos na intersecção de rectas com cones, na intersecção de rectas com cilindros também é necessário prestar particular atenção à escolha do plano auxiliar que permite a determinação da secção, pois esta deverá ser de construção rigorosa.

Das diferentes secções cilíndricas que estudamos, as que possuem construção rigorosa são apenas duas, a circunferência e o paralelogramo.

Para que a figura da secção seja uma circunferência o plano secante, que contém a recta dada, tem de ser paralelo aos planos das bases.

No presente caso, como se trata de uma recta oblíqua e os planos das bases são de nível, esta recta não pode estar contida num plano de nível, pelo que a hipótese de se recorrer a uma secção circular fica de fora.

Só nos resta a possibilidade de usar um plano auxiliar que determina uma secção com a forma de um **paralelogramo**.

Assim, há que se recorrer a um plano auxiliar que, contendo a recta **r** dada, seja paralelo ao eixo do cilindro, pois só assim é que a figura da secção será um paralelogramo.

Esse plano auxiliar contém igualmente duas geratrizes do cilindro, que coincidem com dois lados do paralelogramo. Os outros dois lados do paralelogramo situam-se nas bases do cilindro e a sua obtenção

processa-se através da determinação da recta **i**, de intersecção do plano auxiliar com o plano da base do sólido.

A intersecção da recta **i** com a circunferência da base, de referência, do cilindro determina dois vértices do paralelogramo. Os outros dois vértices encontram-se noutra base, sobre as geratrizes que contêm os dois pontos anteriores.

Observemos esses procedimentos no nosso exercício.

Traça-se uma recta **a**, auxiliar, paralela ao eixo do cilindro e que intersecta a recta **r** dada, no ponto **K**. As rectas **a** e **r** definem um plano γ, auxiliar, paralelo ao eixo, do cilindro (Fig. 42).

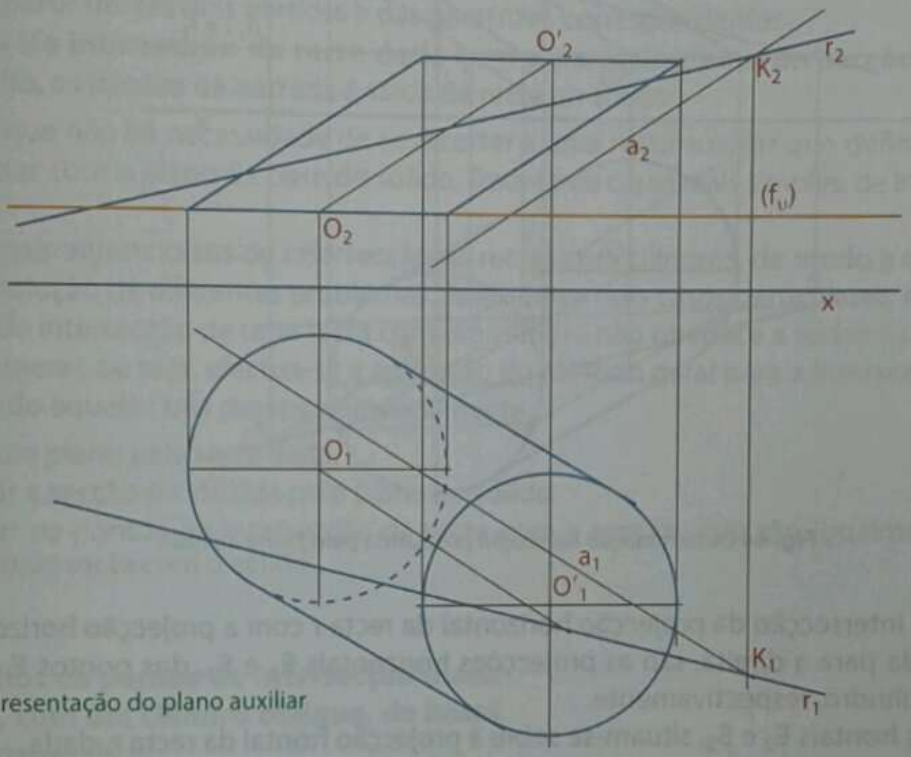


Fig. 42 Representação do plano auxiliar

Determina-se a recta **i** de intersecção dos planos ν, da base do cilindro com o plano γ, auxiliar, definido por duas rectas **r** e **a** concorrentes. Pelo ponto de intersecção da projecção frontal da recta **r** com o traço do plano da base do cone designa-se $\mathbf{l_2}$, projecção frontal do ponto de intersecção da recta **r** com o plano ν, cuja projecção horizontal $\mathbf{l_1}$, se situa sobre a projecção horizontal da mesma recta **r**.

Pelo ponto de intersecção da projecção frontal da recta **a** auxiliar com o traço do plano ν, designa-se $\mathbf{l'_2}$, projecção frontal do ponto de intersecção dessa recta **a** com o plano da base do sólido, cuja projecção horizontal $\mathbf{l'_1}$, situa-se sobre $\mathbf{a_1}$.

A união das projecções frontais $\mathbf{l_2}$ e $\mathbf{l'_2}$ dá origem à $\mathbf{i_2}$, projecção frontal da recta **i**, de intersecção do plano ν da base do cilindro com o plano γ, paralelo ao eixo do cilindro, definido pela recta **r** dada, e a recta **a**, auxiliar, paralela ao eixo do cilindro. A projecção horizontal da recta **i**, $\mathbf{i_1}$, resulta da união das projecções horizontais dos mesmos pontos **I** e **I'**, nomeadamente $\mathbf{l_1}$ e $\mathbf{l'_1}$ (Fig. 43).

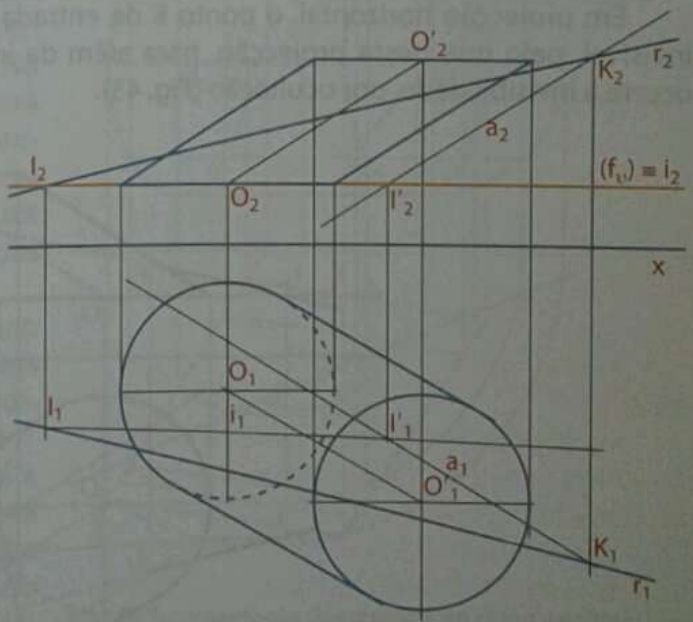


Fig. 43 Determinação da recta de intersecção do plano auxiliar com o plano da base

A recta **i**, ao intersectar a base do cilindro define dois pontos, dois dos vértices do paralelogramo. Os outros dois vértices do paralelogramo situam-se noutra base do cilindro, sobre as geratrizes que contêm os primeiros dois vértices. Tal como o fizemos nos cones, como forma de se usar o número mínimo de traços, não haverá necessidade de se determinar as duas projecções da secção; neste caso, considera-se apenas a projecção horizontal (Fig. 44).

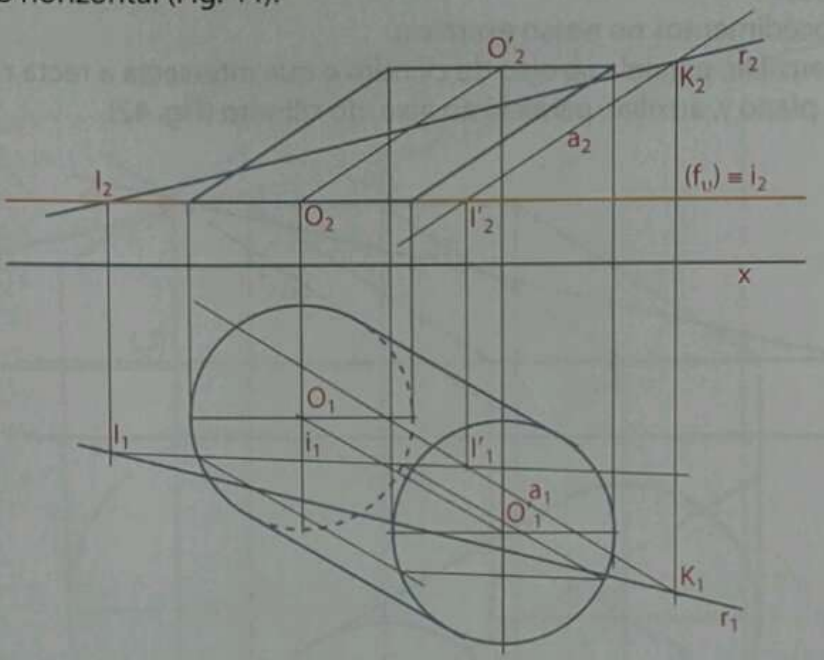


Fig. 44 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar.

Os pontos de intersecção da projecção horizontal da recta **r** com a projecção horizontal do paralelogramo, da esquerda para a direita, são as projecções horizontais E_1 e S_1, dos pontos **E** e **S**, de entrada e saída da recta no cilindro, respectivamente.

As projecções frontais E_2 e S_2, situam-se sobre a projecção frontal da recta **r**, dada.

Em projecção frontal, os pontos de entrada e saída da recta são visíveis, pelo que nesta projecção a invisibilidade, por ocultação, não ocorre.

Em projecção horizontal, o ponto **E** de entrada da recta no sólido é visível, e o ponto **S** de saída é invisível, pelo que nesta projecção, para além da invisibilidade por penetração que é óbvia, também ocorre a invisibilidade, por ocultação (Fig. 45).

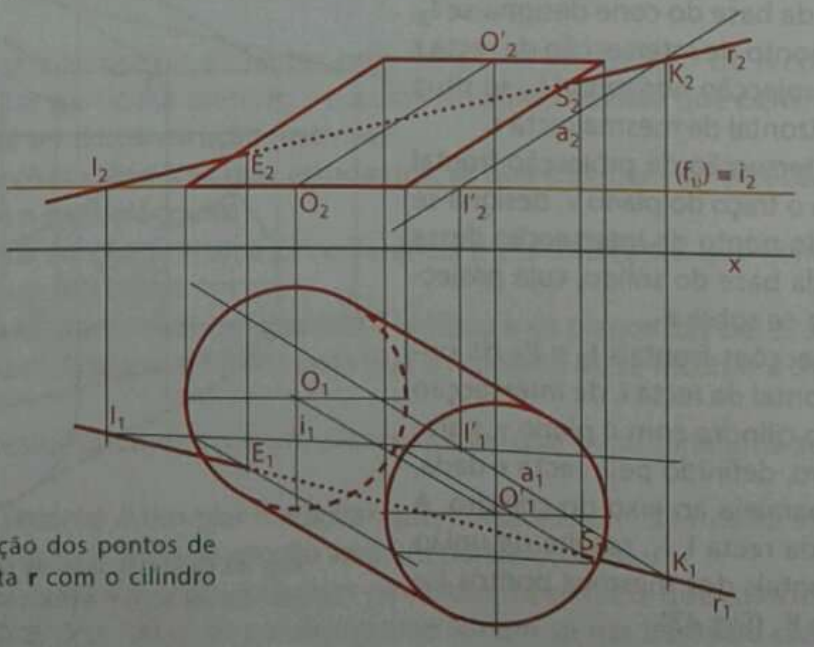


Fig. 45 Determinação dos pontos de intersecção da recta **r** com o cilindro oblíquo

Deste modo, foi desenvolvido o método geral de intersecção de rectas com cilindros, a partir do método geral de intersecção de rectas com sólidos, que consiste no seguinte:

1. **Conduzir pela recta dada um plano auxiliar que contenha duas geratrizes do sólido.** A secção produzida por esse plano auxiliar será um paralelogramo.
2. **Determinar a recta i de intersecção, do plano auxiliar**, que contém a recta dada com o plano de uma das bases do cilindro.
3. **A recta i, ao intersectar-se com a circunferência da base do cilindro**, origina dois pontos que são dois dos vértices do paralelogramo da secção produzida no cilindro, paralelogramo que fica definido a partir desses dois vértices e das geratrizes correspondentes.
4. **Os pontos de intersecção da recta dada com o paralelogramo da secção são**, da esquerda para a direita, os pontos de entrada e saída da recta no sólido.

Há casos em que não há necessidade de se recorrer a uma recta auxiliar que define um plano, o qual se deverá intersectar com o plano da base do sólido. Trata-se de casos mais simples, de intersecção de rectas com cilindros.

Analisemos mais alguns casos de intersecção de rectas com cilindros, de modo a que estejamos preparados para a resolução de diferentes problemas. Analisemos dois casos particulares, em que a aplicação do método geral de intersecção de uma recta com um cilindro não obedece a todos os quatro passos que acabámos de enumerar, ou seja, efectua-se a aplicação do método geral para a intersecção de rectas com sólidos, obedecendo àqueles três passos, nomeadamente:

1. Conduzir um plano pela recta dada.
2. Determinar a secção produzida pelo plano no sólido.
3. Determinar os pontos de intersecção da recta com a secção, que são igualmente os pontos de intersecção da recta com o sólido.

Determinemos os pontos de intersecção duma recta n, de nível, com um cilindro oblíquo, de bases projectantes horizontais.

De acordo com o método geral para a intersecção de rectas com sólidos, o primeiro passo consiste em conduzir pela recta dada um plano que permite determinar uma figura de secção, de construção rigorosa. No caso dos cilindros, as secções de construção rigorosa podem ser circunferência ou paralelogramo. No presente exercício, a figura de secção poderia ser uma circunferência se houvesse a possibilidade de se conduzir pela recta **n**, de nível, um plano paralelo aos planos das bases, ou seja, um plano projectante horizontal.

Uma recta, de nível, pode estar contida num plano projectante horizontal, mas neste caso esse plano não seria paralelo aos planos das bases do cilindro, pelo que a possibilidade de a secção ser uma circunferência fica excluída.

Assim sendo, resta-nos apenas a hipótese de a secção ser um paralelogramo. Se conduzirmos pela recta **n**, um plano de nível, este seccionará o cilindro segundo um paralelogramo, pois este plano é paralelo ao eixo do cilindro e contém duas das suas geratrizes (Fig. 46).

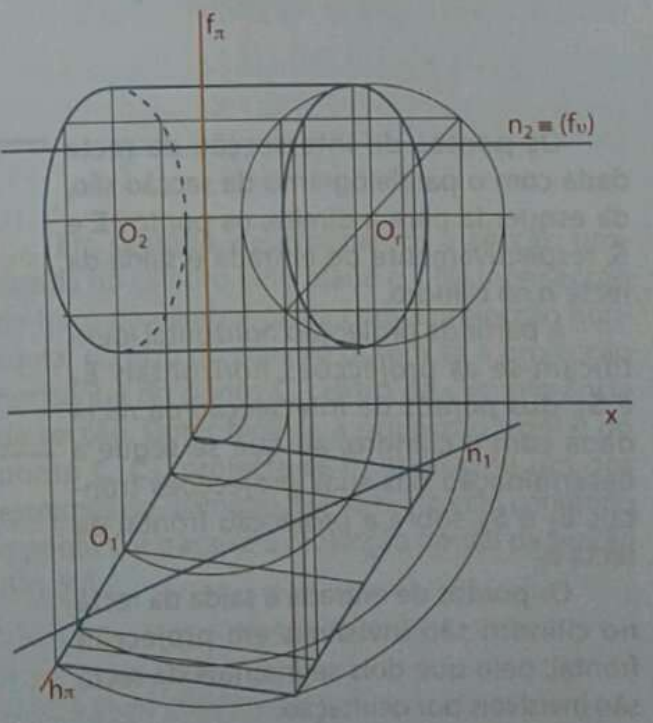


Fig. 46 Representação dos dados e do plano auxiliar.

Determina-se a secção produzida no cilindro pelo plano auxiliar ν, de nível. O plano secante, ao se intersectar com as circunferências das bases do cilindro origina quatro pontos, sendo dois em cada uma das bases. Esses quatro pontos são os vértices do paralelogramo, da secção (Fig. 47).

Note que, para um maior rigor na localização dos vértices do paralelogramo, recorreu-se à base de referência rebatida ao que se seguiu a inversão do rebatimento para determinar as projecções dos vértices da figura da secção auxiliar.

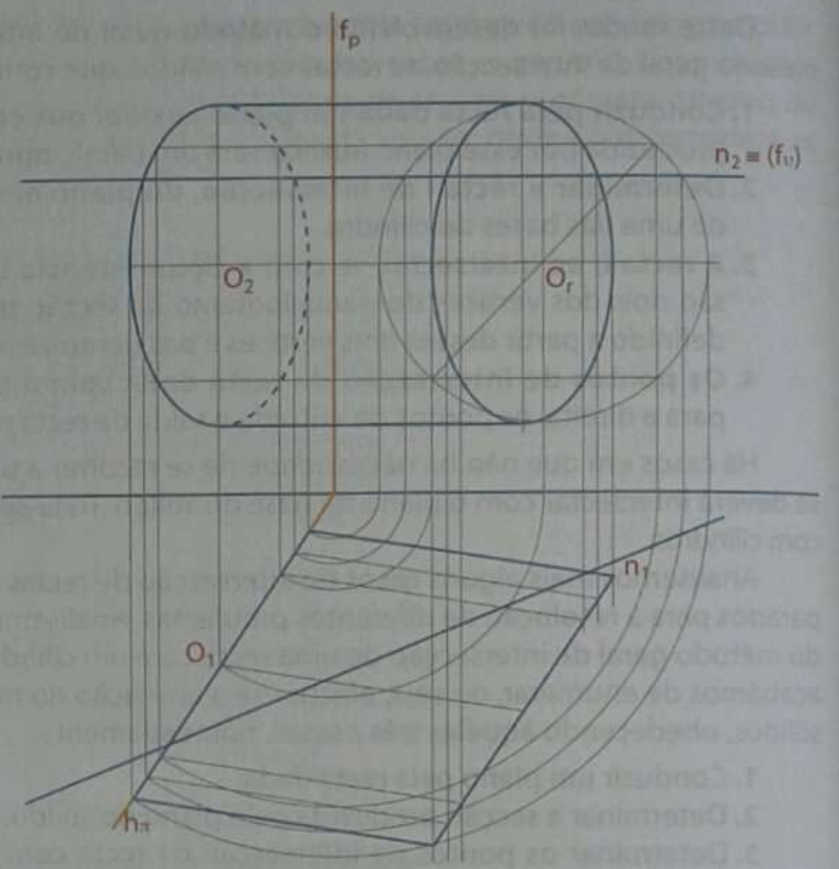


Fig. 47 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar.

Os pontos de intersecção da recta dada com o paralelogramo da secção são, da esquerda para a direita, os pontos **E** e **S**, respectivamente de entrada e saída da recta **n** no cilindro.

A partir da projecção horizontal identificam-se as projecções horizontais E_1 e S_1, dos pontos de intersecção da recta dada com o cilindro, ao que se segue a determinação das suas projecções frontais E_2 e S_2, sobre a projecção frontal da recta **n**.

Os pontos de entrada e saída da recta no cilindro são invisíveis em projecção frontal, pelo que dois segmentos da recta são invisíveis por ocultação.

Em projecção horizontal, os pontos de entrada e saída da recta no cilindro são visíveis, logo nesta projecção não ocorre nenhuma invisibilidade por ocultação (Fig. 48).

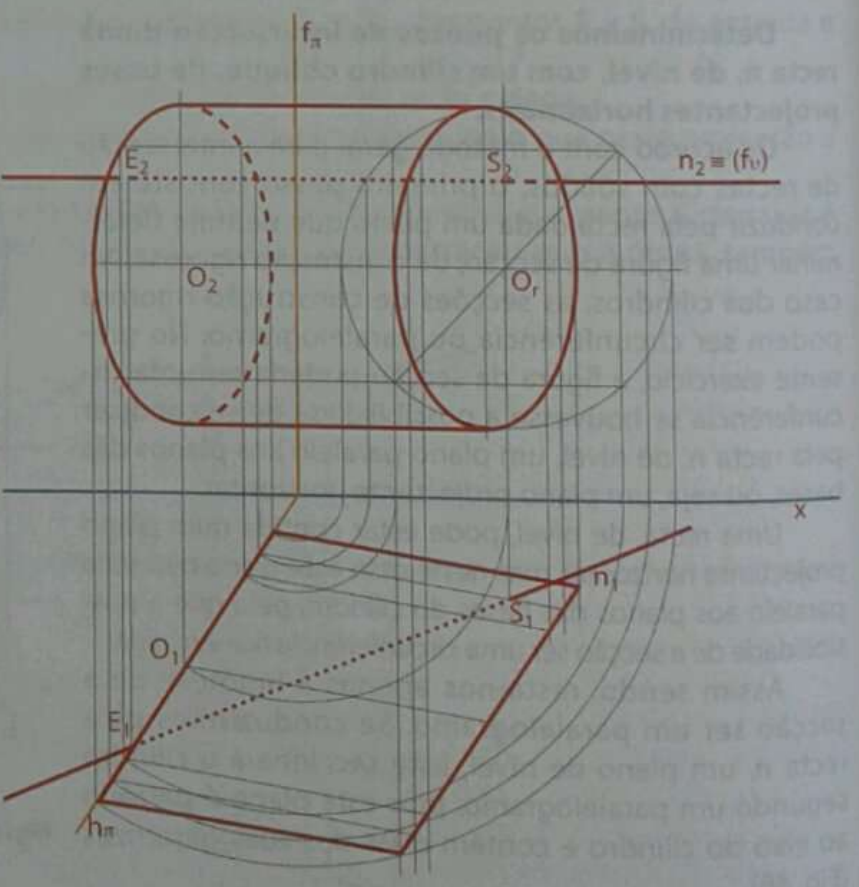


Fig. 48 Determinação dos pontos **E** e **S** procurados.

Para finalizar o estudo de intersecção de rectas com cilindros, vamos **determinar os pontos de intersecção duma recta f, de frente, com um cilindro oblíquo, de bases também de frente.**

Apliquemos o método geral para a intersecção de rectas com sólidos, pois trata-se de um caso particular em que podemos usar um plano secante, paralelo aos planos das bases do cilindro, pelo que a secção será uma circunferência, uma figura geométrica de construção rigorosa.

Em primeiro lugar, fazemos passar pela recta f um plano φ_1, de frente, naturalmente paralelo ao plano φ, de uma das bases do cilindro (Fig. 49).

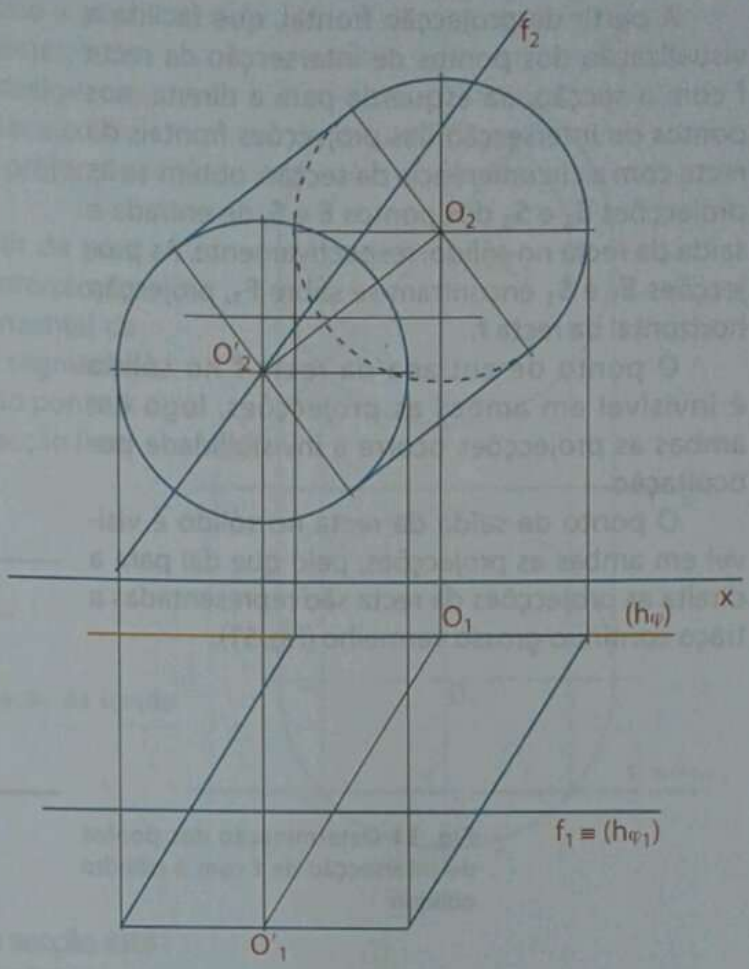


Fig. 49 Representação dos dados e do plano auxiliar φ

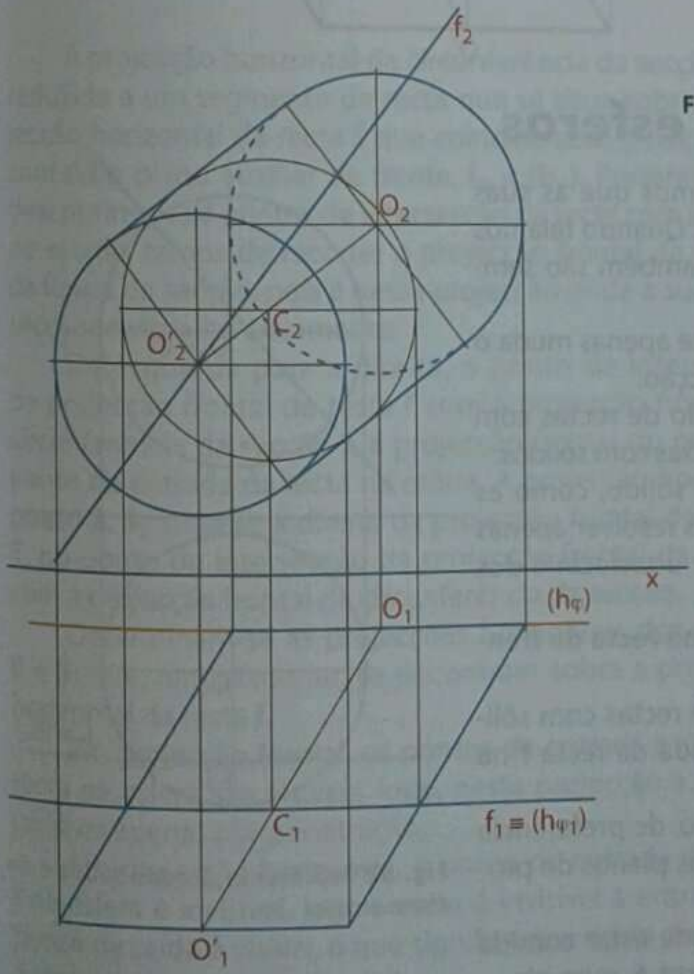


Fig. 50 Determinação da secção produzida pelo plano auxiliar.

Em seguida, determinamos a secção produzida no cilindro pelo plano φ_1. Na intersecção do traço do plano secante com a projecção horizontal do eixo do cilindro obtém-se a projecção horizontal do ponto **C**, centro da circunferência da secção. Determina-se a projecção frontal do ponto **C**, $\mathbf{C_2}$, projecta-se frontalmente um dos extremos do diâmetro fronto-horizontal contendo o ponto **C** e traça-se a projecção frontal da secção (Fig. 50).

A partir da projecção frontal, que facilita a visualização dos pontos de intersecção da recta **f** com a secção, da esquerda para a direita, nos pontos de intersecção das projecções frontais da recta com a circunferência da secção, obtêm-se as projecções E_2 e S_2 dos pontos **E** e **S**, de entrada e saída da recta no sólido, respectivamente. As projecções E_1 e S_1 encontram-se sobre F_1, projecção horizontal da recta **f**.

O ponto de entrada da recta **f** no sólido é invisível em ambas as projecções, logo em ambas as projecções ocorre a invisibilidade por ocultação.

O ponto de saída da recta no sólido é visível em ambas as projecções, pelo que daí para a direita as projecções da recta são representadas a traço contínuo grosso vermelho (Fig. 51).

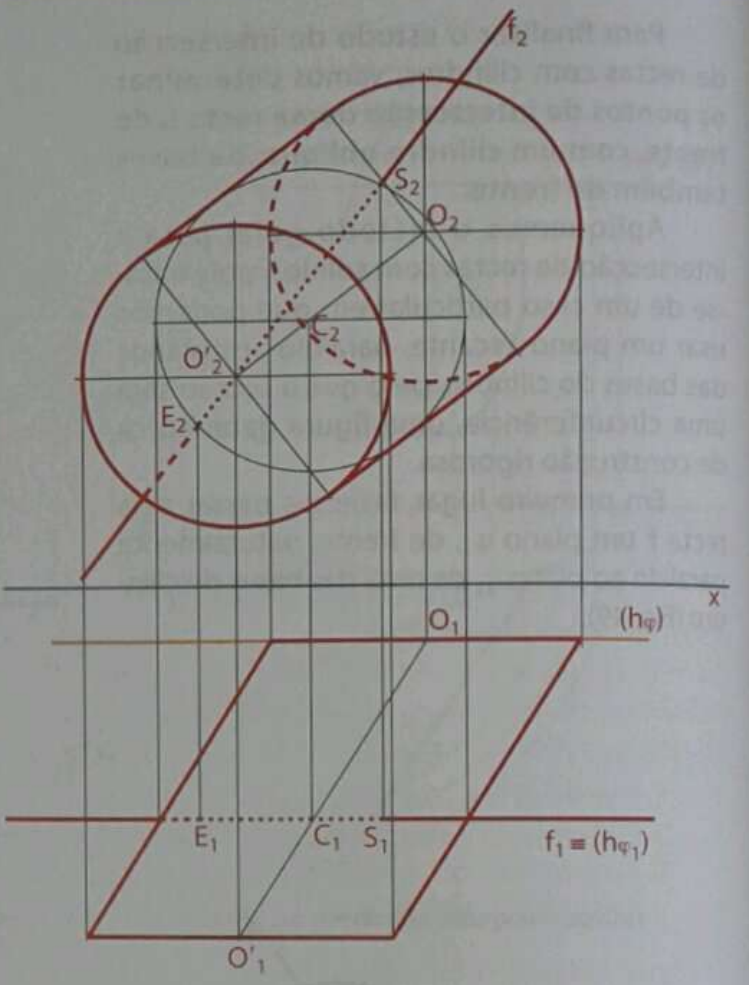


Fig. 51 Determinação dos pontos de intersecção de **f** com o cilindro oblíquo

Intersecção de rectas com esferas

Quando falamos de projecções de esferas vimos que as suas projecções são sempre limitadas por circunferência. Quando falamos de secções produzidas em esferas vimos que elas também são sempre limitadas por uma circunferência.

Portanto, estamos perante uma situação em que apenas muda o plano secante, mantendo-se a forma da figura da secção.

Para a determinação dos pontos de intersecção de rectas com esferas aplica-se o método geral de intersecção de rectas com sólidos.

Tendo em conta que tanto as projecções do sólido, como as figuras das secções, têm contornos circulares, iremos resolver apenas dois exercícios, número suficiente para se entender o raciocínio dos procedimentos necessários.

Determinemos os pontos de intersecção duma recta de frente f com uma esfera.

Apliquemos o método geral de intersecção de rectas com sólidos para encontrarmos os pontos de entrada e saída da recta **f** na esfera dada.

Começamos por conduzir pela recta **f** um plano, de preferência projectante e, se possível, que seja paralelo a um dos planos de projecção.

Como se trata de uma recta de frente, esta pode estar contida num plano paralelo a um dos planos de projecção, isto é, num plano auxiliar φ, de frente (Fig. 52).

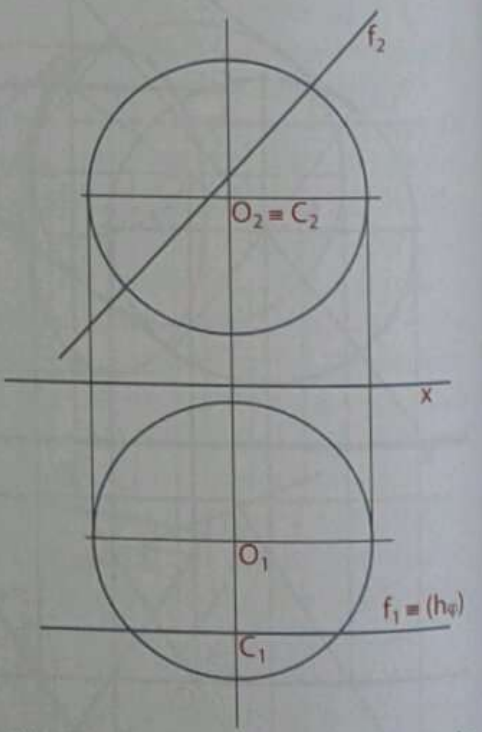


Fig. 52 Representação dos dados e do plano auxiliar

Determinemos a figura da secção que o plano φ produz na esfera. Pelo ponto de intersecção do diâmetro de topo da esfera com o traço do plano de frente, designa-se a projecção horizontal do centro da secção circular auxiliar, C_1, cuja projecção frontal, C_2, coincide com a projecção frontal do centro da esfera, $O_2 \equiv C_2$.

O raio da figura da secção marca-se a partir da projecção horizontal do ponto **C** até ao ponto de intersecção do plano secante, com o contorno aparente horizontal da esfera. Portanto, o raio da figura da secção é o segmento de recta [**AC**]. Determina-se a projecção frontal do ponto **A** e com centro em C_2 e raio até A_2, traça-se a projecção frontal da circunferência (Fig. 53).

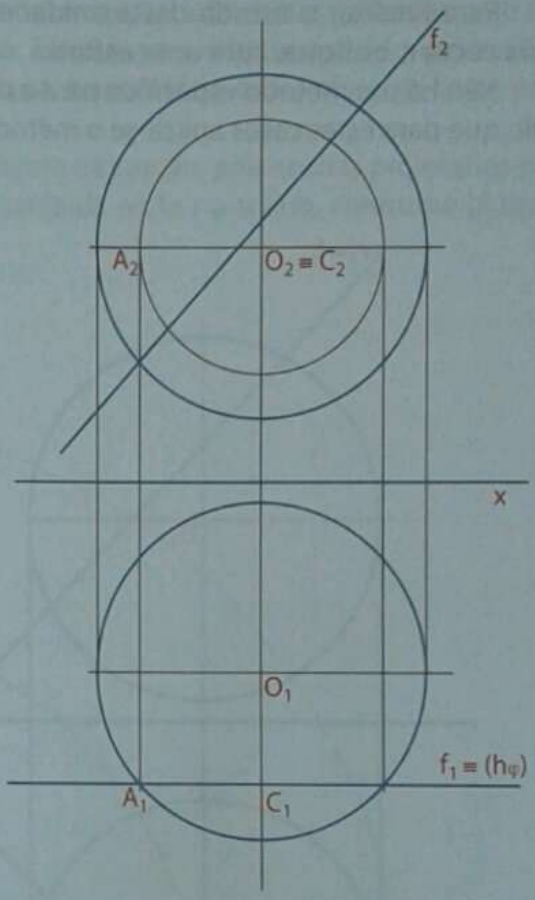


Fig. 53 Determinação da secção produzida por φ

A projecção horizontal da circunferência da secção está reduzida a um segmento de recta que se situa sobre a projecção horizontal da recta **f** que coincide com o traço horizontal do plano auxiliar de frente, $f_1 \equiv (h_\varphi)$. Portanto, para descobrirmos os pontos de intersecção da recta com a figura da secção, temos de recorrer à projecção frontal da recta e da figura da secção, pois é nessa projecção onde a sua intersecção se visualiza claramente.

Da esquerda para a direita, o ponto de intersecção da projecção frontal da recta **f** com a projecção frontal da circunferência da secção é a projecção frontal do ponto **E**, ponto de entrada da recta na esfera. A projecção frontal do ponto **S**, S_2 situa-se à direita da projecção frontal do ponto **E**, no ponto de intersecção da projecção frontal da recta **f** com a projecção frontal da circunferência da secção.

Determinam-se as projecções horizontais dos pontos **E** e **S**, que, naturalmente, se encontram sobre a projecção horizontal da recta **f**.

Em projecção frontal, os pontos de entrada e saída da recta na esfera são visíveis, logo, nesta projecção a recta é invisível apenas por penetração.

Em projecção horizontal, o ponto de entrada da recta **f** na esfera é invisível, logo a recta é invisível à entrada e o ponto de saída é visível, o que significa que nesta projecção a recta é visível à saída (Fig. 54).

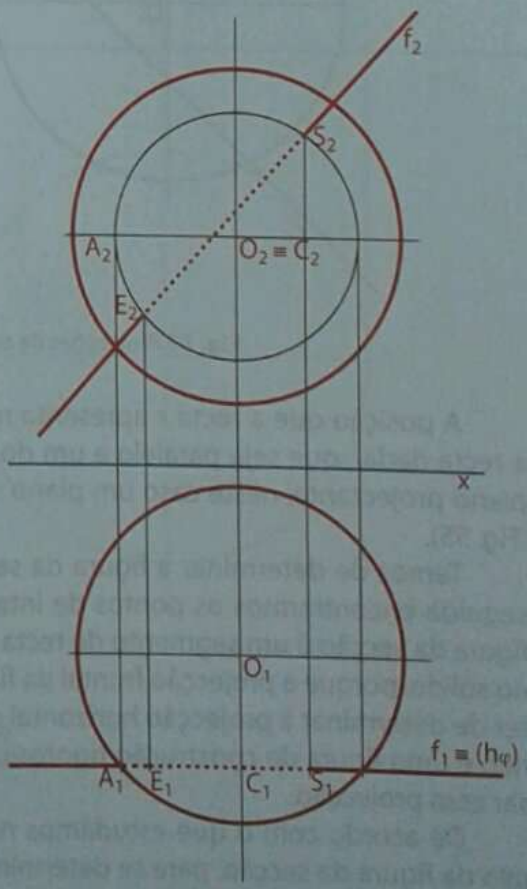


Fig. 54 Determinação dos pontos **E** e **S**

Para finalizar o estudo desta unidade temática, vamos **determinar os pontos de intersecção de uma recta r, oblíqua, com uma esfera**.

Não há um método específico para a determinação dos pontos de intersecção de rectas com esferas, pelo que para estes casos aplica-se o método geral de intersecção de rectas com sólidos.

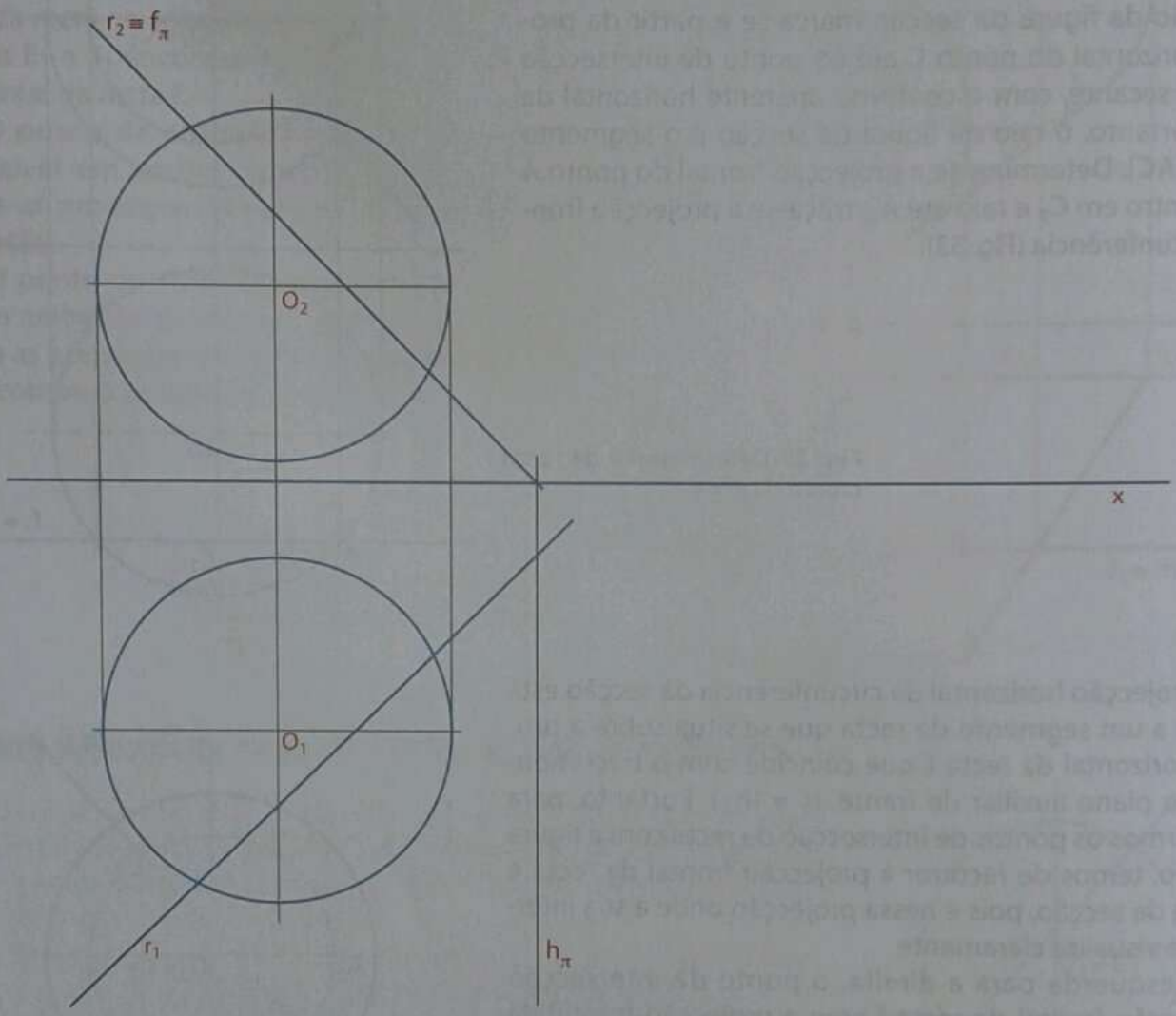


Fig. 55 Projecções da esfera, da recta e representação do plano auxiliar

A posição que a recta **r** apresenta não permite que usemos um plano auxiliar (plano que contenha a recta dada), que seja paralelo a um dos planos de projecção. Em primeiro lugar, conduzimos por **r** um plano projectante, neste caso um plano π, projectante frontal (também poderia ser projectante horizontal) (Fig. 55).

Temos de determinar a figura da secção produzida no sólido pelo plano auxiliar de topo, para em seguida encontrarmos os pontos de intersecção dessa secção com a recta dada. A projecção frontal da figura da secção é um segmento de recta que não permite visualizar os pontos de entrada e saída da recta no sólido, porque a projecção frontal da figura da secção encontra-se sobre a projecção frontal da recta **r**. A ter de determinar a projecção horizontal da figura da secção, esta seria uma elipse e, como já é sabido, ela não é uma figura de construção rigorosa, pelo que, tratando-se duma construção auxiliar, vamos dispensar essa projecção.

De acordo com o que estudámos nas secções produzidas em esferas, basta conhecer o centro e o raio da figura da secção, para se determinar a sua verdadeira grandeza, antes mesmo de se determinar as suas projecções.

Por O_2, traça-se uma perpendicular ao traço frontal do plano π, que ao intersectar esse mesmo traço determina C_2, projecção frontal do centro da figura da secção. Efectua-se o rebatimento do centro **C**, e constrói-se a secção rebatida. O raio da secção é [**AC**], pelo que é necessário determinarem-se as projecções do ponto **A** para o posterior rebatimento.

Não será necessário efectuar-se o contra-rebatimento da figura da secção, pois as suas projecções não ajudarão na determinação rigorosa dos pontos de entrada e saída da recta no sólido, conforme já tinha sido constatado (Fig. 56).

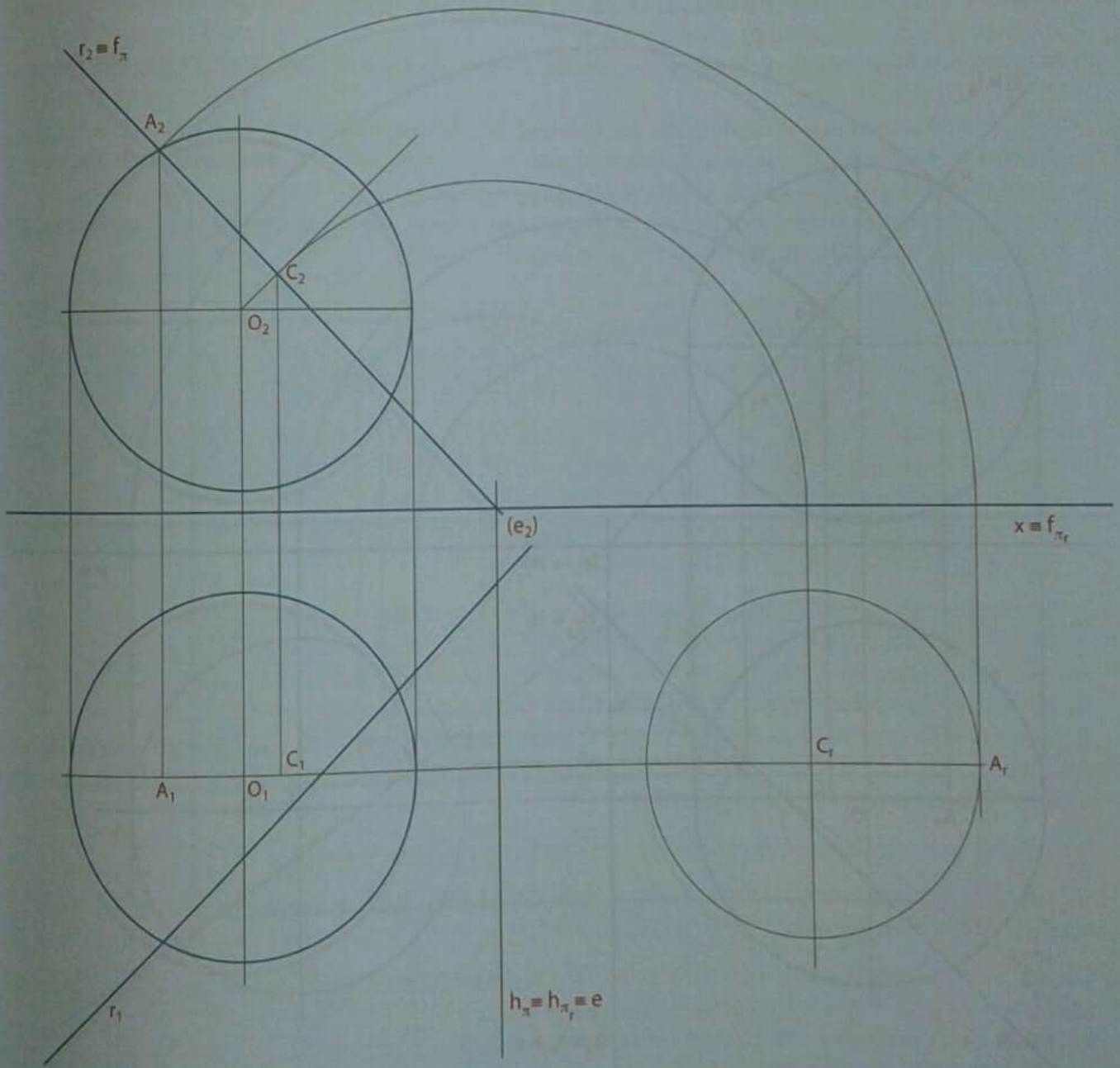


Fig. 56 Rebatimento da figura da secção

A localização rigorosa dos pontos de entrada e saída da recta no sólido é feita no plano de topo rebatido, pois tanto a recta dada como a figura da secção situam-se no mesmo plano π, de topo. Neste caso, há que rebater também a recta r. Para o efeito manteve-se fixo H_r, traço horizontal da recta r, ou seja, o traço horizontal da recta r gira sobre si mesmo. Marcou-se um outro ponto sobre r, K para se efectuar o rebatimento da recta. Unem-se os pontos H_{r_r} com K_r e obtêm-se a recta r rebatida r_r, cuja intersecção com a secção rebatida origina os pontos E e S, de entrada e saída da recta, rebatidos, E_r e S_r (Fig. 57).

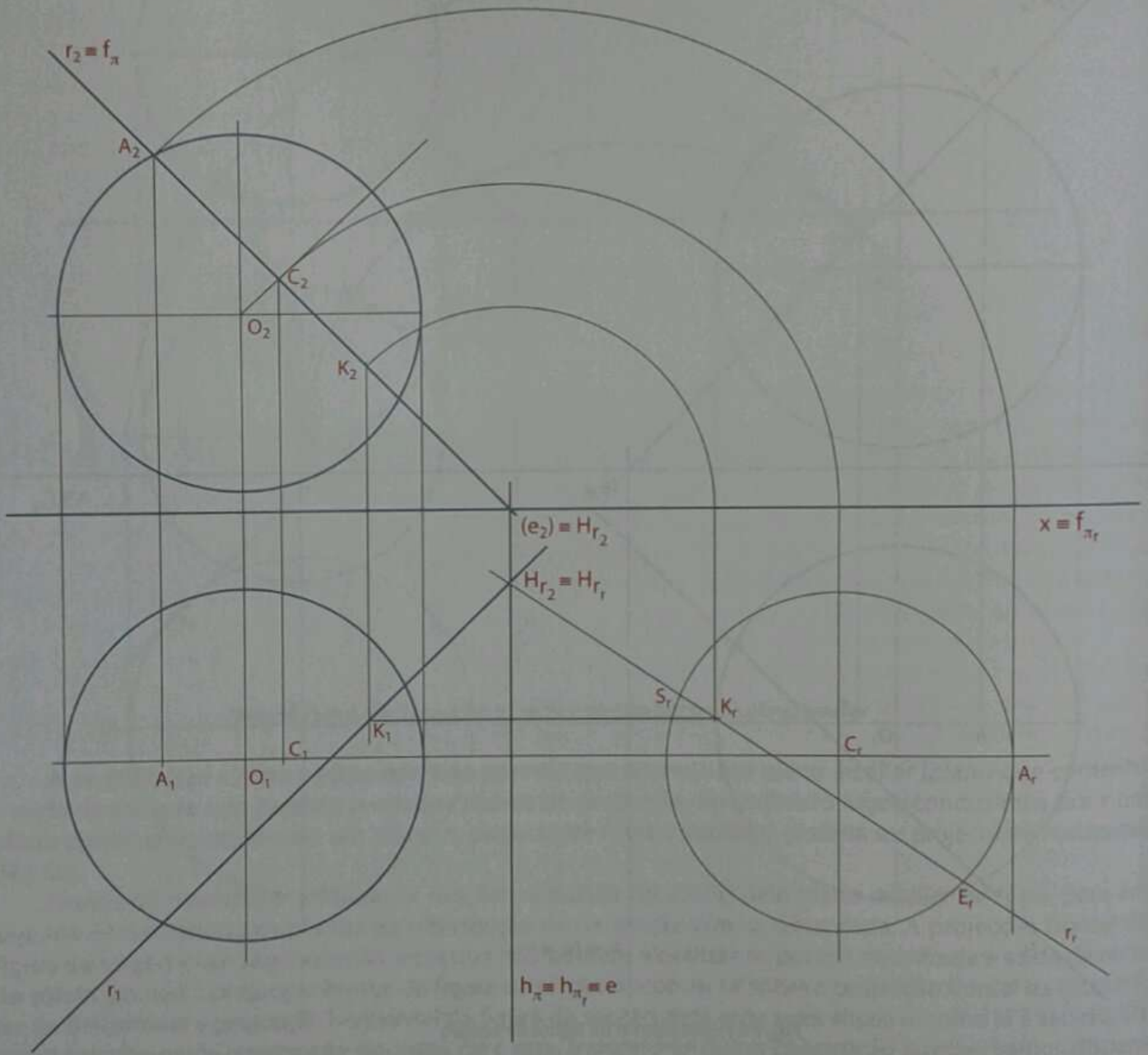


Fig. 57 Determinação dos pontos de entrada e saída, na secção rebatida.

Efectua-se a inversão do rebatimento dos pontos **E**, e **S**, para se obterem as suas projecções.

O ponto de entrada da recta na esfera é visível em ambas as projecções, pelo que a recta é visível à entrada no sólido. O ponto de saída da recta no sólido é invisível em ambas as projecções, o que significa que a recta **r** é invisível à saída do sólido (Fig. 58).

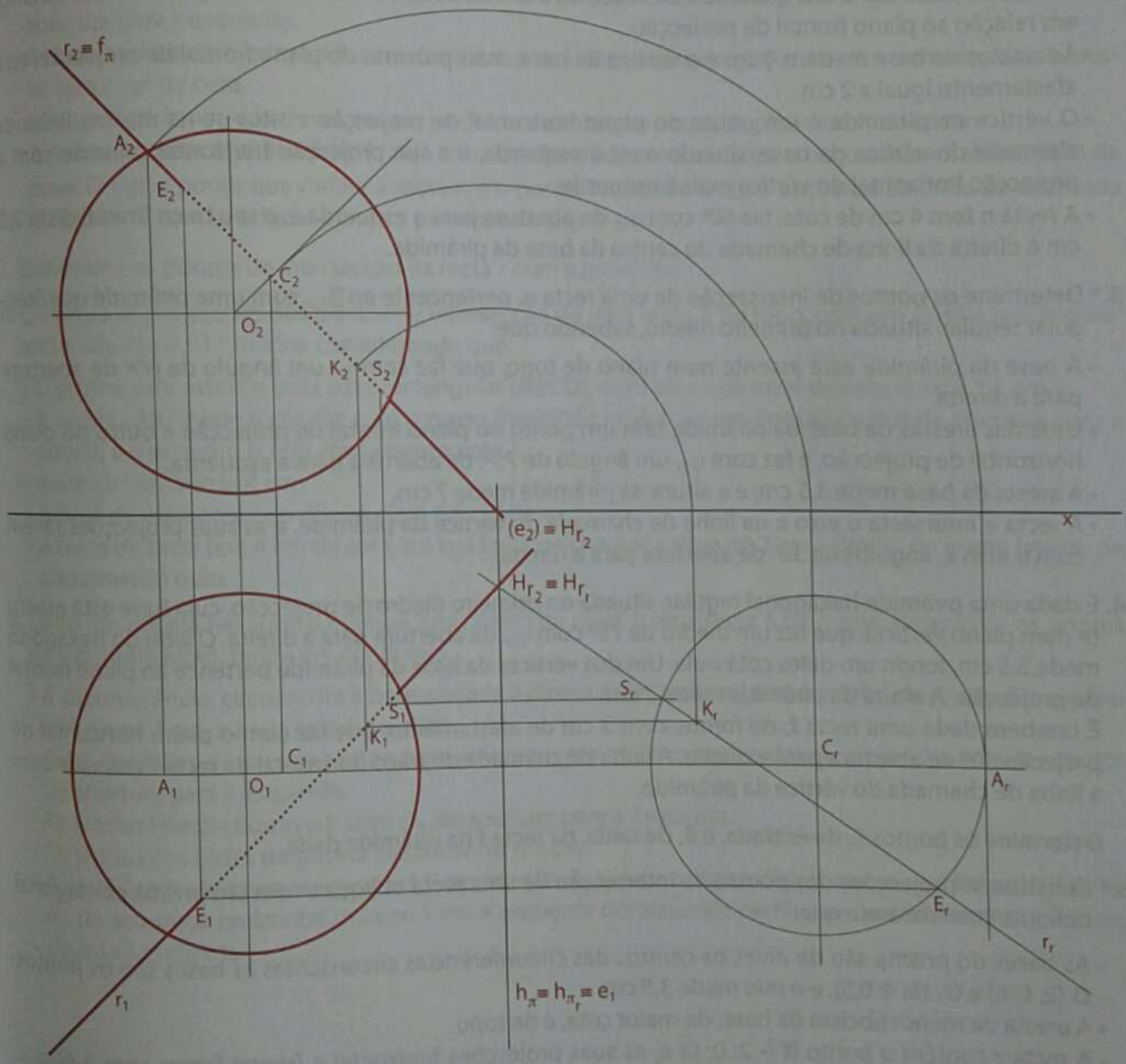


Fig. 58 Projecções dos pontos de intersecção da recta **r** com a esfera

1.* Desenhe as projecções ortogonais de uma pirâmide quadrangular oblíqua, situada no primeiro diedro de projecção e duma recta r, oblíqua, sabendo que:

- A pirâmide está assente, pela base, num plano projectante frontal.
- Os vértices K (0; 4; 0,5) e L (2; 1; 3) da base quadrangular regular [KLMN], definem a aresta [KL].
- O vértice da pirâmide é o ponto V (- 5,5; 2; 7,5).
- A recta r é definida pelos pontos A (- 5,5; 9;2) e B (5; -1,5; 8).

Determine os pontos E, de entrada, e S, de saída da recta r, na pirâmide

2. Determine os pontos de intersecção duma recta n, de nível, com uma pirâmide quadrangular oblíqua, sabendo que:

- A base da pirâmide é um quadrado de nível, de 5 cm de cota, e os lados estão igualmente inclinados em relação ao plano frontal de projecção.
- As arestas da base medem 4 cm e o vértice da base, mais próximo do plano frontal de projecção, tem afastamento igual a 2 cm.
- O vértice da pirâmide é um ponto do plano horizontal de projecção e situa-se na mesma linha de chamada do vértice da base, situado mais à esquerda, e a sua projecção horizontal coincide com a projecção horizontal do vértice mais à esquerda.
- A recta n tem 4 cm de cota, faz 60° com φ_0, de abertura para a esquerda e, o seu traço frontal dista 2,5 cm à direita da linha de chamada do centro da base da pirâmide.

3.* Determine os pontos de intersecção de uma recta a, pertencente ao β_{13}, com uma pirâmide quadrangular regular, situada no primeiro diedro, sabendo que:

- A base da pirâmide está assente num plano de topo, que faz com ν_0 um ângulo de 60° de abertura para a direita.
- Uma das arestas da base da pirâmide tem um ponto no plano frontal de projecção e outro no plano horizontal de projecção, e faz com φ_0, um ângulo de 75°, de abertura para a esquerda.
- A aresta da base mede 3,5 cm, e a altura da pirâmide mede 7 cm.
- A recta a intersecta o eixo x na linha de chamada do vértice da pirâmide, e as suas projecções fazem com o eixo x, ângulos de 30° de abertura para a direita.

4. É dada uma pirâmide hexagonal regular, situada no primeiro diedro de projecção, cuja base está assente num plano vertical, que faz um diedro de 75° com φ_0, de abertura para a direita. O lado do hexágono mede 3,5 cm, tendo um deles cota nula. Um dos vértices da base da pirâmide pertence ao plano frontal de projecção. A altura da pirâmide mede 7 cm.
É também dada uma recta f, de frente, com 3 cm de afastamento, que faz com o plano horizontal de projecão 30° de abertura para a direita. A linha de chamada do traço horizontal da recta f coincide com a linha de chamada do vértice da pirâmide.

Determine os pontos E, de entrada, e S, de saída, da recta f na pirâmide dada.

5.* Construa as projecções dos pontos de intersecção de uma recta oblíqua r com um prisma pentagonal oblíquo, considerando que:

- As bases do prisma são de nível, os centros das circunferências circunscritas às bases são os pontos O (2; 6; 6) e O_1 (6; 4; 0,5), e o raio mede 3,5 cm.
- A aresta de menor abcissa da base, de maior cota, é de topo.
- A recta *r* contém o ponto R (- 2; 0; 0) e, as suas projecções horizontal e frontal fazem com o eixo x ângulos de 45° e 30° respectivamente, de abertura para a direita.



6.* Desenhe as projecções duma recta **a** e dum prisma triangular oblíquo, sabendo que:

- As bases do prisma são triângulos equiláteros, situados em planos de perfil, que distam entre si 6 cm.
- Os lados das bases medem 6 cm, e a face mais próxima do plano horizontal de projecção é de topo, e faz com o plano ν_0 um ângulo de 40º de abertura para a direita, e as arestas laterais são de frente.
- Um dos vértices mais próximo de ν_0 é o ponto **A** (0; 2; 1), que pertence à base situada à esquerda.
- A recta **a** é definida pelos pontos **D** (- 2; 2; 8) e **F** (6,5; 7; 4).

Determine os pontos de intersecção da recta **a** com prisma.

7. Construa as projecções duma pirâmide hexagonal regular, situada no primeiro diedro de projecção, e as projecções duma recta **r**, oblíqua, sabendo que:

- A base está contida num plano projectante frontal π, que faz com ν_0, um ângulo diedro de 60º de abertura para a esquerda.
- As arestas da base medem 3,5 cm, e uma delas tem afastamento nulo, e um dos extremos dessa aresta, tem 2 cm de cota.
- A base da pirâmide é invisível, em projecção horizontal, e a altura da pirâmide mede 6 cm.
- A recta **r** contém o ponto **A** (4; 4) cuja linha de chamada coincide com o traço horizontal do plano da base. O outro ponto que define a recta **r**, é o ponto **B**, situado 8 cm à esquerda da linha de chamada do ponto **A**, tem cota igual a 1 cm e pertence ao β_{13}.

Determine os pontos de intersecção da recta **r** com a piramide.

8. Construa as projecções dos pontos de intersecção de uma recta **t**, de topo, com um prisma rectangular recto, situado no 1.º diedro, considerando que:

- O prisma está assente, pela base rectangular [**ABCD**], num plano de nível de cota igual a 1,5 cm.
- A aresta [**AB**] mede 6 cm, faz com o plano frontal de projecção um ângulo de 40º de abertura para a direita, e o extremo **A** tem afastamento nulo.
- A aresta [**AC**] mede 4 cm.
- A base de maior cota do prisma dista 6,5 cm de ν_0.
- A recta de topo tem 4 cm de cota, e a sua linha de chamada situa-se 2 cm à direita da aresta lateral, de afastamento nulo.

9. Dado um prisma hexagonal oblíquo, com bases de nível, e uma recta **f**, de frente, determine os pontos da sua intersecção, tendo em conta que:

- A circunferência, circunscrita à base, situada à direita é tangente ao plano frontal de projecção, e o seu raio mede 3 cm, e a sua cota é de 1 cm.
- Duas das faces do prisma são de topo, e fazem com o plano horizontal de projecção ângulos de 30º de abertura para a esquerda.
- As arestas laterais fazem 60º com φ_0, de abertura para a esquerda.
- Os planos das bases do prisma distam entre si 3 cm.
- A recta **f** tem afastamento igual a 5,5 cm, faz 60º de abertura para a direita com ν_0, e a linha de chamada do seu traço horizontal situa-se 1 cm à esquerda do plano de perfil, que contém o centro da base situada à esquerda.

10. Dado um hexaedro com 6 cm de aresta, situado no 1.º diedro, e uma recta v, vertical, determine os pontos da sua intersecção, sabendo que:
    - Duas das faces do hexaedro são de frente, e a mais próxima do plano frontal de projecção dista dele 1,5 cm.
    - As restantes faces do sólido são de topo, e duas delas fazem com o plano horizontal de projecção ângulos de 30º de abertura para a direita e a aresta de topo de menor cota, dista 1 cm de φ_0.
    - As arestas do sólido medem 5 cm.
    - A recta vertical tem 3,5 cm de afastamento, e a sua linha de chamada situa-se 2 cm, à esquerda, da linha de chamada da aresta de topo mais à direita.

11.* Construa as projecções dos pontos de intersecção duma recta de nível com um prisma triangular oblíquo, situado no 1.º diedro, de bases de frente, sabendo que:
    - **A** (0; 0; 5) e **B** (-4; 0; 7) são dois vértices do triângulo [**ABC**], a base de menor afastamento do prisma, rectângulo em **A**.
    - O lado [**BC**] mede 8 cm.
    - A altura do prisma é de 6 cm, e as suas arestas laterais são horizontais ou de nível, que fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 60º de abertura para a direita.
    - A recta de nível dista 4 cm de ν_0, faz 30º com φ_0, de abertura para a esquerda, e o seu traço frontal tem abcissa igual a 5 cm

12. Construa as projecções dum cone de revolução, situado no primeiro diedro de projecção, e duma recta **r**, oblíqua, sabendo que:
    - A base situa-se num plano de frente, de 1 cm de afastamento.
    - O centro da base é o ponto **O** (0; 1; 6), e o raio mede 4,5 cm.
    - A altura do cone é 7 cm.
    - O traço horizontal da recta **r**, tem -7 cm de abcissa e 1 cm de afastamento.
    - A projecção horizontal e a projecção frontal da recta **r** fazem com o eixo **x**, ângulos de 30º, de abertura para a direita.

    Determine os pontos de intersecção da recta **r** com o cone.

13.* Desenhe as projecções de um cone oblíquo, situado no 1.º diedro de projecção, e duma recta **f**, de frente, sabendo que:
    - A base do cone é um círculo assente no plano horizontal de projecção, cujo centro é ponto O (0; 4; 0).
    - Um dos pontos da base é tangente ao plano frontal de projecção.
    - O vértice do cone é o ponto **V** (4; 8; 7).
    - A recta **f** tem 5,5 cm de afastamento, faz um ângulo de 30º com ν_0, de abertura para a esquerda, e o seu traço horizontal tem 5 cm de abcissa.

    Determine os pontos de intersecção da recta **f** com o cone.

14.* Determine as projecções dos pontos de intersecção duma recta **s**, oblíqua, com um cone de revolução de base assente num plano projectante horizontal, respeitando o seguinte posicionamento:
    - O plano projectante horizontal faz um ângulo diedro de 40º com φ_0, de abertura para a direita.
    - O centro da base tem 2,5 cm de afastamento, e a circunferência que determina os limites da base tem um ponto em ν_0 e outro em φ_0.
    - A altura do cone é de 7,5 cm.
    - A recta **s** contém o ponto médio do eixo do cone e a sua projecção horizontal faz 40º com o eixo **x** de abertura para a esquerda, e a projecção frontal faz 30º com o eixo **x**, de abertura para a direita.



15. Desenhe as projecções dum cilindro de revolução, situado no 1.º diedro de projecção, e duma recta r, oblíqua, tendo em conta os seguintes dados:

- As bases do cilindro situam-se em planos projectantes horizontais que fazem com φ_0 ângulos diedros de 60º de abertura para a direita.
- O centro de uma das bases é o ponto **O** (0; 3,5; 4), e o raio mede 3,5 cm.
- A altura do cilindro é igual a 4,5 cm.
- A recta **r** é definida pelos pontos **A** (6; 2; 1) e **B** (-3; 5,5; 5).

Determine os pontos de intersecção da recta **r** com o cilindro.

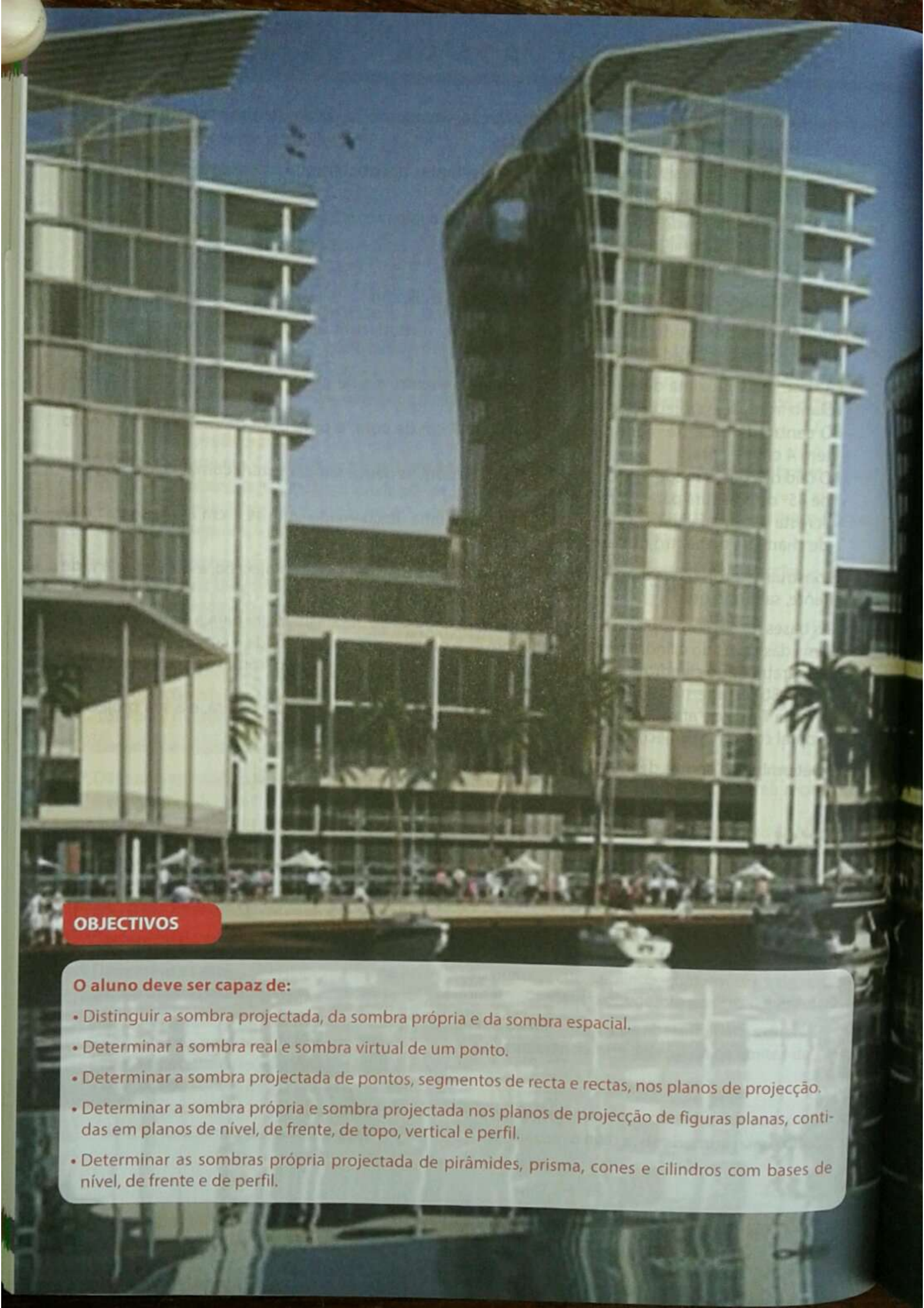
16.* Determine os pontos de intersecção duma recta **v**, vertical, com um cilindro oblíquo de bases de frente, tendo em consideração que:

- A base mais próxima de φ_0 tem 0,5 cm de afastamento, e a de maior afastamento dista 7 cm do plano frontal de projecção.
- O centro da base de menor afastamento tem 7 cm de cota, e o da base de maior afastamento tem 4 cm de cota.
- O raio das bases mede 3 cm, e as projecções horizontais das geratrizes fazem com o eixo **x** ângulos de 45º de abertura para a direita.
- A recta **v**, tem afastamento igual a 3 cm, e a sua linha de chamada situa-se 1 cm à direita da linha de chamada do centro da base de menor afastamento.

17. Construa as projecções dum cilindro oblíquo, situado no 1.º diedro de projecção, e duma recta **f**, de frente, sabendo que:

- As bases fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 30º de abertura para a esquerda.
- Uma das bases do cilindro tem um ponto em φ_0 e outro em ν_0, e o raio mede 3 cm.
- As geratrizes do cilindro são de nível, medem 5 cm, e fazem com o plano frontal de projecção ângulos de 30º de abertura para a direita.
- A recta **f** tem de afastamento 1,5 cm, e faz 30º com ν_0, de abertura para a direita, e a sua projecção frontal contém a projecção frontal do ponto médio do eixo.

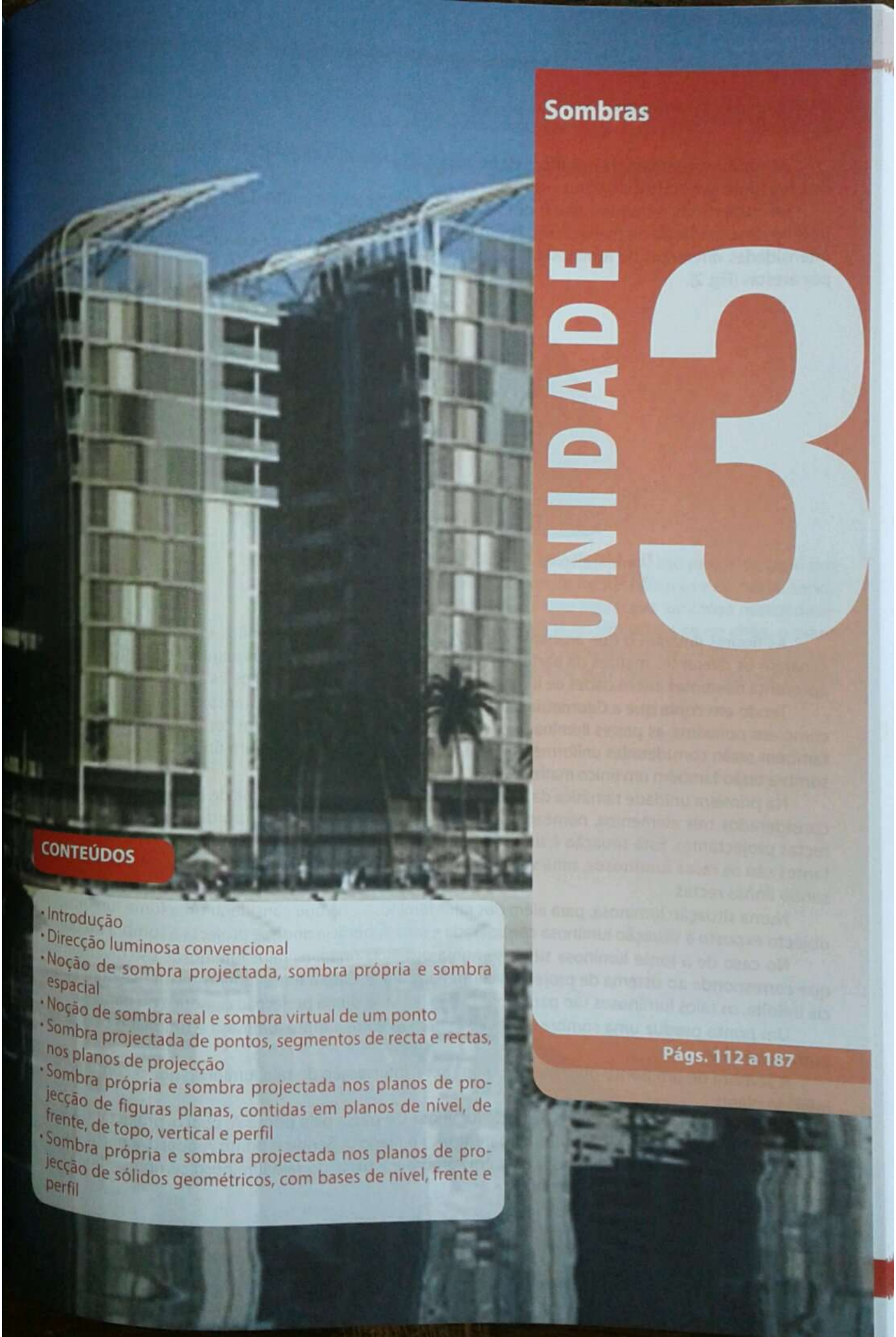
Determine os pontos de intersecção da recta **f** com o cilindro.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Distinguir a sombra projectada, da sombra própria e da sombra espacial.
- Determinar a sombra real e sombra virtual de um ponto.
- Determinar a sombra projectada de pontos, segmentos de recta e rectas, nos planos de projecção.
- Determinar a sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de figuras planas, contidas em planos de nível, de frente, de topo, vertical e perfil.
- Determinar as sombras própria projectada de pirâmides, prisma, cones e cilindros com bases de nível, de frente e de perfil.



Sombras

UNIDADE 3

CONTEÚDOS

- Introdução
- Direcção luminosa convencional
- Noção de sombra projectada, sombra própria e sombra espacial
- Noção de sombra real e sombra virtual de um ponto
- Sombra projectada de pontos, segmentos de recta e rectas, nos planos de projecção
- Sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de figuras planas, contidas em planos de nível, de frente, de topo, vertical e perfil
- Sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de sólidos geométricos, com bases de nível, frente e perfil

Págs. 112 a 187

Introdução

As sombras resultam da incidênca da luz sobre um determinado objecto. Essa luz pode ser orginária de uma fonte luminosa natural ou artificial.

Em superfícies redondas, não é notória a linha de separação entre a parte iluminada e a obscura, pois há uma gradação de matizes (Fig. 1). Em poliedros, as diferentes faces iluminadas podem apresentar intensidades diferentes de luminosidade e de obscuridade, pelo que haverá diversas matizes separadas por arestas (Fig. 2).

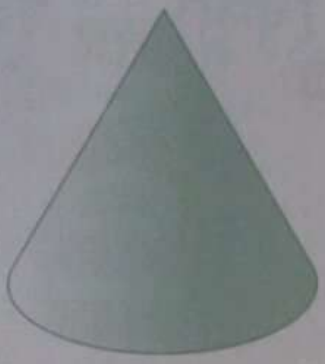


Fig. 1 Sombra em superfície redonda

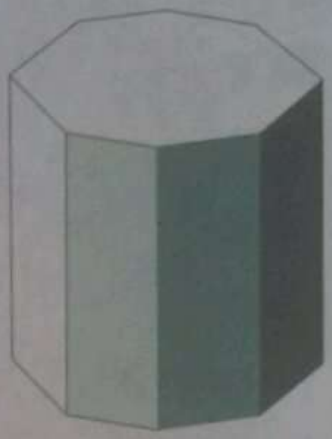


Fig. 2 Sombra em poliedro

As figuras ilustram o que acabámos de dizer; na superfície cónica verifica-se que não há linhas que separam os diferentes matizes da parte iluminada e da parte em sombra, enquanto a superfície do prisma apresenta diferentes intensidades de luminosidade e obscuridade separadas pelas arestas.

Tendo em conta que a Geometria Descritva trata de desenho rigoroso, tanto em superfícies redondas como em poliedros, as partes iluminadas serão consideradas uniformes, bem como as partes sombreadas também serão consideradas uniformes, ou seja, as partes iluminadas terão um único matiz e as partes em sombra terão também um único matiz.

Na primeira unidade temática da 11.ª Classe, fez-se referência ao sistema de projecção em que foram considerados três elementos, nomeadamente o plano de projecção, o centro de projecção e o feixe de rectas projectantes. Esta situação é similar ao que acontece no estudo de sombras, pois as rectas projectantes são os **raios luminosos**, uma vez que teoricamente esses raios luminosos são considerados como sendo linhas rectas.

Numa situação luminosa, para além dos raios luminosos, há que considerar uma fonte luminosa, um objecto exposto à situação luminosa considerada e uma superfície onde se projecta a sombra do objecto.

No caso de a fonte luminosa situar-se numa distância finita, os raios luminosos são divergentes, o que corresponde ao sistema de projecção central ou cónica. Caso a fonte luminosa situe-se numa distância infinita, os raios luminosos são paralelos, ou seja, trata-se duma projecção cilíndrica ou paralela.

Um ponto produz uma sombra se ele encontrar-se entre a fonte luminosa e um plano ou qualquer outra superfície.

A sombra de um ponto num plano é o ponto de intersecção do raio luminoso que o contém, com o referido plano.

O raio luminoso l tem origem na fonte luminosa **L** e passa pelo ponto **A**, opaco, projectando-o para o plano α, dando origem a A_S, sombra do ponto **A** no plano α. Sendo o ponto **A** opaco, a partir dele, em direcção ao plano α, o raio luminoso está em sombra e a parte do raio luminoso compreendida entre o ponto **A** e a fonte luminosa está em luz.

Portanto, a semi-recta com origem em **A**, passando por A_S, é considerada um **raio de sombra**, e a outra parte do raio luminoso, a que está compreendida entre a fonte luminosa, **L**, e o ponto **A** é considerada como sendo **raio de luz**.

A fonte luminosa **L** situa-se a uma distância finita, pelo que essa fonte designa-se **foco luminoso**, em que os raios luminosos são concorrentes no foco (Fig. 3).

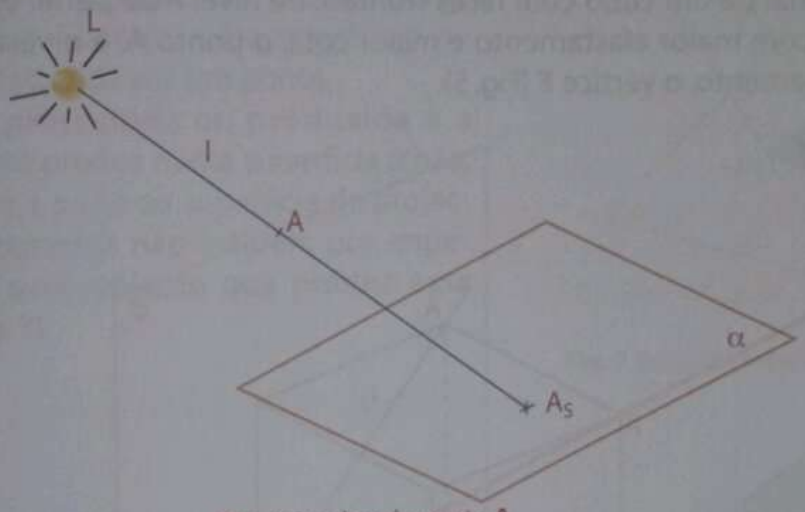


Fig. 3 Sombra do ponto **A**

Quando a fonte luminosa situa-se a uma distância infinita, os raios luminosos são paralelos, pelo que se considera **direcção iluminosa**. As direcções luminosas podem ser de frente, oblíquas e de perfil, sendo esta última posição muito rara. A posição horizontal ou de nível é a que a direcção luminosa nunca deverá tomar, tendo em conta que no meio envolvente a maioria das sombras projectam-se no chão, o plano horizontal de projecção. Com a direcção luminosa de nível, os raios luminosos seriam paralelos ao chão e as sombras existiriam apenas em planos frontais o que não corresponde às situações reais em que a fonte luminosa situa-se num ponto infinito (Fig. 4).

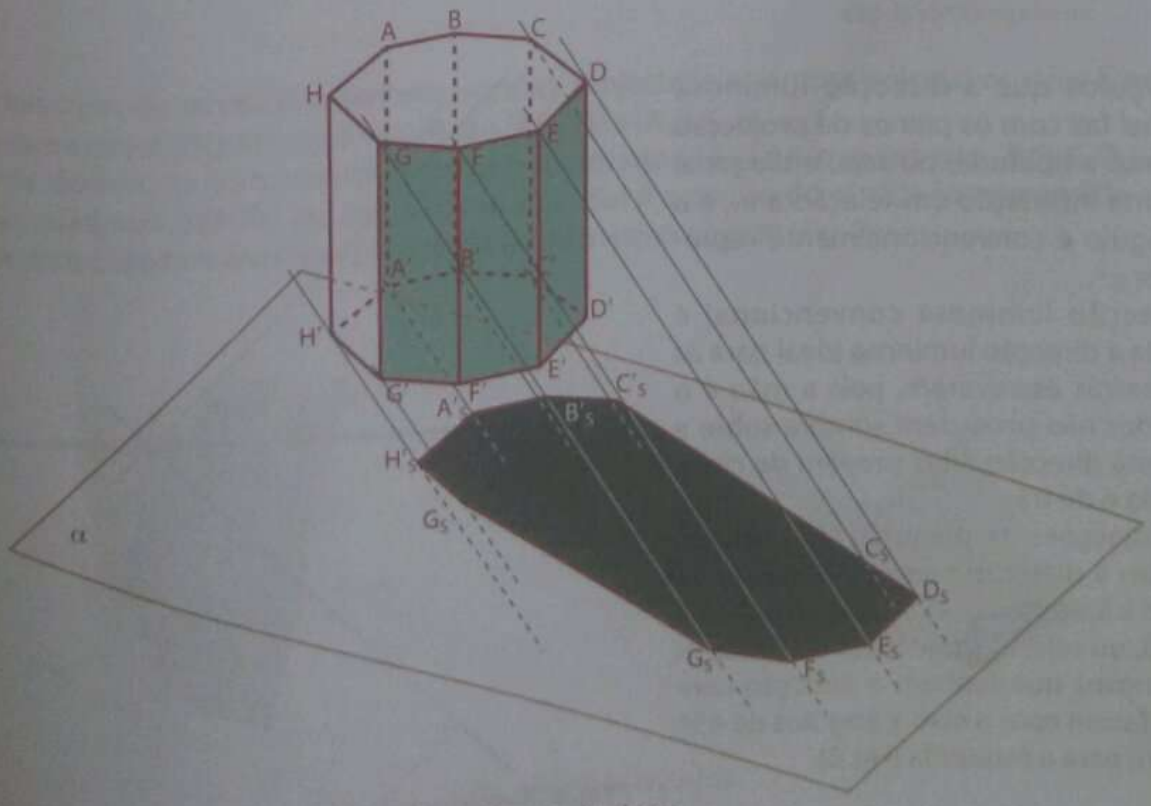


Fig. 4 Direcção luminosa

Direcção luminosa convencional

No nosso estudo iremos considerar apenas a direcção luminosa e não aprofundaremos a fonte luminosa situada a uma distância finita (foco luminoso).

A direcção luminosa que é geralmente usada é oblíqua, a chamada **direcção luminosa convencional**, e paralela à diagonal de um cubo com faces frontais, de nível e de perfil. Essa diagonal contém o vértice mais à esquerda, com maior afastamento e maior cota, o ponto **A**, e o vértice mais à direita com menor cota e menor afastamento, o vértice **E** (Fig. 5).

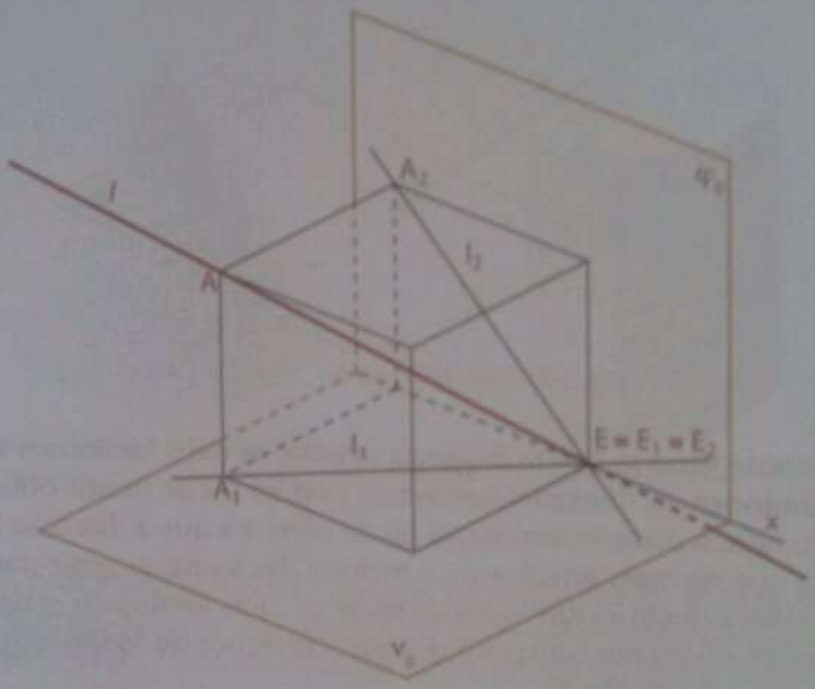


Fig. 5 Direcção luminosa convencional no espaço

Os ângulos que a direcção luminosa convencional faz com os planos de projecção têm a mesma amplitude, ou seja, a diagonal tem a mesma inclinação em relação a φ_0 e a ν_0. Esse ângulo é convencionalmente representado por φ^o.

A direcção luminosa convencional é considerada a direcção luminosa ideal para as pessoas dextras escreverem, pois a mão e o meio riscador não produzem sombra sobre a escrita. Nesta direcção a luz provém de cima, da esquerda e de trás.

As projecções da diagonal [**AE**] (diagonal que tem a direcção convencional) fazem com o eixo **x** ângulos de 45º, de abertura para a esquerda, ou seja, as projecções de todos os raios luminosos que tenham a direcção convencional fazem com o eixo **x** ângulos de 45º, de abertura para a esquerda (Fig. 6).

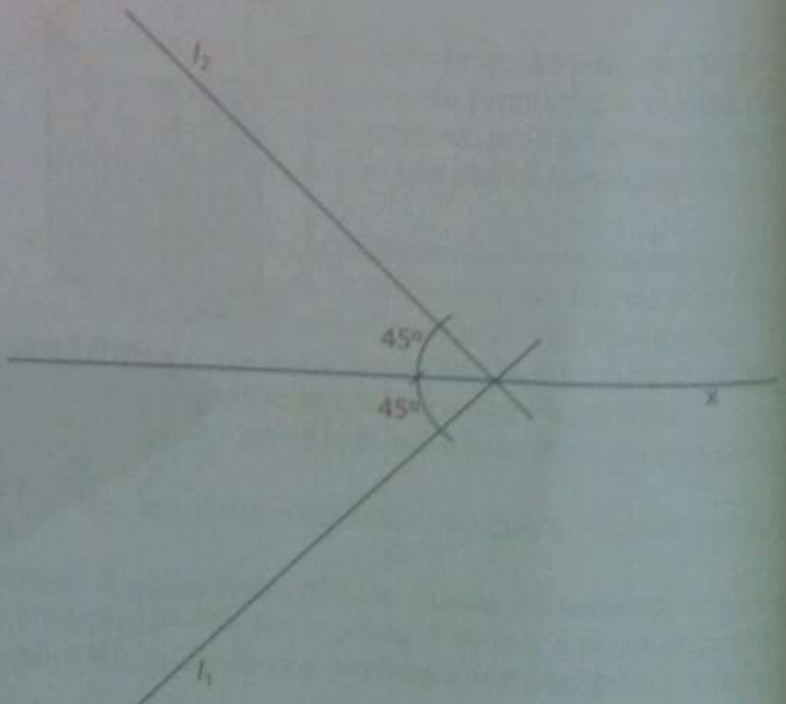


Fig. 6 Direcção luminosa convencional no plano do desenho

Noção de sombra projectada, sombra própria e sombra espacial

No estudo de sombras todos os objectos serão considerados opacos, tal como se fez referência no exemplo da sombra produzida por um ponto.

Assim, **sombra projectada** ou **produzida** é a sombra que um objecto produz numa superfície (chão, parede, etc.), ou seja, é a parte da superfície de projecção onde os raios luminosos não incidem por impedimento provocado pelo objecto que produz essa sombra [$A_sB_sC_sD_s$] (Fig. 7).

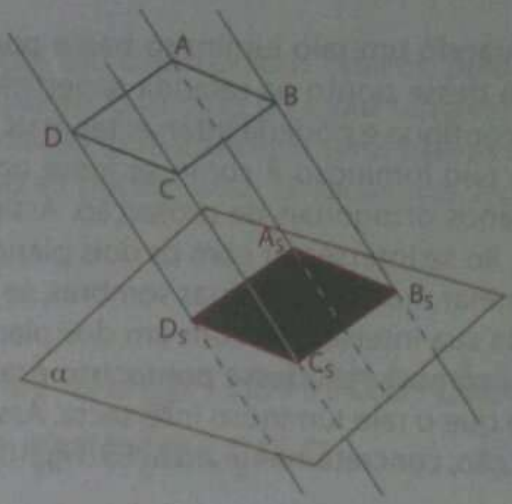


Fig. 7 Sombra projectada ou produzida.

A **sombra própria** é a parte do objecto que não recebe a luz, ou seja, aquela parte dum objecto que fica em sombra, que não é atingida pelos raios luminosos. A sombra própria é parte integrante do próprio objecto [**ABCD**] (Fig. 8).

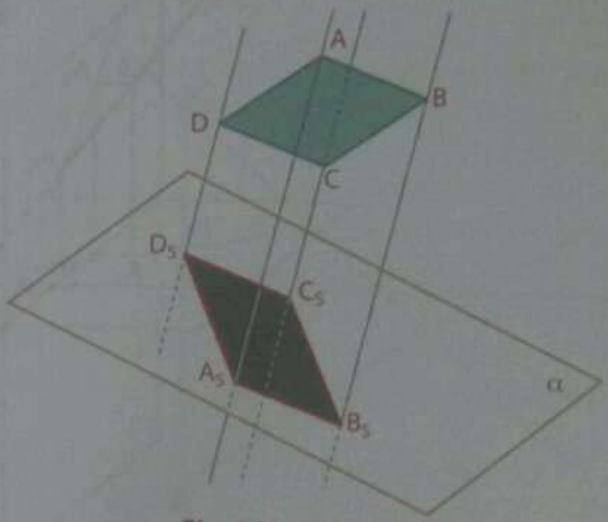


Fig. 8 Sombra própria

Nos dois tipos de sombras anteriores (sombra projectada e sombra própria) os raios luminosos definem um prisma quadrangular, cujas bases são [**ABCD**] e [$A_sB_sC_sD_s$].

A parte do prisma compreendida entre o quadrado [**ABCD**] e o quadrado [$A_sB_sC_sD_s$] é a sombra espacial do quadrado [**ABCD**], ou seja, **sombra espacial** é a porção do espaço compreendida entre a sombra própria dum objecto e a sombra projectada desse mesmo objecto (Fig. 9).

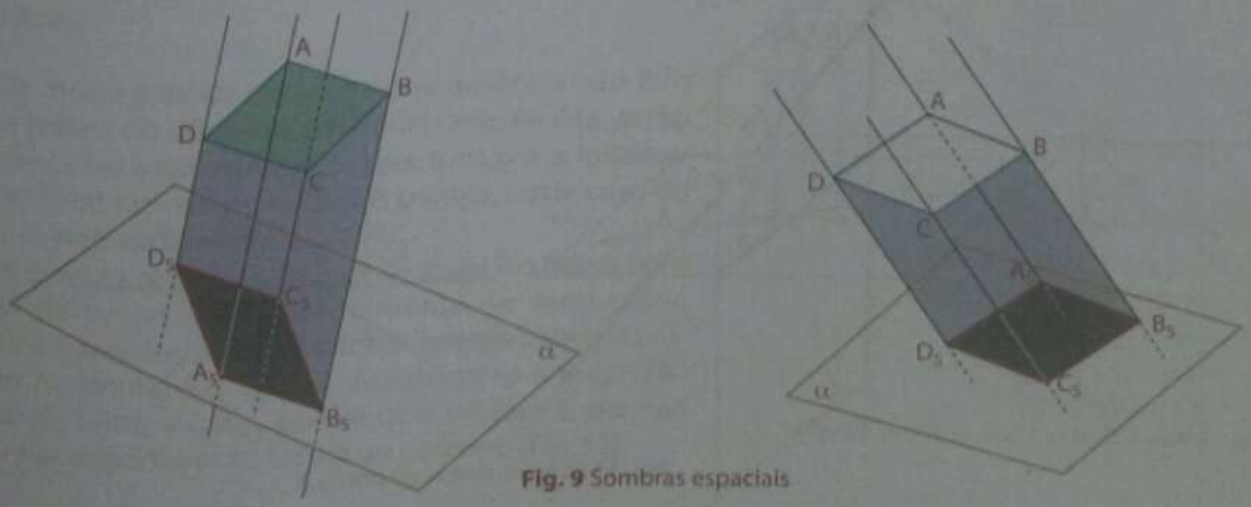


Fig. 9 Sombras espaciais

Noção de sombra real e sombra virtual de um ponto

Quando um raio luminoso passa por um ponto e intersecta uma superfície, o mesmo origina uma sombra desse ponto na referida superfície. O mesmo raio luminoso depois da sua intersecção com esse plano continua e poderia intersectar mais planos, se existirem.

O raio luminoso é como se fosse uma recta projectante que determina as projecções dum ponto nos planos ortogonais de projecção. Assim sendo, o raio luminoso pode determinar duas sombras dum ponto, ao se intersectar com os dois planos ortogonais de projecção. Mas, também o raio luminoso pode determinar mais do que duas sombras, se intersectar mais do que dois planos.

Na sua intersecção com um dos planos de projecção, um raio luminoso contendo um ponto determina a sombra real desse ponto, isto é, a **sombra real** encontra-se no primeiro dos dois planos de projecção que o raio luminoso intersecta. Assim, A_s é a sombra real do ponto **A** e situa-se no plano frontal de projecção, concretamente no SPFS (Fig. 10).

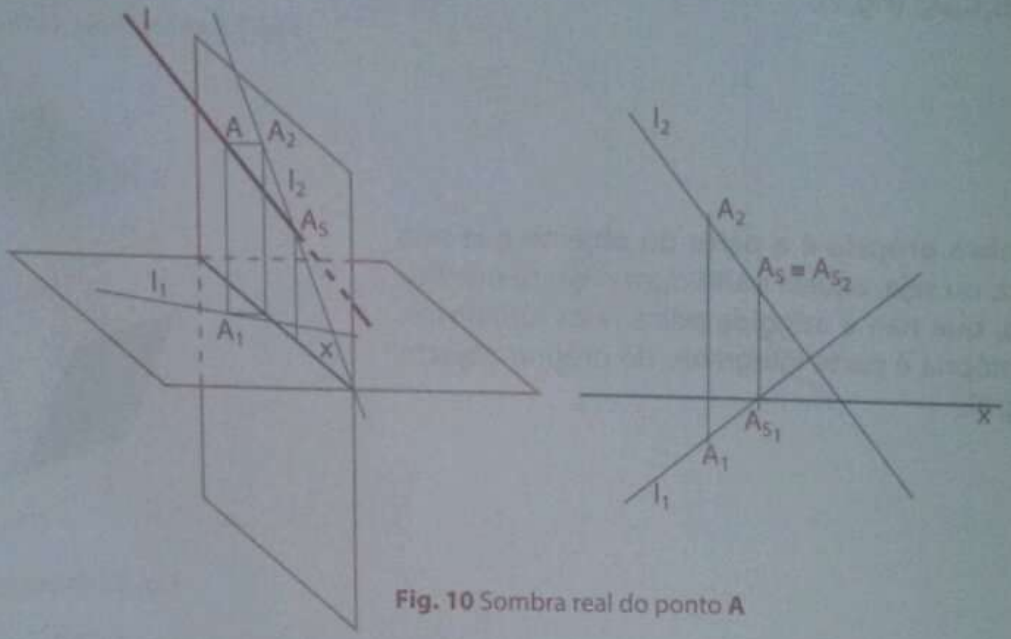


Fig. 10 Sombra real do ponto **A**

Na sua continuidade, o raio luminoso intersecta um segundo plano, neste caso o plano horizontal de projecção, determinando a sombra virtual do ponto **A**, A_v (Fig. 11).

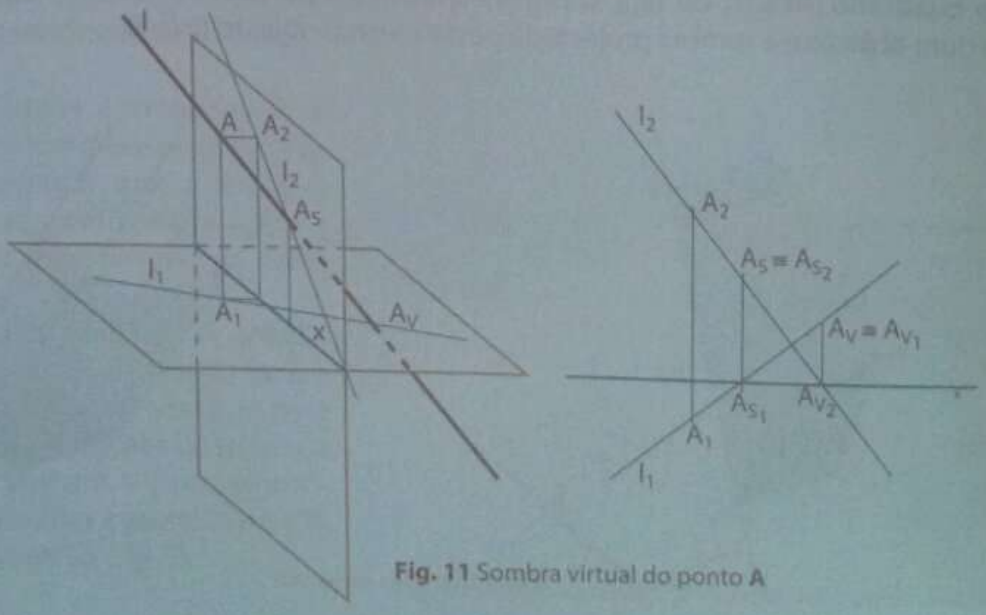


Fig. 11 Sombra virtual do ponto **A**

Note que tanto a sombra real como a sombra virtual podem situar-se no plano frontal de projecção, bem como no plano horizontal de projecção, de acordo com a localização do ponto que produz essa sombra e a direcção luminosa.

No estudo de sombras os objectos e os planos de projecção são considerados opacos, pelo que a fonte luminosa situa-se no primeiro diedro de projecção, num ponto localizado no lugar tangível ou no infinto. Sendo assim, as sombras reais só existem nas faces do diedro formado pelos semi-planos frontal superior (SPFS) e horizontal anterior (SPHA). As sombras virtuais só podem estar situadas nos semi-planos horizontal posterior (SPHP) e frontal inferior (SPFI).

Sombra projectada de pontos, segmentos de rectas e rectas nos planos de projecção

Sombra projectada de pontos

Determinemos as sombras real e virtual de um ponto dado, usando uma direcção luminosa qualquer (Fig. 12).

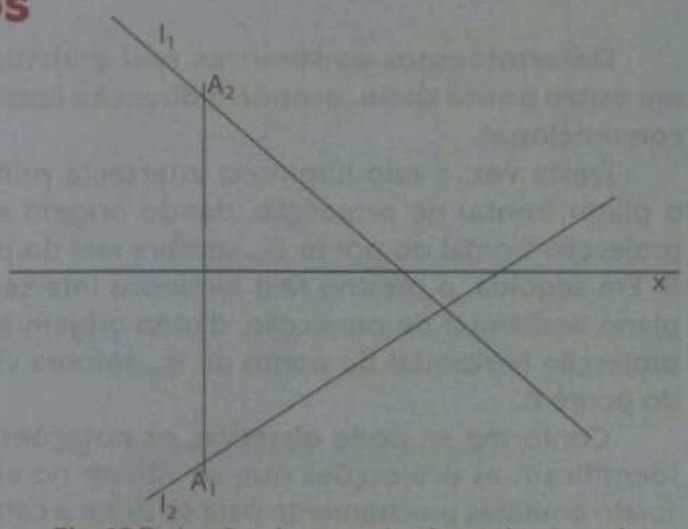


Fig. 12 Projecções do ponto **A** e do raio luminoso **l**

O primeiro plano que o raio luminoso **l** intersecta é o plano horizontal de projecção, pelo que é nesse ponto onde se situa a **sombra real** do ponto **A**, A_S.

Na sua continuidade, o raio **l** intersecta o plano frontal de projecção, dando origem à sombra virtual do ponto **A**, A_V.

De modo a evitar notações cuja ausência não dificulta a leitura do desenho, pelo contrário, facilita, serão representadas apenas aquelas que indicam a localização das sombras real e virtual dos pontos, neste caso do ponto **A**, nomeadamente A_{S_1} e A_{V_2}.

A sombra real de **A**, A_S, por se situar no plano horizontal de projecção, concretamente no semi-plano horizontal anterior, será identificada apenas pela sua projecção horizontal A_{S_1}. Assim, dispensou-se a projecção frontal do ponto A_S, A_{S_2}, que se situa no eixo **x**, por não se revelar importante na leitura do desenho (Fig. 13).

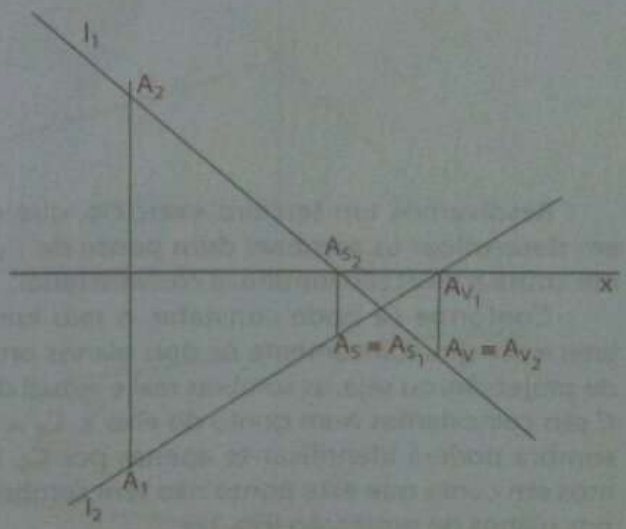


Fig. 13 Sombras real e virtual do ponto **A**

A sombra virtual de **A**, A_V, por estar localizada no plano frontal de projecção, será identificada apenas pela sua projecção frontal A_{V_2}. Devido à sua irrelevância, foi omitida a projecção horizontal de A_V, A_{V_1} (Fig. 14).

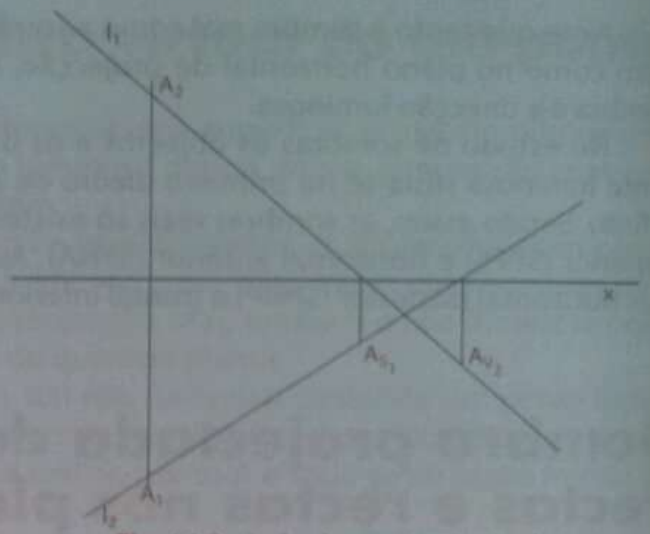


Fig. 14 Omissão das projecções irrelevantes

Determinemos as sombras real e virtual de um outro ponto dado, usando a direcção luminosa convencional.

Desta vez, o raio luminoso intersecta primeiro o plano frontal de projecção, dando origem a B_{S_2}, projecção frontal do ponto B_S, sombra real do ponto **B**. Em seguida, o mesmo raio luminoso intersecta o plano horizontal de projecção, dando origem à B_{V_1}, projecção horizontal do ponto de B_V, sombra virtual do ponto **B**.

Conforme se pode observar, as notações que identificam as projecções que se situam no eixo **x** foram omitidas precisamente para se evitar a complexidade da resolução gráfica (Fig. 15).

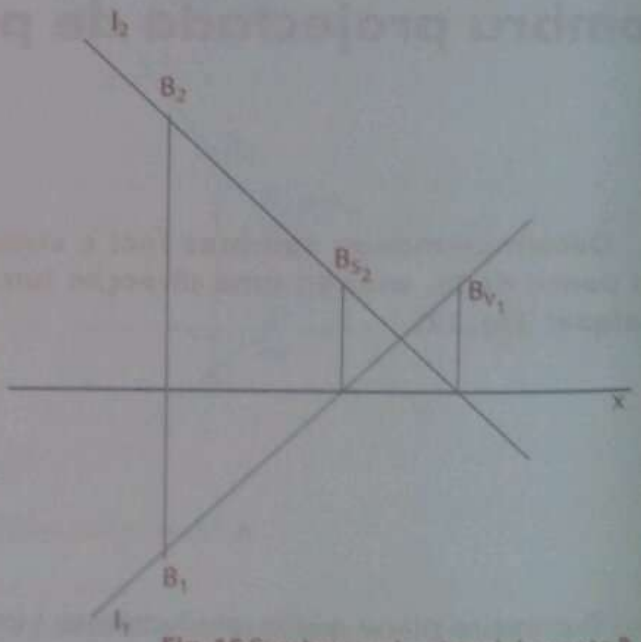


Fig. 15 Sombras real e virtual do ponto **B**

Resolvamos um terceiro exercício, que consiste em **determinar as sombras dum ponto do β_{13} tendo em conta a direcção luminosa convencional.**

Conforme se pode constatar, o raio luminoso l intersecta simultaneamente os dois planos ortogonais de projecção, ou seja, as sombras real e virtual do ponto **C** são coincidentes num ponto do eixo **x**, $C_S = C_V$. Esta sombra poderá identificar-se apenas por C_S, se tivermos em conta que este ponto não tem sombra virtual nos planos de projecção (Fig. 16).

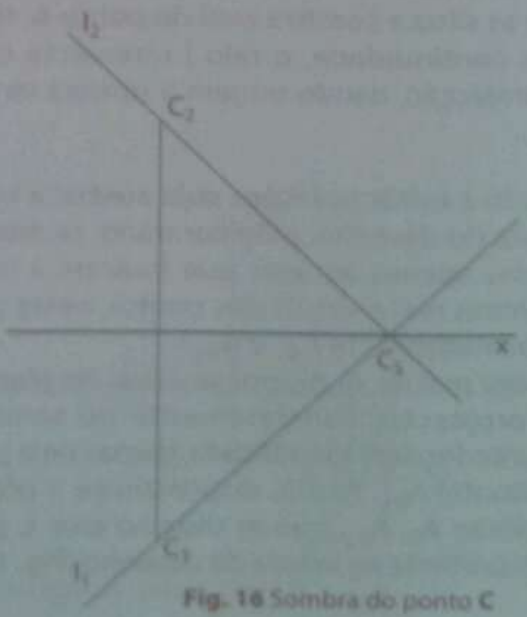


Fig. 16 Sombra do ponto **C**

Sombra projectada de segmentos de recta

Sombra de um segmento de recta no plano horizontal de projecção

Determinemos, no plano horizontal de projecção, a sombra projectada de um segmento de recta [AB] dado, tendo em conta uma direcção luminosa l também dada.

Como se sabe, um segmento de recta é constituído por um bom número de pontos, dos quais nem todos serão identificados. Normalmente, um segmento de recta é identificado por dois pontos que definem os seus extremos.

Assim, a determinação das sombras dos pontos **A** e **B**, que definem o segmento dado, é suficiente para se obter a sombra projectada do segmento [**AB**], no plano horizontal de projecção.

Por **A**, conduz-se um raio luminoso paralelo à direcção luminosa, cuja intersecção com o plano horizontal de projecção dá origem à sombra desse ponto, A_s. Por **B**, passa-se um outro raio luminoso, também paralelo à direcção luminosa dada, dando origem a B_s, sombra do ponto **B** na sua intersecção com o plano horizontal de projecção.

A união de A_s com B_s origina a sombra do segmento [**AB**] no plano horizontal de projecção, o segmento $[A_sB_s]$ (Fig. 17).

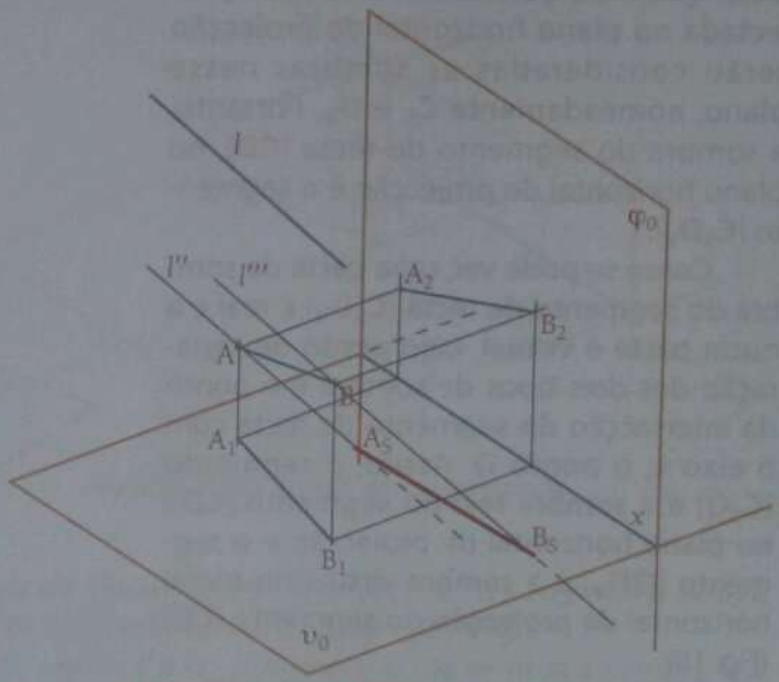


Fig. 17 Sombra de [**AB**] em υ_0, no espaço

Segue-se a representação no plano do desenho.

De acordo com a direcção luminosa, por A_2, conduz-se l'_2 que, ao intersectar o eixo **x**, determina A_{s_2}, que não será identificado por razões já mencionados anteriormente. Por A_1, conduz-se l'_1, que tenha a posição da direcção luminosa dada. Na intersecção de l'_1 com a linha de chamada que passa por A_{s_2}, obtém-se a sombra do ponto **A**, A_{s_1}. A sombra real do ponto **A** situa-se no plano horizontal de projecção.

No ponto **B**, repetem-se todos os passos que foram dados no ponto **A** e obtém-se a sombra real do ponto, identificado por B_{s_1}. A sombra do ponto **B** também se situa no plano horizontal de projecção.

A união de A_{s_1} com B_{s_1} dá origem ao segmento $[A_{s_1}B_{s_1}]$, sombra do segmento [**AB**] pretendida (Fig. 18).

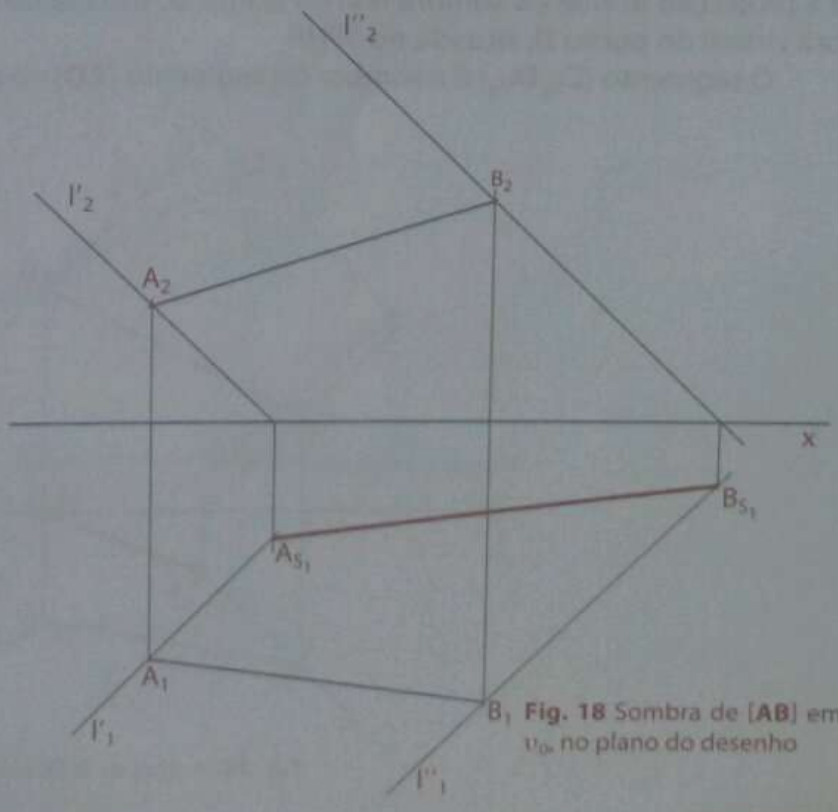


Fig. 18 Sombra de [**AB**] em υ_0, no plano do desenho

Determinemos a sombra projectada no plano horizontal de projecção de um outro segmento de recta [CD] dado, tendo em conta uma direcção luminosa l, também dada.

Pelo ponto **C** faz-se passar um raio luminoso **l'**, paralelo à direcção luminosa dada que, ao intersectar-se com o plano horizontal, determina C_S, sombra real do ponto **C**.

O mesmo pode-se fazer relativamente ao ponto **D**, cuja intersecção do raio luminoso **l''** com o plano horizontal de projecção origina D_V, sombra virtual do ponto **D**. Antes da intersecção do raio luminoso **l''** com o plano horizontal de projecção intersecta o plano frontal de projecção originado D_S, sombra real do ponto **D**.

Tendo em conta o pedido no exercício, que é de determinar a sombra projectada no plano horizontal de projecção serão consideradas as sombras nesse plano, nomeadamente C_S e D_V. Portanto, a sombra do segmento de recta [CD], no plano horizontal de projecção é o segmento $[C_S D_V]$.

Como se pode ver, uma parte da sombra do segmento de recta $[C_S D_V]$ é real e a outra parte é virtual, cujo ponto de separação dos dois tipos de sombra é o ponto da intersecção do segmento de recta com o eixo **x**, o ponto **Q**. Assim, o segmento $[C_S Q]$ é a sombra real do segmento [CD], no plano horizontal de projecção e o segmento $[QD_V]$ é a sombra virtual no plano horizontal de projecção do segmento [CD] (Fig. 19).

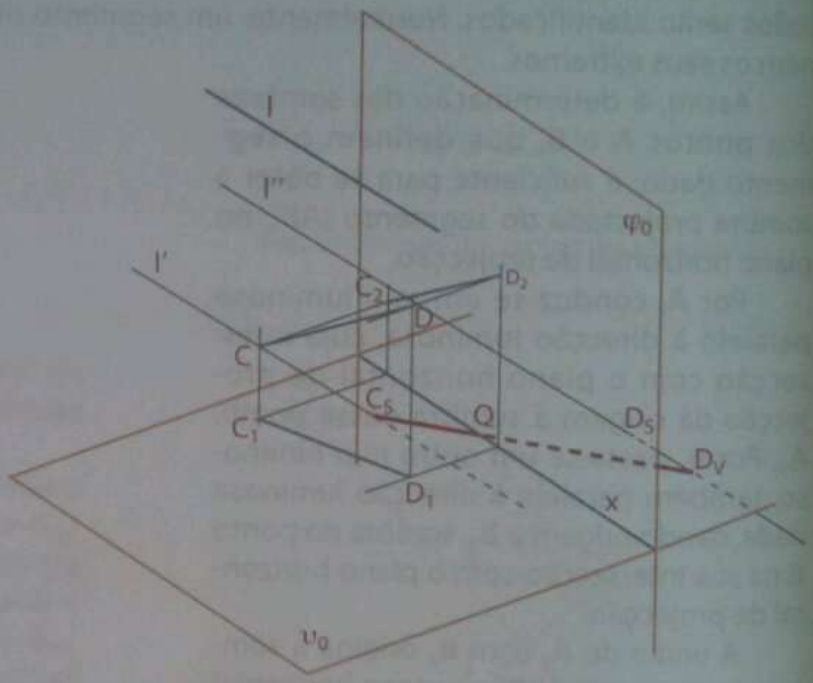


Fig. 19 Sombra de [CD] em υ_0, no espaço

No plano do desenho, C_{S_1} é a projecção horizontal da sombra real do ponto **C**, situada no SPHA, D_{S_2} é a projecção frontal da sombra real do ponto **D**, situada no SPFS, e D_{V_1} é a projecção horizontal da sombra virtual do ponto **D**, situado no SPHP.

O segmento $[C_{S_1} D_{V_1}]$ é a sombra do segmento [CD] no plano horizontal de projecção (Fig. 20).

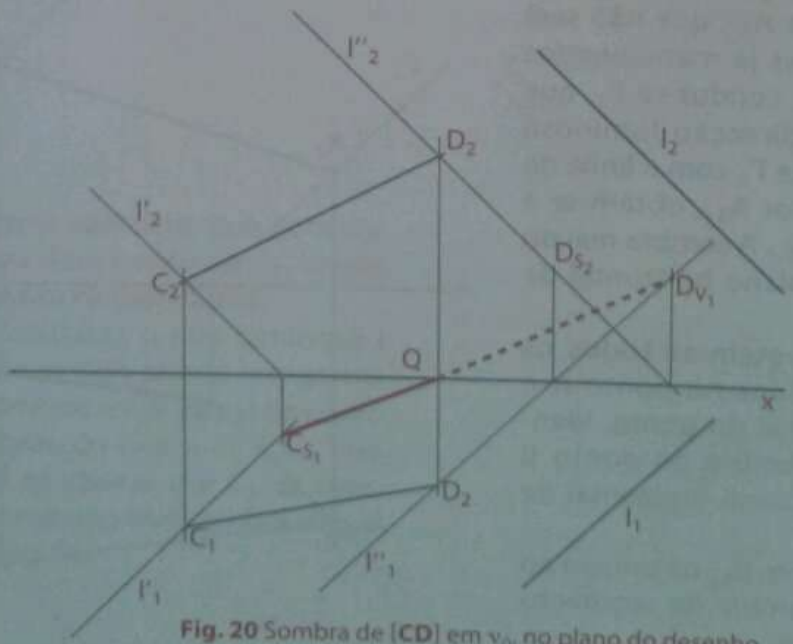


Fig. 20 Sombra de [CD] em υ_0, no plano do desenho

Sombra de um segmento de recta no plano frontal de projecção

Consideremos os dados do exercício anterior e **determinemos a sombra projectada do segmento [CD] no plano frontal de projecção.**

As sombras reais dos extremos do segmento já tinham sido determinados, nomeadamente C_s e D_s, pelo que neste exercício apenas nos resta determinar a sombra do ponto **C** no plano frontal de projecção, C_V que se encontra no prolongamento do raio luminoso **l'** até intersectar o plano frontal de projecção.

Portanto, a sombra do segmento [CD] no plano frontal de projecção é o segmento $[C_vD_s]$ em que uma parte se situa no semi-plano frontal superior, a sombra real do segmento [CD], e outra parte no semi-plano frontal inferior, a sombra virtual do segmento [CD]. O ponto **Q** mantém-se no mesmo sítio e determina a separação entre a sombra real e a sombra virtual.

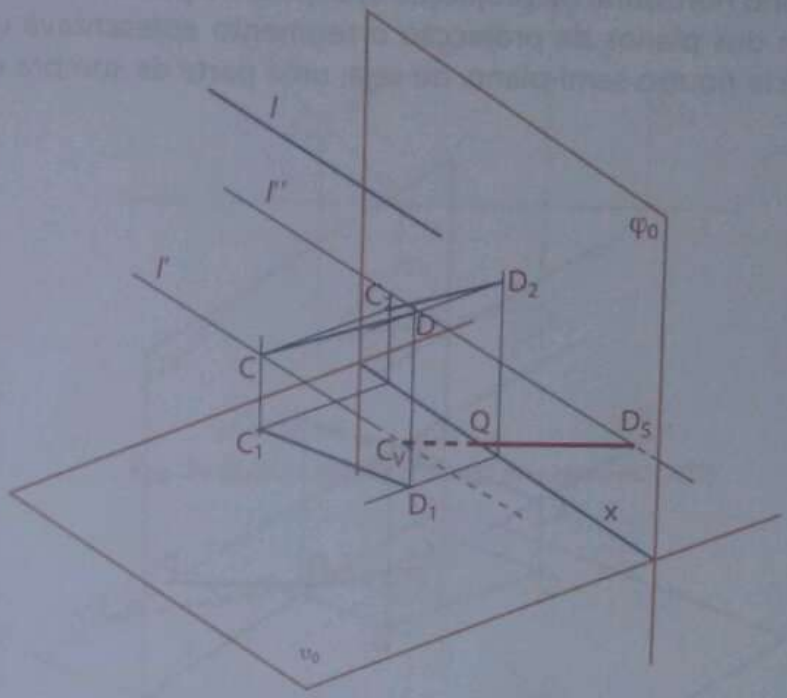


Fig. 21 Sombra de [CD] em φ_0, no espaço

O ponto **Q** é o ponto da sombra projectada do segmento [CD], situado no eixo **x**, conforme já tinha sido referido anteriormente.

Portanto, o segmento $[C_vQ]$ é a sombra virtual no plano frontal de projecção do segmento [CD] e situa-se no SPFI. $[C_vD_s]$ é a sombra do segmento [CD] no plano frontal de projecção (Fig. 21).

No plano do desenho, C_{v_2} é a sombra virtual do ponto **C** e D_{s_2} é o ponto onde se situa a sombra real do ponto **D**, pelo que o segmento $[C_{v_2}D_{s_2}]$ é a sombra do segmento [CD] no plano frontal de projecção (Fig. 22).

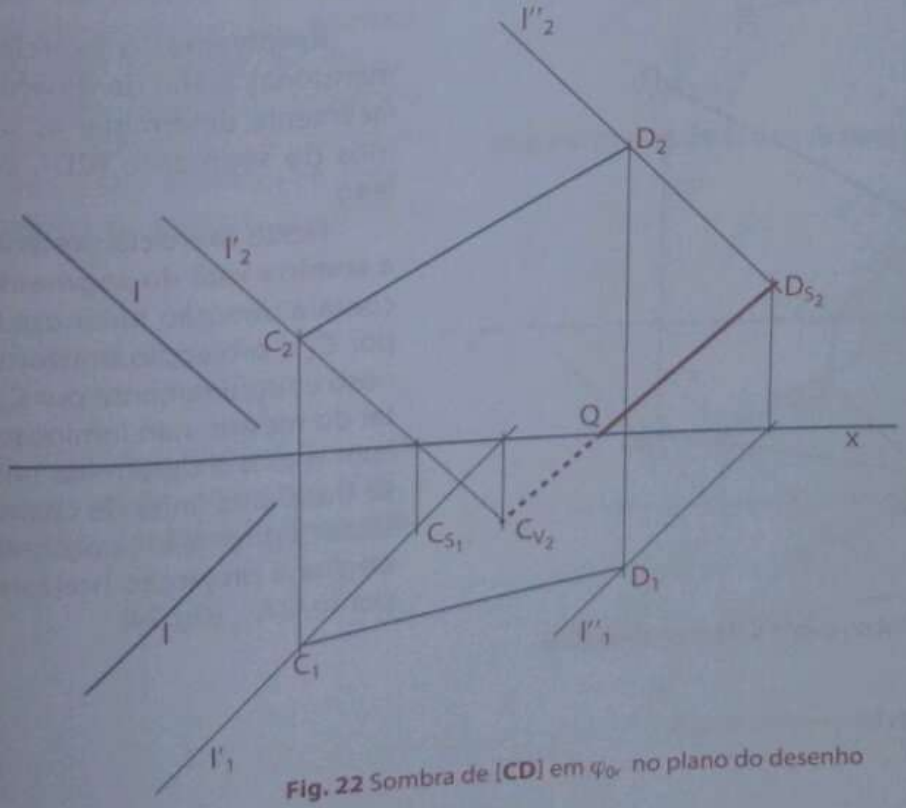


Fig. 22 Sombra de [CD] em φ_0, no plano do desenho

Sombra real de um segmento de recta/noção de ponto de quebra

Nos dois últimos exercícios foram determinadas as sombras do segmento de recta [**CD**]; primeiro, no plano horizontal de projecção e, depois, no plano frontal de projecção, em exercícios separados. Em cada um dos planos de projecção o segmento apresentava uma parte da sombra num semi-plano, e outra parte noutro semi-plano, ou seja, uma parte da sombra era real e outra era virtual. As duas sombras em cada plano eram separadas por um ponto do eixo **x**, o ponto **Q**.

Observe a figura 23, que corresponde à junção dos dois últimos exercícios, isto é, à determinação da sombra do segmento [**CD**], nos dois planos de projecção, num único desenho.

A sombra real do segmento [**CD**] no plano horizontal de projecção é o segmento [$\mathbf{C_sQ}$] e a sombra real do segmento [**CD**] sobre o plano frontal de projecção é o segmento [$\mathbf{QD_s}$]. Portanto, a sombra real do segmento [**CD**] nos dois planos de projecção corresponde à junção das sombras reais nos dois planos de projecção, o que resulta em [$\mathbf{C_sQD_s}$].

Portanto, o ponto **Q**, que foi possível determinar graças à sombra virtual de um dos extremos do segmento de recta [**CD**], chama-se **ponto de quebra** (Fig. 23).

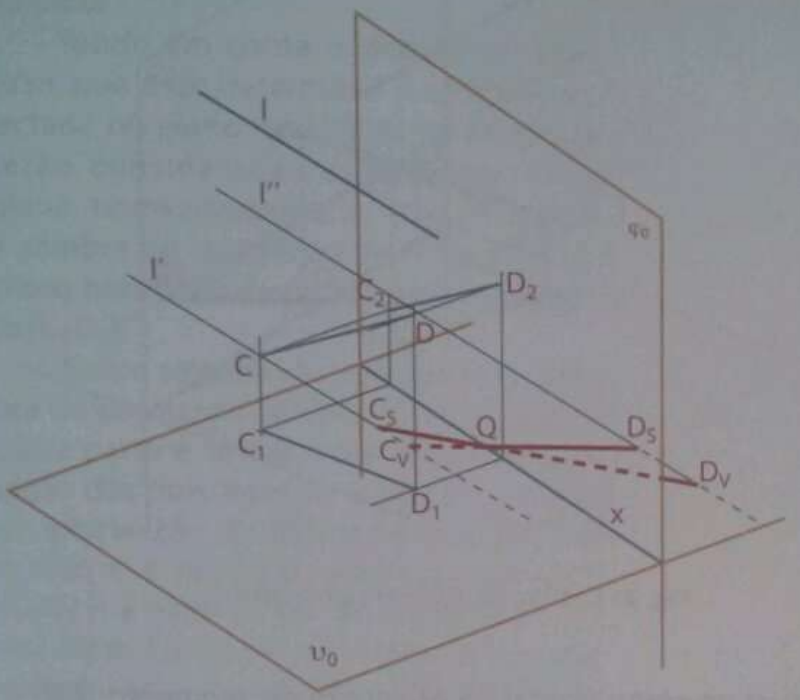


Fig. 23 Ponto de quebra

Resolvamos o exercício no plano bidimensional, plano do desenho, onde podemos facilmente determinar as sombras dos extremos do segmento [**CD**], como já tínhamos feito.

Neste exercício pretende-se **determinar a sombra real do segmento** [**CD**]. Tendo em conta a direcção luminosa **l** dada, conduz-se por $\mathbf{C_1}$ a projecção horizontal dum raio luminoso e seguidamente por $\mathbf{C_2}$ a projecção frontal do mesmo raio luminoso, cuja intersecção com o eixo **x** determina um ponto pelo qual se traça uma linha de chamada que ao intersectar a projecção horizontal do raio luminoso origina a projecção horizontal da sombra do ponto **C**, $\mathbf{C_{s_1}}$ (Fig. 24).

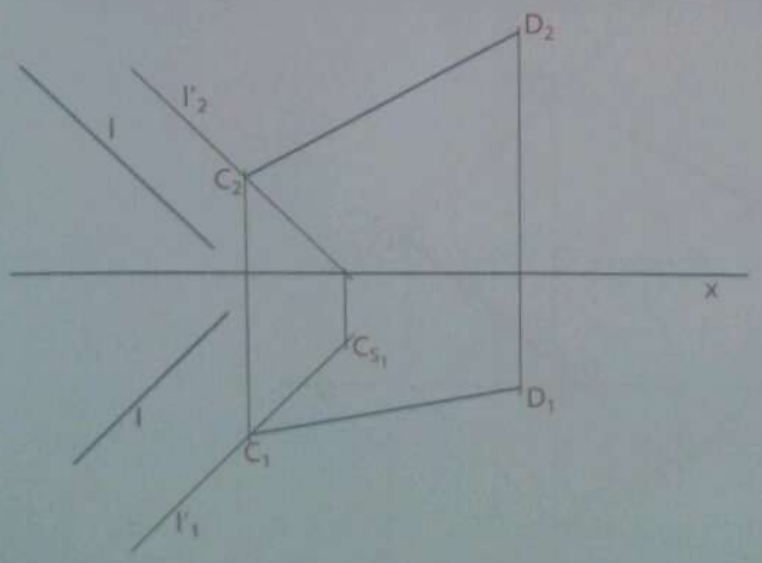


Fig. 24 Sombra real do ponto **C** do segmento [**CD**]

Por D_1 e D_2 conduzem-se as projecções dum outro raio luminoso **l''**, dando origem a D_{s_2} (Fig. 25).

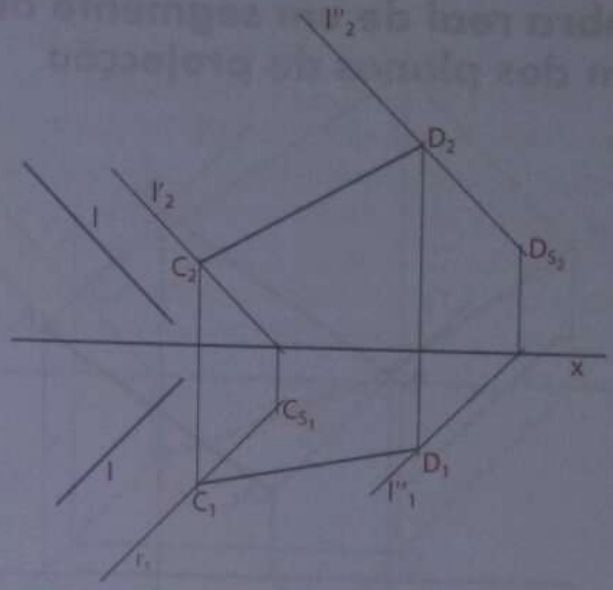


Fig. 25 Sombra real do ponto **D** do segmento [**CD**]

C_{s_1} situado no plano horizontal de projecção, e D_{s_2} situado no plano frontal de projecção são as sombras reais dos pontos **C** e **D**, extremos do segmento [**CD**].

Tendo em conta que as sombras reais desses dois extremos do segmento [**CD**] situam-se em planos diferentes, a sua união, para dar origem à sombra real do segmento [**CD**], não é directa, pelo que é necessário encontrar a sombra do ponto do segmento [**CD**] no eixo **x**, que é naturalmente comum aos dois planos de projecção, o ponto **Q**, de quebra.

O ponto de quebra será obtido através da determinação da sombra virtual de um dos extremos do segmento [**CD**]. Neste caso determinou-se a sombra virtual do ponto **C**, C_{v_2}, que se situa no plano frontal de projecção. Uma vez que a sombra real do ponto **D**, D_{s_2} também se situa no plano frontal de projecção, faz-se a sua união directa dando origem ao segmento $[C_{v_2}D_{s_2}]$, sombra do segmento [**CD**] no plano frontal de projecção, cuja intersecção com o eixo **x** origina o ponto de quebra, o ponto **Q** (Fig. 26).

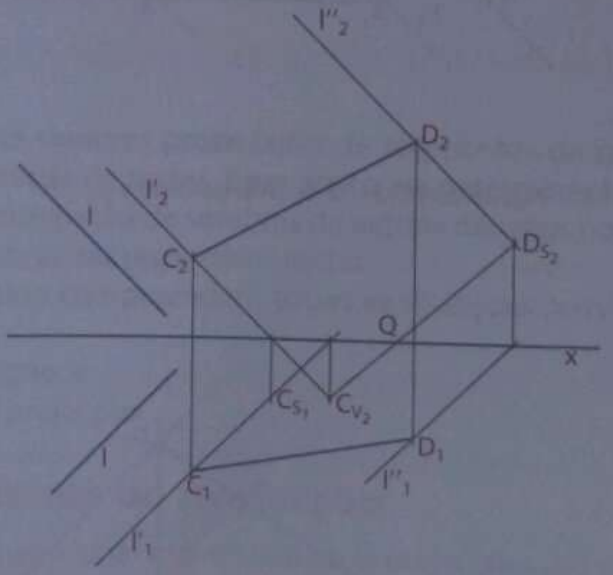


Fig. 26 Ponto **Q**, de quebra da sombra do segmento [**CD**]

A união de C_{s_1} com D_{s_1}, através do ponto Q_{s_2} origina a sombra real do segmento [**CD**], a linha quebrada $[C_{s_1}QD_{s_2}]$, a solução do problema (Fig. 27).

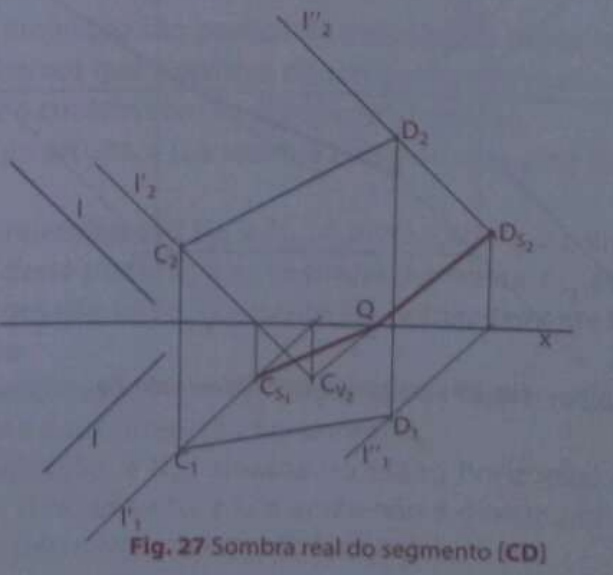


Fig. 27 Sombra real do segmento [**CD**]

Sombra real de um segmento de recta paralelo a um dos planos de projecção

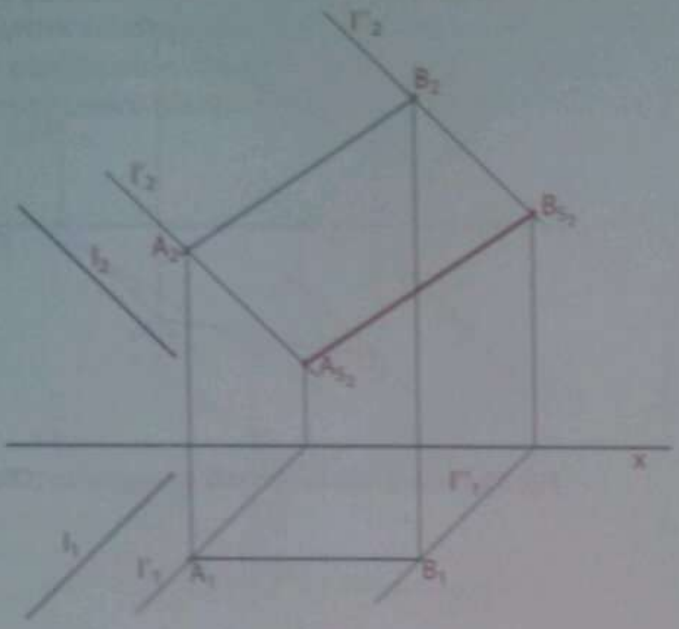


Fig. 28 Sombra real de [AB] paralelo a φ_2

Determinemos a sombra de um segmento de frente [AB], dada a direcção luminosa convencional.

Pelas projecções do ponto **A**, conduzem-se as projecções dum raio luminoso paralelo à direcção convencional e determina-se A_{s_2}, repetindo-se o mesmo procedimento para se obter B_{s_2}, sombra do ponto **B**.

A união de A_{s_2} com B_{s_2} origina o segmento $[A_{s_2}B_{s_2}]$, sombra real do segmento [AB].

Observe que o segmento $[A_{s_2}B_{s_2}]$ é paralelo à projecção frontal $[A_2B_2]$ do segmento [AB]. Assim, pode-se concluir que a sombra de qualquer segmento de recta num plano paralelo a esse segmento é outro segmento de recta paralelo ao primeiro (Fig. 28).

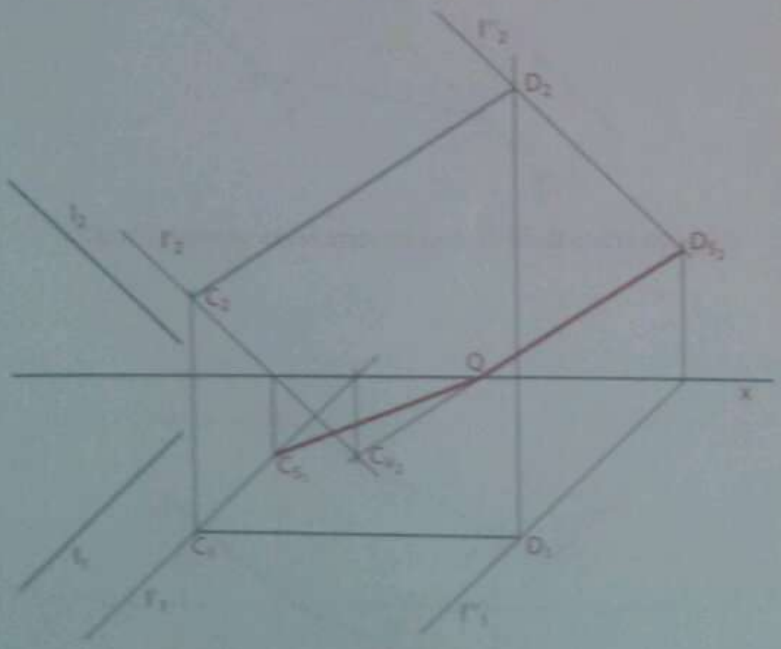


Fig. 29 Sombra real de [CD] paralelo a φ_2

Analisemos uma outra situação, em que a sombra real do segmento paralelo a um dos planos de projecção não se situa apenas num plano de projecção.

Dado o segmento de recta [CD], de frente, e a direcção luminosa, determinemos a sua sombra projectada nos planos de projecção.

Os passos a dar são similares aos do exercício anterior, distinguindo-se desse pelo facto de os extremos da sombra real do segmento [CD] não se situarem no mesmo plano de projecção, o que implica haver a necessidade de se determinar a sombra virtual de um dos extremos para se obter o ponto de quebra, o ponto **Q** (Fig. 29).

Observe que a sombra do segmento [CD] no plano frontal de projecção [$C_{v_2}D_{s_2}$] é paralelo à projecção frontal [C_2D_2] do segmento [CD]. Tendo em conta esta realidade de paralelismo, poderia ser dispensada a determinação da sombra virtual do ponto C, traçando-se uma paralela a [C_2D_2], a partir de D_{s_2}, como se pode ver na figura ao lado (Fig. 30).

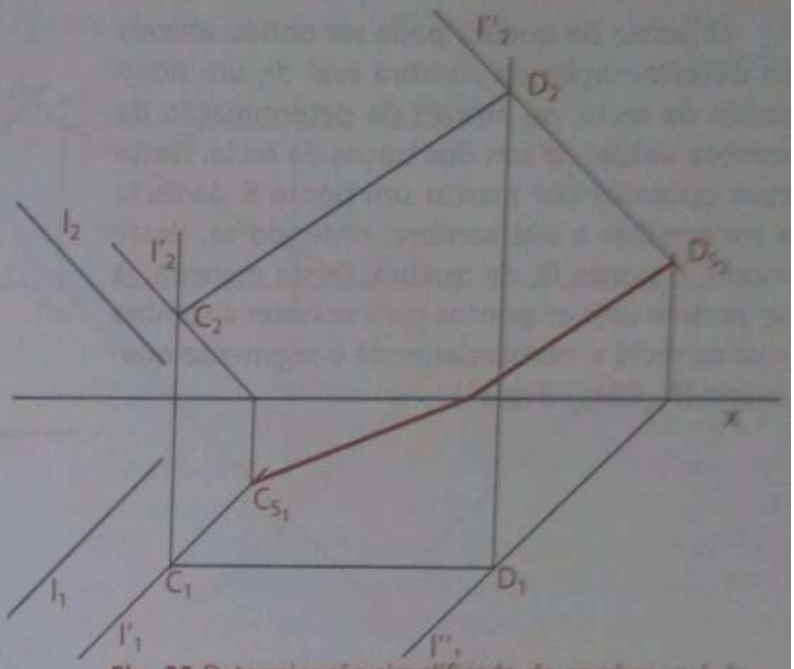


Fig. 30 Determinação simplificada da sombra real do segmento [CD].

Sombra projectada de recta

O conhecimento desenvolvido na determinação de sombras projectadas de segmentos de rectas é fundamental para a determinação de sombras projectadas de rectas. Com efeito, na determinação de sombras projectadas de rectas também se recorre à determinação de sombras de alguns dos seus pontos que, posteriormente, são unidos para se obterem as sombras das respectivas rectas.

No estudo de sombras de rectas, duas situações-tipo compreendem todas as situações possíveis, nomeadamente:

- Sombra de uma recta oblíqua aos planos de projecção, e
- Sombra de uma recta paralela a um dos planos de projecção.

Sombra de uma recta oblíqua aos planos de projecção

Dada a recta oblíqua e a direcção luminosa, em primeiro lugar identificam-se as projecções dos pontos da recta que serão usados para se determinar a sombra, nomeadamente os traços da recta nos planos ortogonais de projecção.

Recorde que os traços de uma recta nos planos de projecção são pontos de intersecção dessa recta com os planos de projecção. De igual modo, também sabemos que a sombra de um ponto nos planos de projecção é o ponto de intersecção do raio luminoso que o contém com os planos de projecção.

Sendo o traço de uma recta um ponto do plano de projecção, a sua sombra coincide com esse traço bem como a projecção da sombra nesse plano.

O traço frontal da recta r dada é o ponto F, cujas projecções são F_{r_1} e F_{r_2}. A projecção F_{r_2} é coincidente com o próprio ponto F, bem como com a sombra desse ponto F_s e a sua projecção frontal F_{s_2}. Para se evitarem muitas notações gráficas, algumas identificações não serão representadas, nomeadamente F e F_s, por não se revelarem importantes na leitura do desenho.

O traço horizontal da recta r é o ponto H, cujas projecções são H_{r_1} e H_{r_2}. Seguindo o mesmo raciocínio do traço frontal, H_{r_1} é coincidente com a sombra de H e a sua projecção horizontal H_{s_1}.

As projecções F_{s_2}, situada no plano frontal de projecção, e H_{s_1}, situada no plano horizontal de projecção, definem os extremos da sombra real da recta r. No entanto, a sua união não é directa por se encontrarem em planos diferentes, pelo que é necessário determinar-se o ponto de quebra.

O ponto de quebra pode ser obtido através da determinação da sombra real de um novo ponto da recta, ou através da determinação da sombra virtual de um dos traços da recta. Neste caso optamos por marcar um ponto **K** da recta e determinar a sua sombra, obtendo-se, deste modo, o ponto **Q**, de quebra. Desta maneira, já se podem unir os pontos para se obter a sombra real da recta **r**, nomeadamente o segmento quebrado [$F_{s_2}QH_{s_1}$] (Fig. 31).

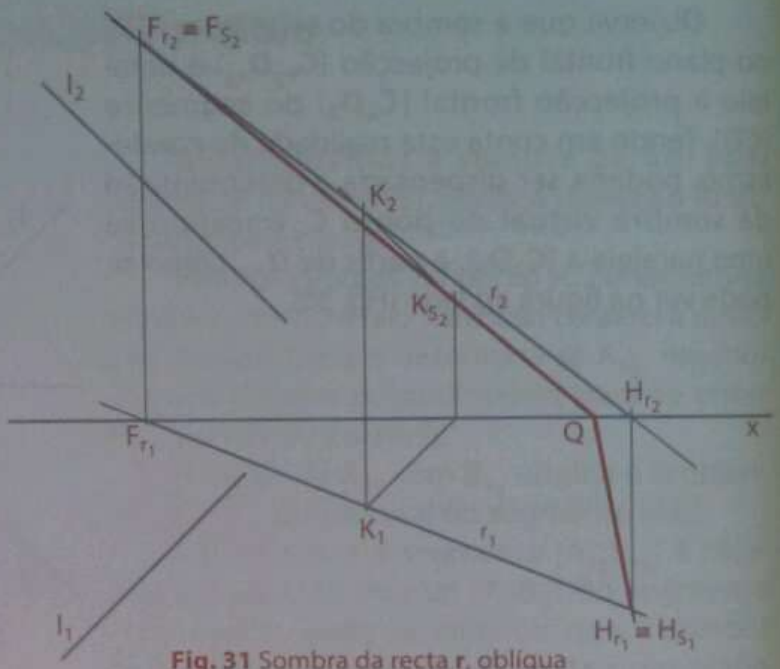


Fig. 31 Sombra da recta **r**, oblíqua

Sombra de uma recta paralela a um dos planos de projecção

Dada a recta de nível e a direcção luminosa convencional, determinemos a sombra que a recta produz nos planos de projecção.

A recta de nível pode atravessar apenas dois diedros, nomeadamente o ID e IID ou IIID e IVD. Neste caso, como se trata do estudo de sombras, só produz sombra a parte da recta que se situa no primeiro diedro, logo só se pode determinar a sombra duma recta de nível de cota positiva.

A projecção frontal do traço frontal da recta de nível, **n**, F_{n_2} é coincidente com o próprio traço e também com a sua sombra e a sua projecção frontal F_{s_2}, pois são pontos coincidentes no plano frontal de projecção.

Já é conhecido um ponto para a determinação da sombra da recta **n**, o ponto F_n, pelo que falta mais um ponto que pode ser identificado na recta como, por exemplo, o ponto **K**.

Determina-se a sombra do ponto **K**, K_{s_1}, situada no SPHA que juntamente com F_{s_2} determinam a sombra real da recta **n**. No entanto, K_{s_1} e F_{s_2} situam-se em planos diferentes, pelo que é necessário determinar-se o ponto de quebra (Fig. 32).

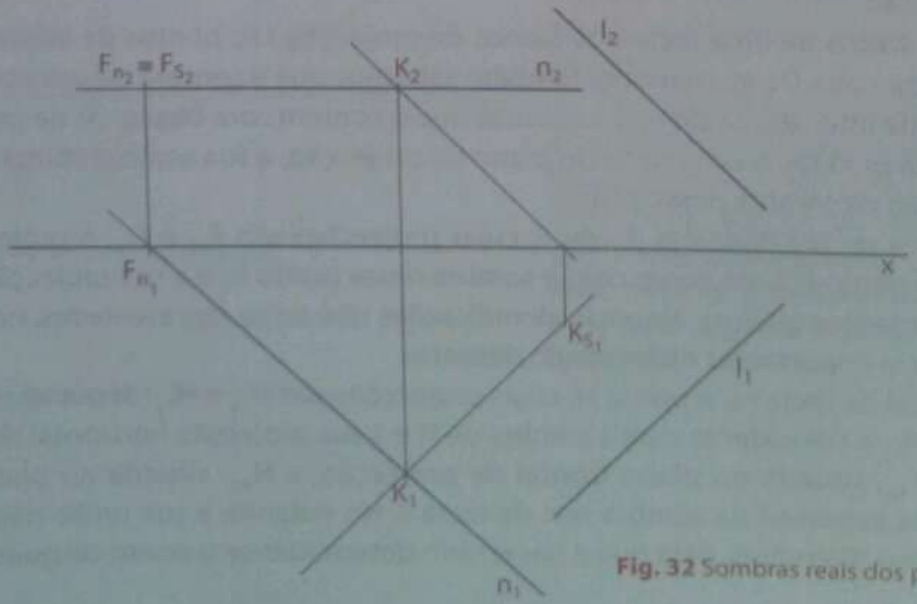


Fig. 32 Sombras reais dos pontos F_n e **K**

A sombra da recta **n** no plano horizontal de projecção é paralela à projecção horizontal dessa recta, ou seja, n_{s_1} é paralela a n_1. Assim sendo, conduzindo por K_{s_1} uma linha recta paralela a n_1, obtém-se na sua intersecção com o eixo x o ponto de quebra, o ponto **Q**.

Portanto, a sombra real da recta **n** no plano frontal de projecção é o segmento de recta $[F_{s_2}Q]$, e no plano horizontal de projecção é a semi-recta $\dot{Q}K_{s_1}$, isto é, a sombra real da recta **n** é a sombra da semi-recta $\dot{F}_nK$ (Fig. 33).

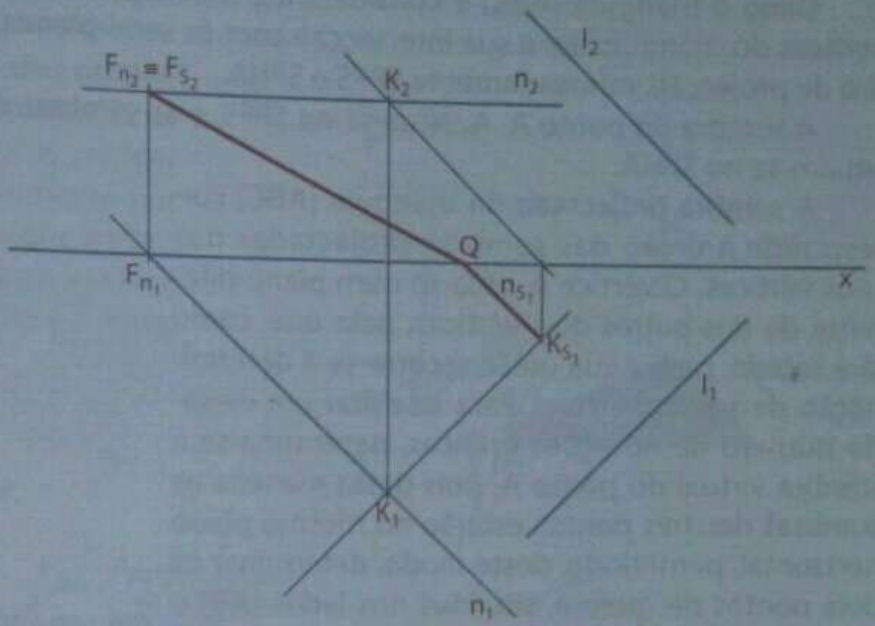


Fig. 33 Sombra da recta **n**, de nível

Sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de figuras planas

As sombras que serão determinadas são de polígonos e círculos assentes, em diferentes planos. Recorde que polígono é uma figura plana, limitada por linhas quebradas fechadas. Círculo é uma superfície plana, limitada por uma circunferência. Como deve estar recordado, circunferência é uma linha plana e fechada cujos pontos, na sua totalidade, são equidistantes ao seu centro.

De acordo com a abordagem das sombras própria, projectada e espacial (ver página 117), numa situação em que há luz proveniente de uma fonte luminosa, uma face da figura plana é iluminada e a outra fica em sombra, pois a face iluminada impede a passagem dos raios luminosos para a outra face.

Determinemos a sombra do triângulo **[ABC]**, contido num plano de topo δ, tendo em conta a direcção luminosa **l** (Fig. 34).

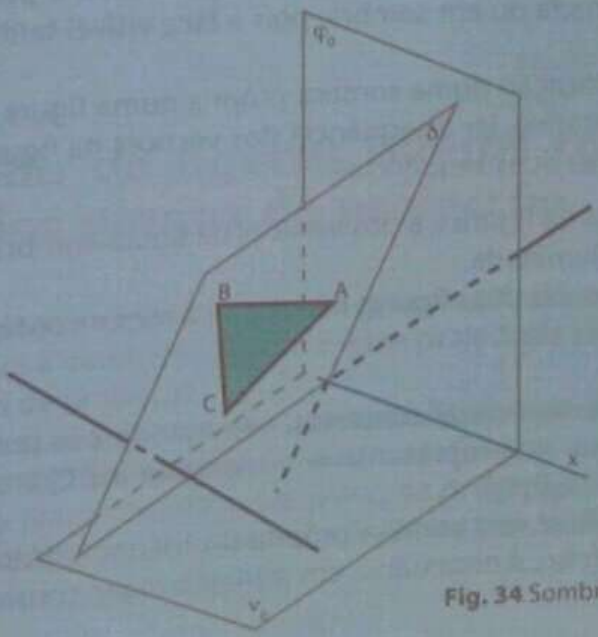


Fig. 34 Sombra própria do triângulo **[ABC]**

Dado o triângulo [ABC] e considerando a direcção luminosa l, conduzem-se raios luminosos pelos vértices do triângulo até à sua intersecção com os semi-planos de projecção que definem o primeiro diedro de projecção, nomeadamente SPFS e SPHA.

A sombra do ponto A, A_s situa-se no SPFS, e as sombras dos pontos B e C, respectivamente B_s e C_s, situam-se no SPHA.

A sombra projectada do triângulo [ABC] corresponde à união das sombras projectadas dos seus vértices. O vértice A situa-se num plano diferente do dos outros dois vértices, pelo que, como já é sabido, para a sua união recorre-se à determinação de sombra virtual. Para se evitar um elevado número de notações gráficas, determina-se a sombra virtual do ponto A, pois desta maneira as sombras dos três pontos estarão no mesmo plano horizontal, permitindo, deste modo, determinar os dois pontos de quebra, situados nos lados [AB] e [AC]. Unem-se os pontos de quebra à sombra do ponto A e obtém-se a sombra projectada do triângulo [ABC].

Note que a face do triângulo que a figura mostra está em sombra, ou seja, é a sombra própria do triângulo.

A forma como se identificou a sombra própria do triângulo [ABC] não se baseou num determinado método, pelo que vamos em seguida desenvolver um método de identificação duma sombra própria numa figura plana (Fig. 35).

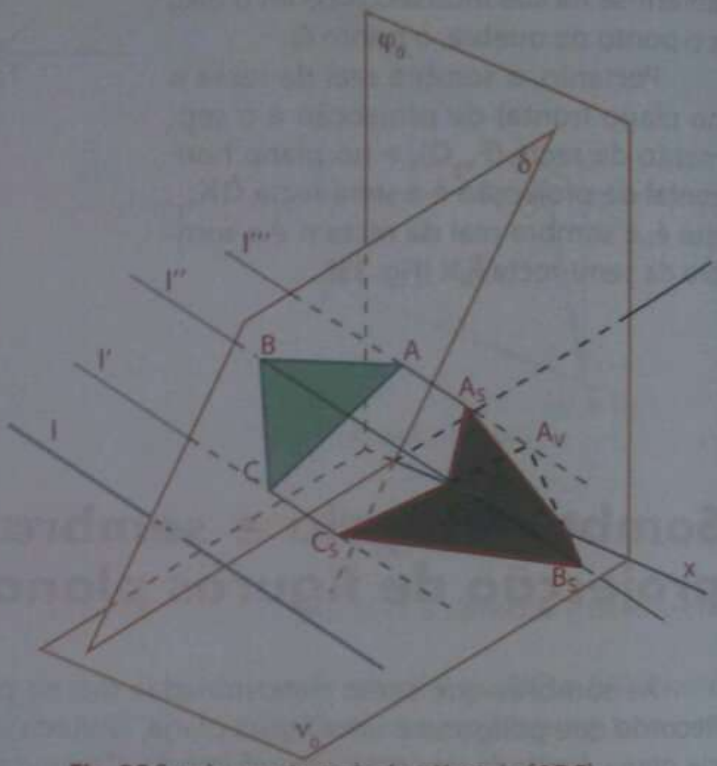


Fig. 35 Sombra projectada do triângulo [ABC].

Processo para identificação da sombra própria numa figura plana

O processo para a identificação da sombra própria duma figura plana é bastante simples e carece, em primeiro lugar, da determinação da sombra projectada.

O recurso a esse processo prende-se com o facto de, por vezes, a posição da figura plana suscitar dúvidas quanto à sua face iluminada ou em sombra, pois a face visível tanto pode estar iluminada como sombreada.

Assim, o processo de identificação duma sombra própria numa figura plana consiste em, tendo em conta um mesmo movimento rotativo, ler a sequência dos vértices da figura e da figura-sombra a partir de um mesmo vértice, e analisar as duas sequências.

- Se a sequência dos vértices da figura e a dos vértices da figura-sombra seguirem a mesma ordem, a face visível da figura está iluminada.
- Se a sequência dos vértices das duas figuras não seguir a mesma ordem, a face visível da figura está sombreada.

Verifiquemos essas situações em casos concretos, começando por uma figura cuja face visível está iluminada. Na figura que se segue está representado o triângulo [ABC] e a respectiva projecção da sua sombra nos planos de projecção [$A_sB_sC_s$].

O que se pretende é identificar se a sombra própria do triângulo [ABC] situa-se na sua face visível ou na sua face invisível. Para o efeito, é necessário, em primeiro lugar, considerar um movimento rotativo

qualquer, que tanto pode ser o dos ponteiros do relógio como o contrário.

Neste caso, consideremos o sentido dos ponteiros do relógio e, a partir do vértice **A**, verificamos a sua ordem que, como se pode ver, é **A**, **B** e **C**. Os vértices da sua sombra, $[A_sB_sC_s]$, começando igualmente por A_s, também seguem a mesma ordem, pelo que a sombra própria do triângulo **[ABC]** encontra-se na sua face invisível, ou seja, a face visível nesta situação é a iluminada (Fig. 36).

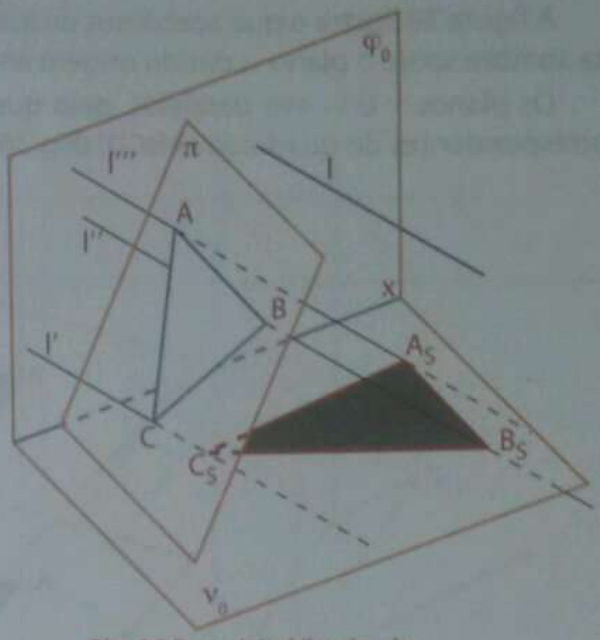


Fig. 36 Face visível iluminada.

A face visível duma figura plana pode estar em sombra se a ordem dos vértices da própria figura e da respectiva sombra projectada, de acordo com um certo movimento rotativo, não for a mesma.

A figura 37 ilustra um triângulo **[EFG]** e a sua sombra projectada. Considerando o movimento rotativo dos ponteiros do relógio, a partir do vértice **E**, a ordem que se apresenta é **E**, **F** e **G**. Na sombra do triângulo, começando por E_s, e segundo o mesmo movimento rotativo, a ordem dos vértices da sombra é E_s, G_s e F_s.

Como se pode constatar, a ordem da sequência dos vértices do triângulo é diferente da ordem da sequência dos vértices da sua sombra, pelo que a face visível do triângulo é a face em sombra.

No nosso estudo não serão resolvidos exercícios sobre sombra própria de figuras planas, pelo que a abordagem feita foi meramente para dar uma ideia geral sobre o assunto.

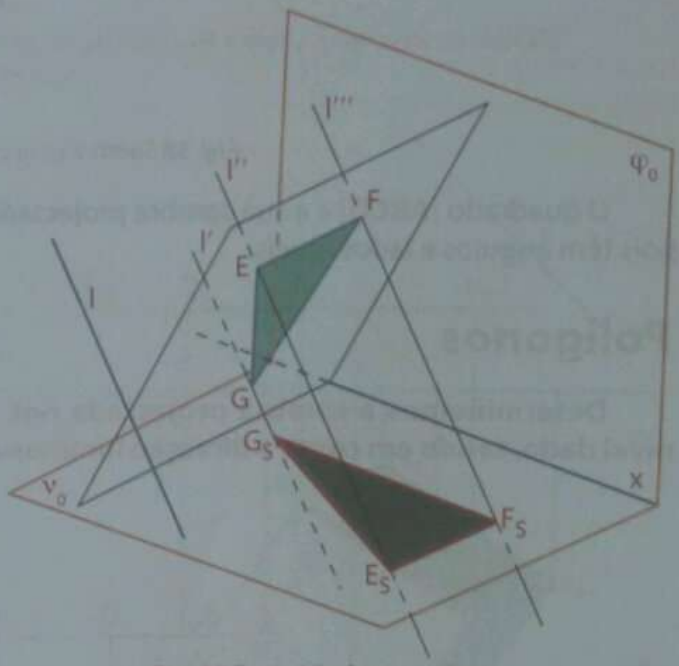


Fig. 37 Face visível em sombra

Sombra projectada de figuras planas contidas em planos paralelos a um dos planos de projecção

A determinação da sombra projectada de um segmento de recta num plano paralelo a esse segmento constitui uma base para a determinação da sombra projectada de figuras planas contidas em planos paralelos a um dos planos de projecção.

Com efeito, usando a direcção luminosa, um segmento de recta paralelo ao plano sobre o qual se produz a sua sombra tem a sua sombra paralela e **geometricamente igual** a esse segmento que a origina.

Assim sendo, uma figura plana paralela a um plano de projecção tem, nesse plano de projecção, a sua sombra projectada geometricamente igual a si própria, ou seja, a sombra projectada é **geometricamente igual** à figura plana que a origina.

A figura 38 ilustra o que acabámos de afirmar. O quadrado [**ABCD**], contido num plano ν_1 produziu a sua sombra sobre o plano ν, dando origem ao quadrado [$\mathbf{A_sB_sC_sD_s}$].

Os planos ν e ν_1 são paralelos, pelo que os lados do quadrado [$\mathbf{A_sB_sC_sD_s}$] são paralelos aos lados correspondentes do quadrado [**ABCD**] (Fig. 38).

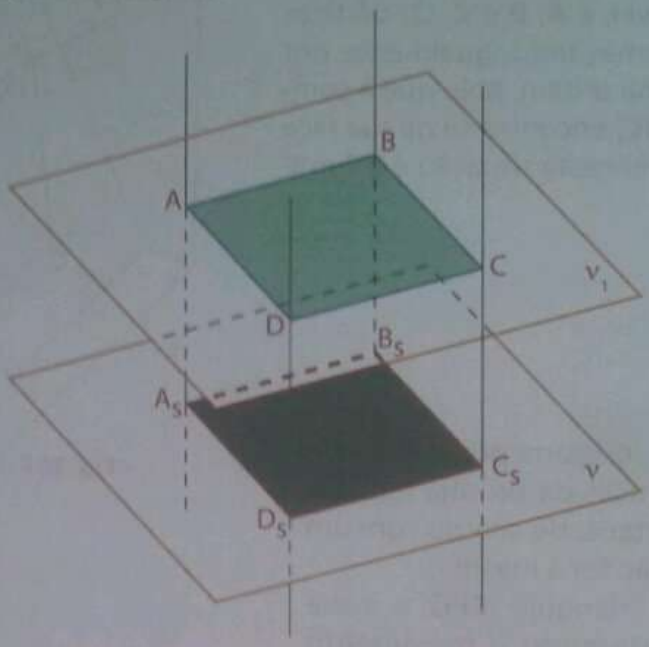


Fig. 38 Sombra projectada de [**ABCD**] paralelo a ν.

O quadrado [**ABCD**] e a sua sombra projectada, o quadrado [$\mathbf{A_sB_sC_sD_s}$], são geometricamente iguais, pois têm ângulos e lados iguais.

Polígonos

Determinemos a sombra projectada nos planos de projecção de um quadrado [ABCD], de nível dado, tendo em conta a direcção luminosa l, também dada (Fig. 39).

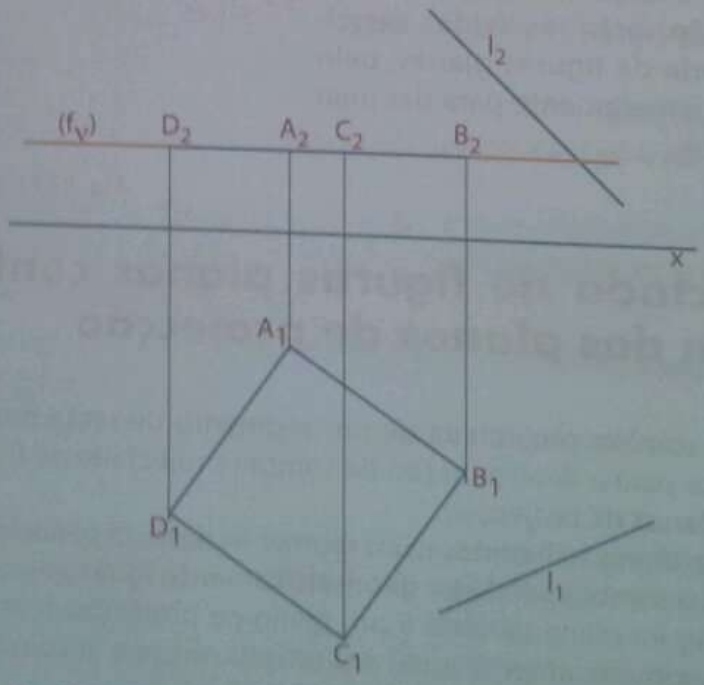


Fig. 39 Projecções do quadrado e da direcção luminosa

A sombra projectada do quadrado [**ABCD**] resulta da determinação das sombras dos vértices que o definem sobre os planos de projecção, que depois são unidos, pelo que se trata dum exercício familiar. Assim, pelos vértices do quadrado conduzem-se raios luminosos paralelos a **l**.

Conforme se pode ver no desenho, A_{s_1} é sombra real do ponto **A**, B_{s_1} é sombra real do ponto **B**, C_{s_1} é sombra real do ponto **C** e D_{s_1} é sombra real do ponto **D**. Tendo em conta que as sombras reais dos quatro vértices situam-se no mesmo plano de projecção, o plano horizontal de projecção, a sua união é directa. Assim, o quadrado [$A_{s_1}B_{s_1}C_{s_1}D_{s_1}$] é a sombra do quadrado [**ABCD**] dado (Fig. 40).

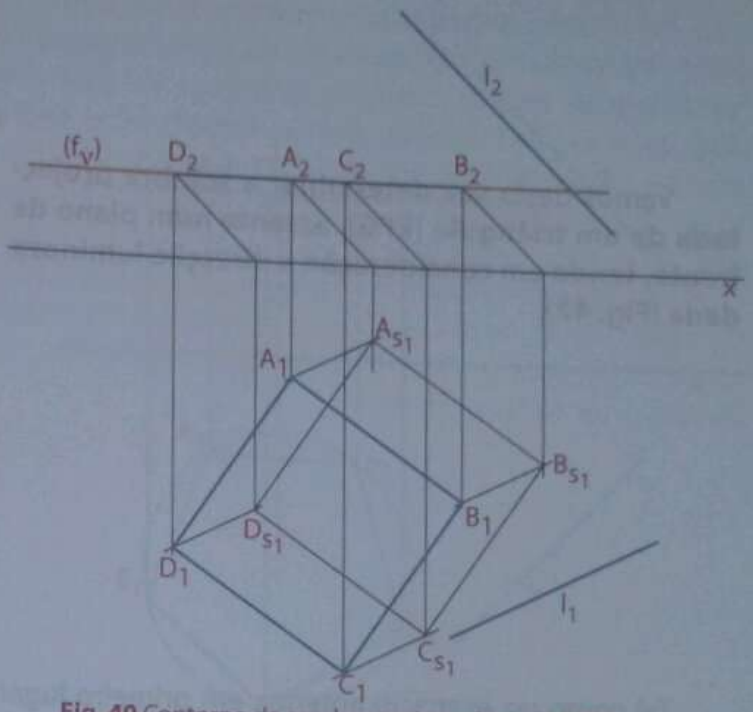


Fig. 40 Contorno da sombra projectada de [**ABCD**].

Para, completar a resolução do exercício, resta apenas distinguir os traços da sombra de modo a facilitar a sua leitura.

Desde já, chamamos a atenção para a uniformização dos traços nas sombras, da seguinte maneira:

1. Para a distinção da sombra própria utiliza-se o tracejado paralelo ao eixo **x**, em ambas as projecções (este será usado em sombras de sólidos, pois no nosso estudo não vamos desenvolver o estudo de sombras próprias de figuras planas).
2. A sombra projectada será representada pelo seu contorno e um tracejado perpendicular à direcção luminosa. No plano horizontal de projecção, o tracejado é perpendicular à projecção horizontal da direcção luminosa e, no plano frontal de projecção, o tracejado é perpendicular à projecção frontal da direcção luminosa.
   Note que o referido tracejado será sempre a traço fino.

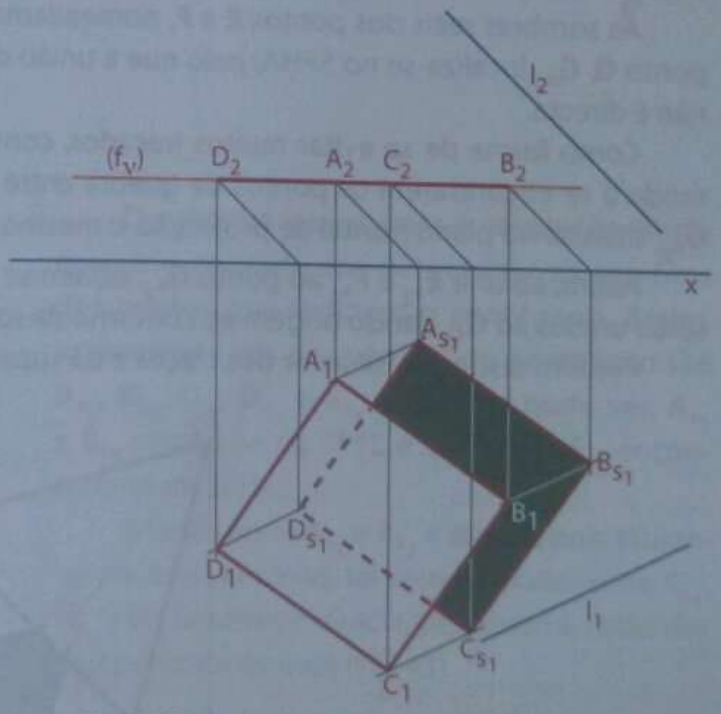


Fig. 41 Distinção dos traços do desenho

Tendo em conta que as figuras que estão a ser projectadas são opacas, a parte da sombra cuja visibilidade é impedida pela figura que a produz não é tracejada e o seu contorno representa-se a traço grosso interrompido. Os contornos visíveis, tanto da sombra como da figura, como é óbvio, são representados a traço contínuo grosso (Fig. 41).

Nota: Neste livro, a sombra própria será representada a verde claro e a sombra projectada a verde escuro; os contornos visíveis da sombra estarão a traço vermelho contínuo, e os contornos invisíveis das sombras serão a traço vermelho interrompido. Caso use cor para distinguir as sombras dos seus desenhos, poderá escolher a cor que lhe for conveniente para representar as sombras própria e projectada.

Vamos desta vez **determinar a sombra projectada de um triângulo [EFG], assente num plano de frente, tendo em consideração a direcção luminosa dada (Fig. 42).**

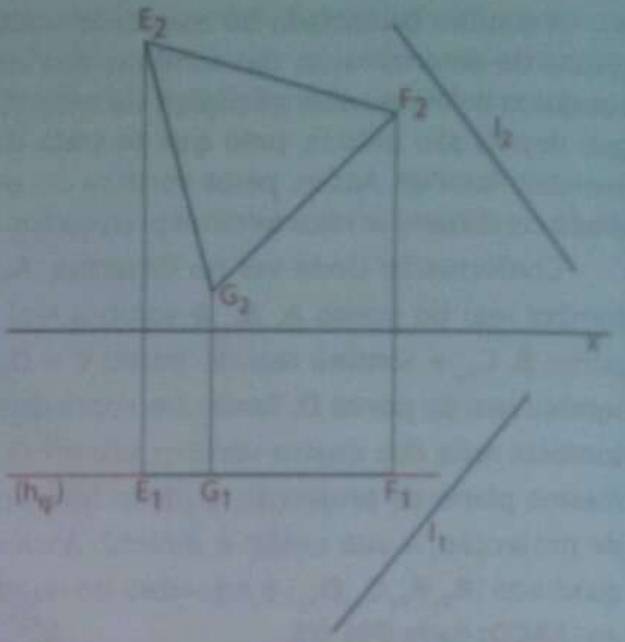


Fig. 42 Projecções do triângulo e da direcção luminosa

Tal como no exercício anterior, em primeiro lugar determinam-se as sombras dos pontos que definem a figura plana, neste caso o triângulo, os pontos **E**, **F** e **G**. A sombra real do ponto **E** é E_{s_2}, a do ponto **F** é F_{s_2} e a do ponto **G** é G_{s_1}.

As sombras reais dos pontos **E** e **F**, nomeadamente E_{s_2} e F_{s_2}, situam-se no SPFS, e a sombra real do ponto **G**, G_{s_2} localiza-se no SPHA, pelo que a união das sombras reais dos primeiros dois pontos com G_{s_1} não é directa.

Como forma de se evitar muitos traçados, convém determinar-se a sombra virtual do ponto **G**, de modo a se encontrarem os pontos de quebra entre E_{s_2} e G_{s_1}, e, F_{s_2} e G_{s_1}. A sombra virtual do ponto **G**, G_{v_2}, situa-se no plano frontal de projecção, o mesmo plano de E_{s_2} e F_{s_2}.

Assim, ao unir E_{s_2} e F_{s_2} ao ponto G_{v_2}, obtêm-se no eixo **x** os dois pontos de quebra procurados, que serão unidos ao G_{s_1} dando origem ao contorno da sombra projectada, o triângulo [**EFG**].

Por fim, distingue-se a cor dos traços e da superfície da sombra. (Fig. 43)

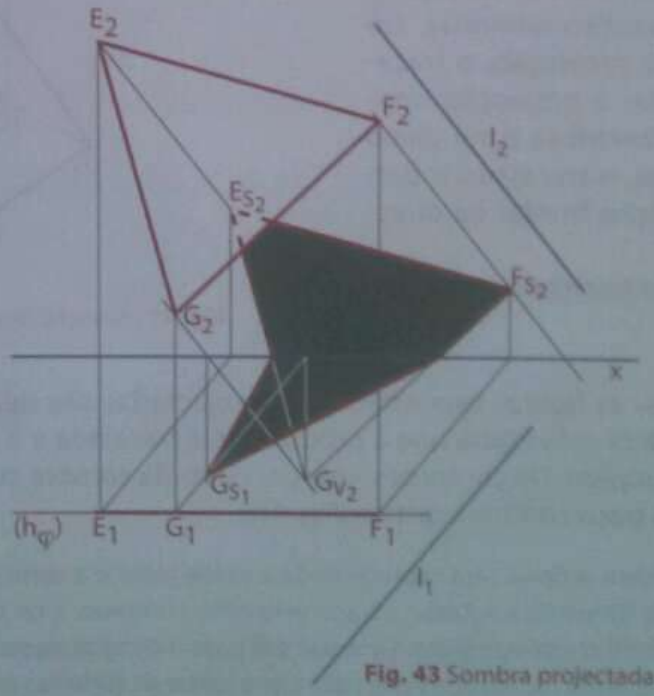


Fig. 43 Sombra projectada do triângulo [**EFG**].

Determinemos a sombra projectada de um pentágono regular [ABCDE] de nível, considerando uma direcção luminosa dada (Fig. 44).

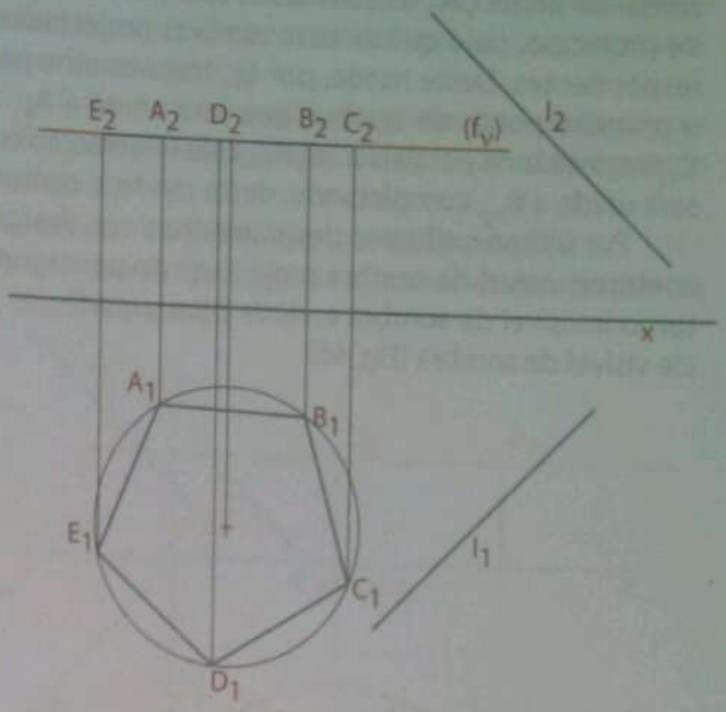


Fig. 44 Projecções do pentágono e da direcção luminosa

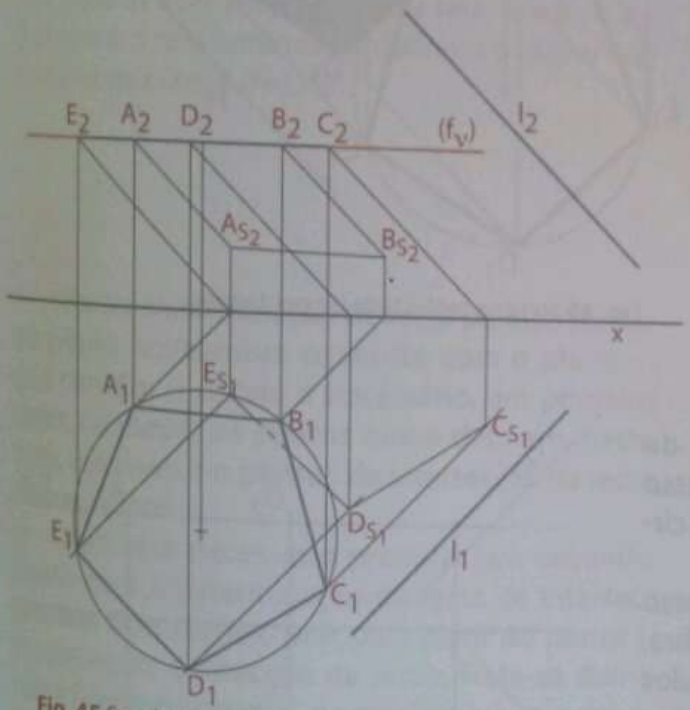


Fig. 45 Sombras reais dos vértices do pentágono

O primeiro passo para a resolução deste exercício consiste em determinar as sombras dos pontos que definem o pentágono. Assim, as sombras reais dos vértices do pentágono são A_{s_2}, B_{s_2}, C_{s_1}, D_{s_1} e E_{s_1}. Como se pode ver, A_{s_2} e B_{s_2} situam-se no SPFS e C_{s_1}, D_{s_1} e E_{s_1} encontram-se no SPHA.

A união entre A_{s_2} e B_{s_2} é directa, pois situam-se no mesmo plano, tal como a união entre C_{s_1}, D_{s_1} e E_{s_1} também é directa, pela mesma razão dos dois pontos anteriores (Fig. 45).

Devido ao facto de existirem sombras reais em planos distintos, é necessário, determinar os pontos de quebra.

Tendo em conta que no caso anterior recorreu-se ao método de sombras virtuais e como forma de se aplicar e relacionar os vários conhecimentos desenvolvidos bem como para se evitar muitos traçados, convém recorrer-se ao que foi estudado sobre sombras de segmentos de rectas paralelos a um dos planos de projecção.

Com efeito, sendo o pentágono paralelo a um dos planos de projecção, neste caso ao plano horizontal de projecção, os seus lados são, por conseguinte, segmentos de rectas paralelos ao mesmo plano de projecção, pelo que as suas sombras projectadas, nesse plano horizontal, são paralelas aos lados correspondentes. Deste modo, por E_{s_1} traça-se uma paralela a $[E_1A_1]$, cuja intersecção com o eixo x origina o primeiro ponto de quebra, que será unido a A_{s_2}. De seguida, observando-se o mesmo raciocínio, por C_{s_1} traça-se uma paralela a $[C_1B_1]$, cuja intersecção com o eixo x origina o segundo ponto de quebra, que será unido a B_{s_2}, completando, deste modo, o contorno da sombra projectada do pentágono dado.

Por último, utiliza-se devidamente a cor, designadamente traço contínuo grosso a vermelho para o contorno visível da sombra projectada do pentágono, traço grosso interrompido a vermelho para o contorno invisível da sombra e verde para superfície visível da sombra (Fig. 46).

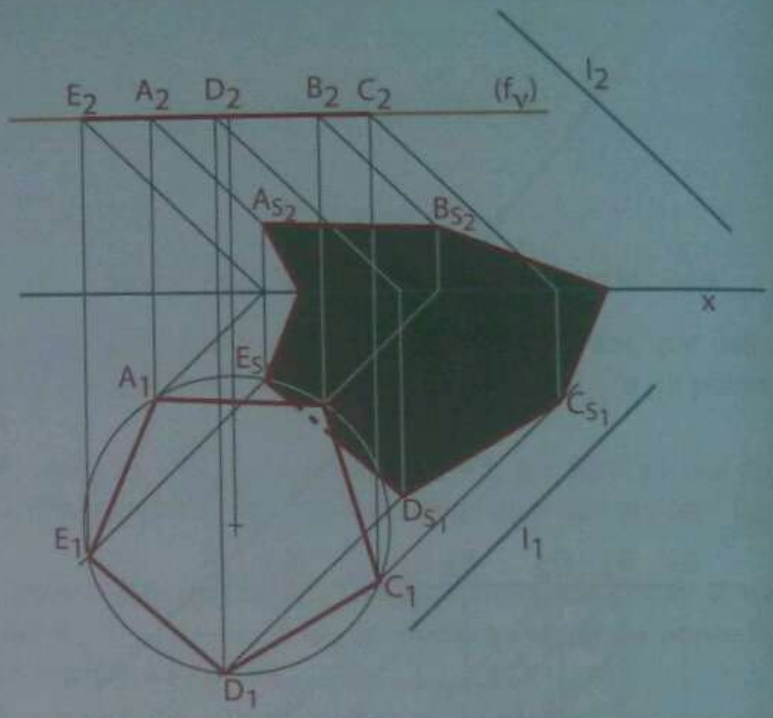


Fig. 46 Sombra projectada do pentágono.

Círculos

Um estudo de averiguação da existência de pontos de quebra deverá constituir o primeiro passo para a determinação da sombra projectada dum círculo (Fig. 47).

O **método das sombras virtuais** é um processo universal para a determinação de pontos de quebra. No entanto, a sua aplicação para o caso dos círculos não tem sido a melhor opção, pelo que existe um outro processo universal que, embora se aplique em qualquer figura plana, ajuda bastante na determinação da sombra projectada nos planos de projecção de círculos.

O processo que seguidamente será explicado requer, em primeiro lugar, que se compreenda claramente que os pontos de quebra na sombra de uma figura plana são as sombras no eixo x dos pontos dessa figura plana. Assim sendo, é necessário desenvolver o conhecimento sobre a determinação dos pontos da figura, cujas sombras projectadas situam-se sobre o eixo x.

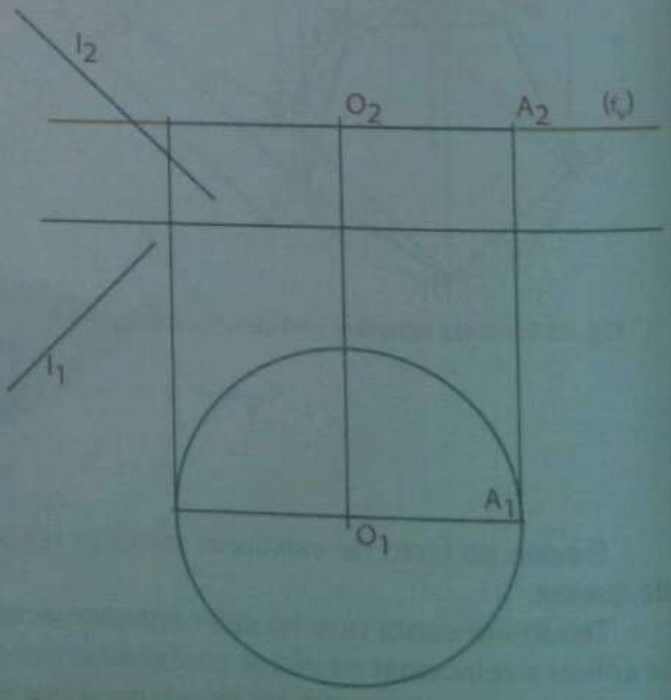


Fig. 47 Projecção do círculo e da direcção luminosa

Os pontos que produzem sombra no eixo **x** pertencem a um plano que contém o próprio eixo **x**, ou seja, o eixo **x** é uma das rectas que definem o plano que contém os pontos de quebra. As outras rectas que definem esse plano são as rectas paralelas à direcção luminosa e que são concorrentes com com o eixo **x**. Portanto, esse plano é passante, ou seja, o **plano luz/sombra passante**.

Sendo assim, os pontos de quebra localizam-se na linha de intersecção do **plano luz/sombra passante** com o plano que contém a figura plana. Caso a linha de intersecção dos dois planos não intersecte a figura plana, a sombra da figura não apresenta pontos de quebra.

O método que acabou de ser descrito designa-se **método do plano luz/sombra passante**.

Passemos a um caso concreto, **determinando a sombra projectada nos planos de projecção de um círculo de nível, tendo em conta uma direcção luminosa dada**.

O primeiro passo consiste em se averiguar a existência de pontos de quebra, o que é possível recorrendo-se a um dos métodos universais conhecidos, especialmente o **método do plano luz/sombra passante**, que mais se ajusta à determinação da sombra projectada de círculos.

Traça-se o raio luminoso **l'**, paralelo à direcção luminosa **l**, concorrente com o eixo **x** no ponto **K**. O ponto **K**, por pertencer ao eixo **x**, coincide com as suas projecções, ou seja, $K \equiv K_1 \equiv K_2$. O eixo **x** e o raio luminoso **l'** definem o **plano luz/sombra passante** (Fig. 48).

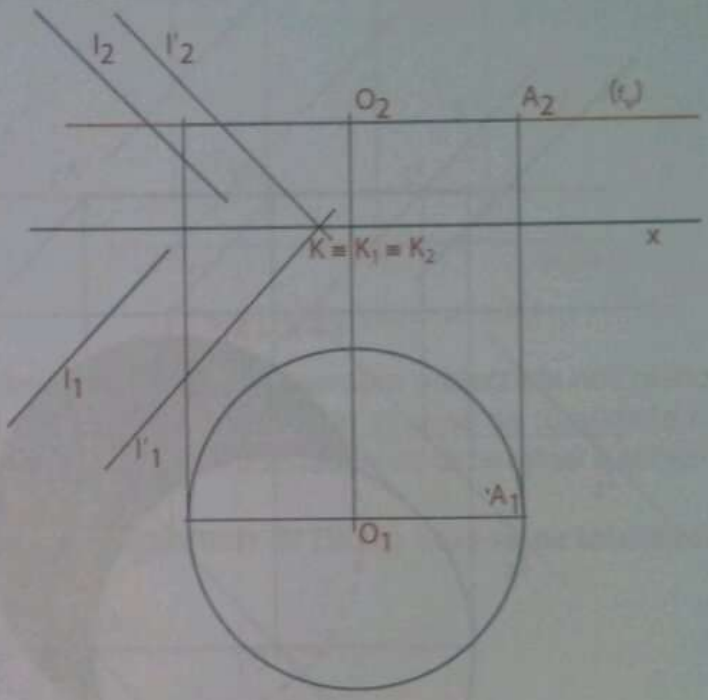


Fig. 48 Projecções da recta passante **l'**

Para a determinação da recta de intersecção do plano luz/sombra passante com o plano ν, que contém o círculo é necessário, em primeiro lugar, conhecer os pontos que a definem, neste caso, um deles é o ponto **I** de intersecção da recta **l'** com o plano ν.

Não será necessário procurar um segundo ponto para a determinação da recta de intersecção dos dois planos, pois para além do ponto **I**, é conhecida a direcção da recta. Trata-se duma recta fronto-horizontal, na medida em que resulta da intersecção dum plano passante com um plano horizontal ou de nível.

Assim sendo, pelas projecções do ponto **I** fazem-se passar linhas paralelas ao eixo **x**, que são as projecções da recta **i** de intersecção do plano ν com o **plano luz/sombra passante.**

A recta **i** não intersecta o círculo, pelo que à sua sombra não apresenta pontos de quebra, o que significa que a sombra do círculo situa-se apenas num dos dois semi-planos que definem o primeiro diedro (Fig. 49).

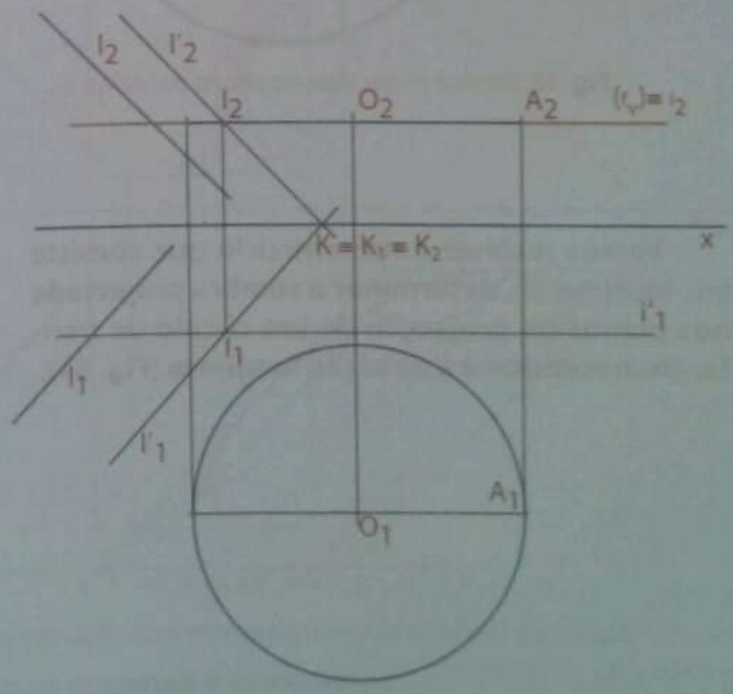


Fig. 49 Determinação da recta **i** de intersecção do plano do círculo com o plano luz/sombra passante

Um dos pontos que definem o círculo é o seu centro, **O**, pelo que se pode determinar a sua sombra nos planos de projecção. A sombra real do ponto **O**, $\mathbf{O_{s_1}}$, situa-se no SPHA, o que nos leva a concluir que a sombra do círculo se localiza na totalidade nesse semi-plano, o SPHA.

Sabe-se que no estudo de sombras, sendo dada a direcção luminosa, a sombra de uma figura plana sobre um plano a que é paralelo é geometricamente igual à própria figura, ou seja, a figura plana e a sua sombra projectada são geometricamente iguais.

Neste exercício, a figura plana é um círculo situado num plano horizontal ou de nível, que é obviamente paralelo ao plano horizontal de projecção. Sobre esse círculo já se sabe que a sua sombra situa-se na totalidade no SPHA, logo, pela sombra real do centro do círculo, $\mathbf{O_{s_1}}$, traça-se uma circunferência com o raio igual ao do círculo. Por fim, distinguem-se os traços e as cores do desenho (Fig. 50).

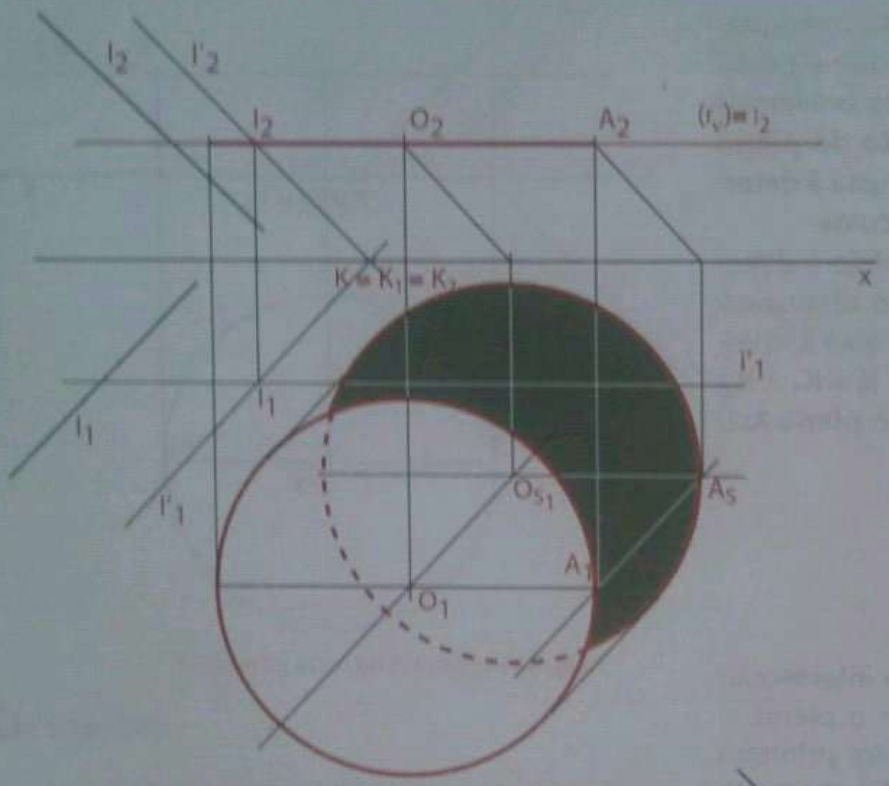


Fig. 50 Sombra projectada do círculo paralelo a v_0.

Vamos resolver outro exercício que consiste em, igualmente, **determinar a sombra projectada nos planos de projecção de um círculo de frente, conhecendo-se a direcção luminosa (Fig. 51).**

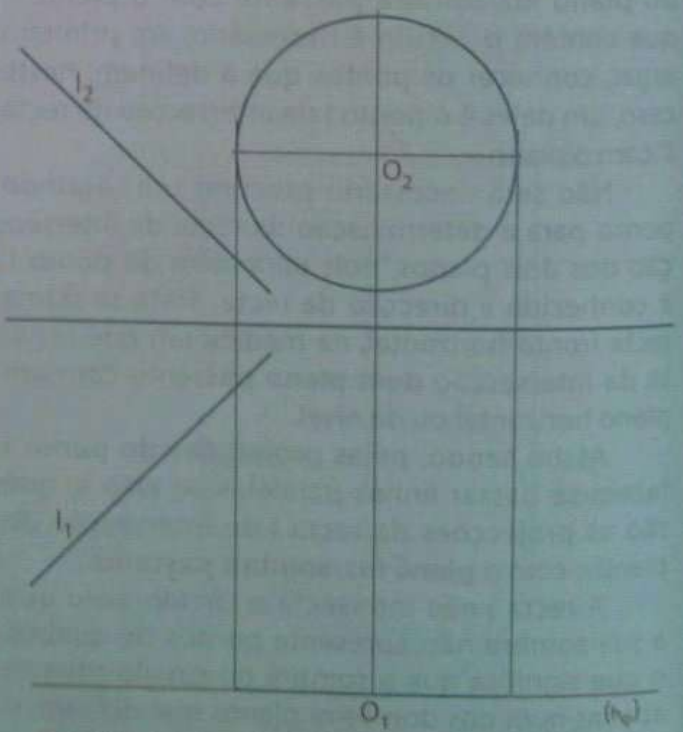


Fig. 51 Projecções do círculo e do raio luminoso l

Começa-se por se averiguar a existência de pontos de quebra com o recurso ao **método do plano luz/sombra passante**. Traça-se o raio **l'**, paralelo à direcção luminosa e que intersecta o eixo **x** no ponto **K**.

Determinam-se as projecções da recta **i**, de intersecção do plano φ, que contém o círculo, com o **plano luz/sombra passante** definido pelo eixo **x** e pela recta **l'**.

Na intersecção de **l'** com o plano que contém o círculo, o plano φ, de frente, obtém-se o ponto **I**. O ponto **I** e a direcção da recta **i** definem a recta **i**, pelo que por I_2 se traça i_2 paralelo ao eixo **x** e por I_1 traça-se i_1, também paralelo ao eixo **x**, as duas projecções da recta **i** (Fig. 52).

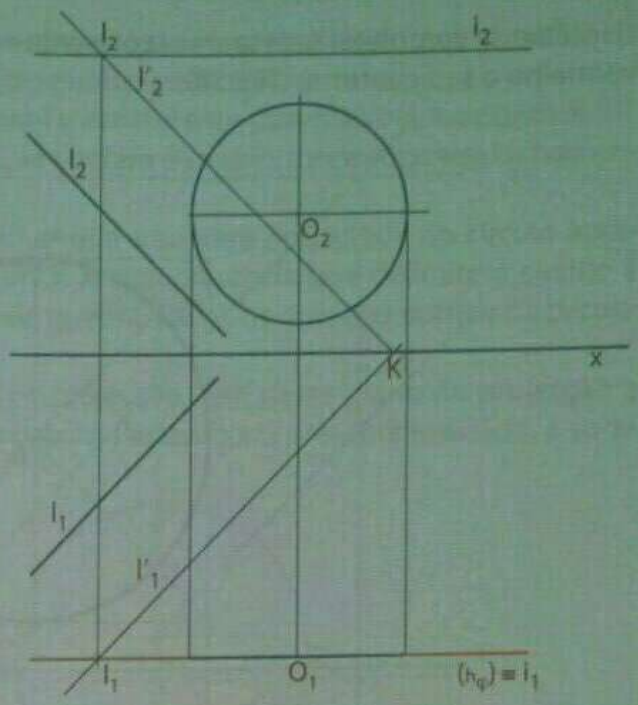


Fig. 52 Determinação da recta **i**

Como se pode verificar, a recta **i** é exterior ao círculo, pelo que a sua sombra projectada nos planos de projecção não apresenta pontos de quebra, ou seja, a sombra do círculo situa-se na totalidade no SPHA ou no SPFS. Para se ter resposta a esta última dúvida, é só uma questão de se determinar a sombra real de um dos pontos do círculo, neste caso a do ponto **O**, O_{s_1}.

O_{s_1} situa-se no SPHA, e, tendo em conta que a sombra projectada do círculo situa-se, na totalidade, no mesmo semi-plano, então esta situa-se no SPHA.

O plano onde o círculo se situa não é paralelo ao plano onde se projecta a sua sombra, ou seja, a sombra deste círculo não é geometricamente igual ao círculo, mas é uma elipse.

A construção mais ou menos rigorosa de uma elipse exige pelo menos oito pontos da curva, pelo que se envolve a projecção frontal do círculo num quadrado com as suas respectivas diagonais e medianas. Identificam-se os pontos de intersecção das medianas e diagonais do quadrado, com a projecção frontal do círculo, nomeadamente A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2 e H_2, e determinam-se as respectivas projecções horizontais A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 e H_1.

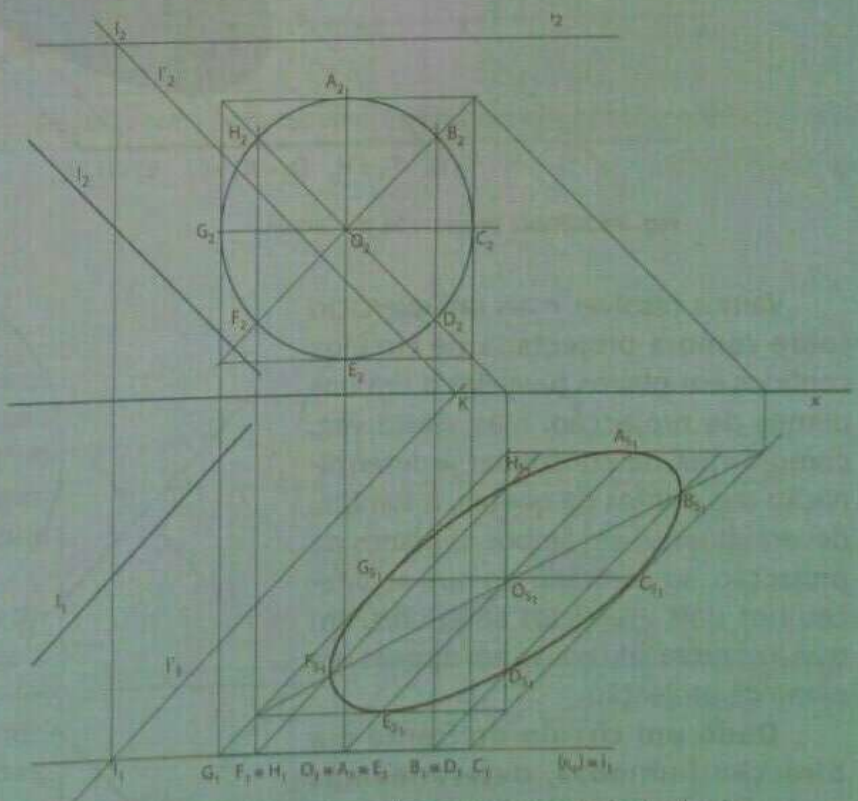


Fig. 53 Determinação do contorno da sombra projectada do círculo.

Determina-se a sombra do quadrado que se apresenta em forma de paralelogramo e traçam-se as suas respectivas diagonais e as medianas.

Identificam-se as sombras dos oito pontos da curva, nomeadamente A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1}, E_{s_1}, F_{s_1}, G_{s_1} e H_{s_1} e procede-se à sua união (Fig. 53).

Para se completar o desenho, representa-se a verde a superfície da sombra e a traço contínuo grosso vermelho o seu contorno (Fig. 54).

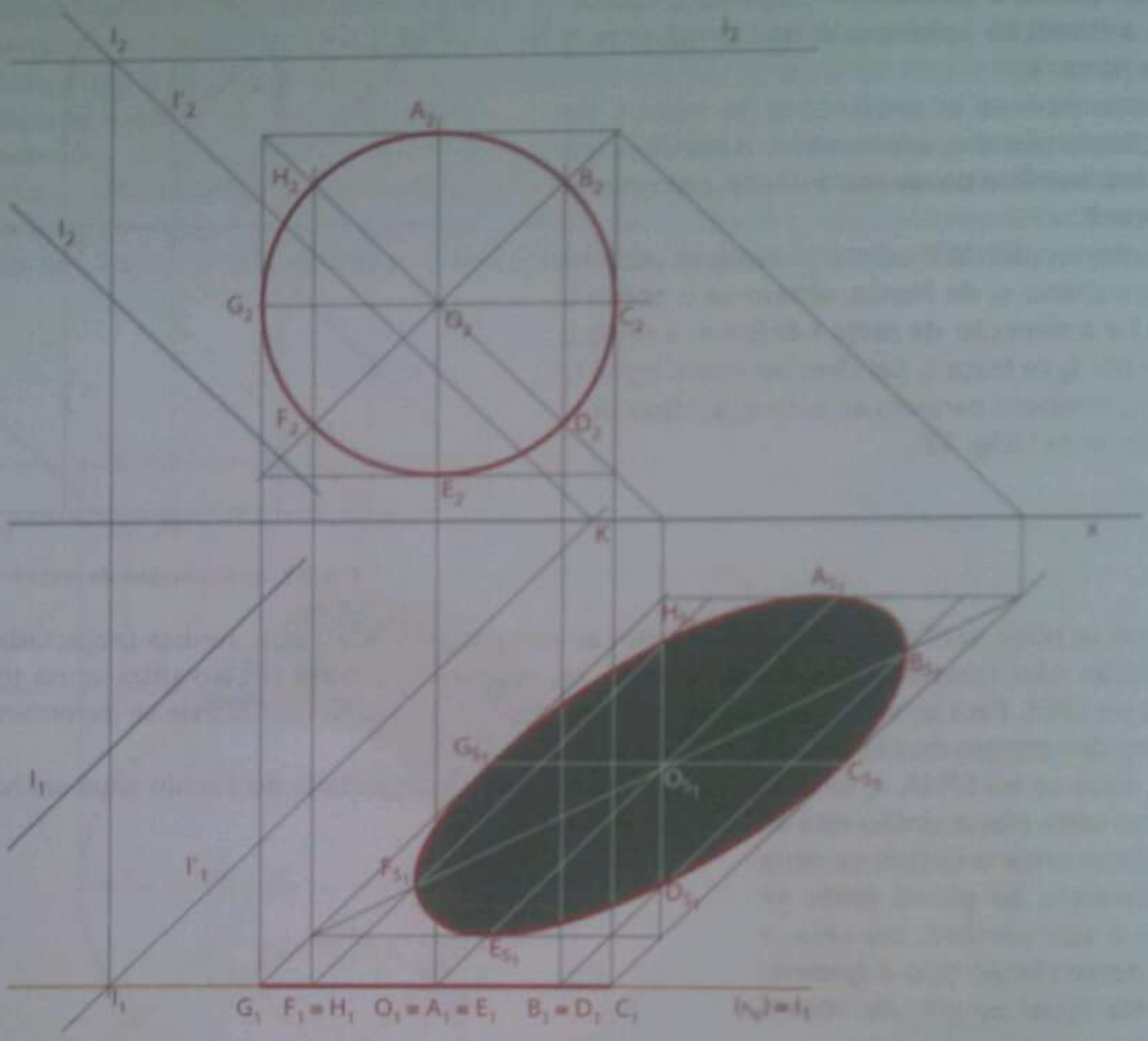


Fig. 54 Sombra projectada, do círculo.

Vamos resolver mais um exercício sobre sombra projectada de círculos contidos em planos paralelos a um dos planos de projecção, mas, desta vez, como forma de consolidar a determinação dos pontos de quebra, a sombra, deverá situar-se em ambos os planos de projecção, ao contrário do que aconteceu nos dois exercícios anteriores, em que a sombra situava-se em apenas um plano de projecção.

Dado um círculo de frente e a direcção luminosa, determinemos a sombra projectada do círculo nos planos de projecção (Fig. 55).

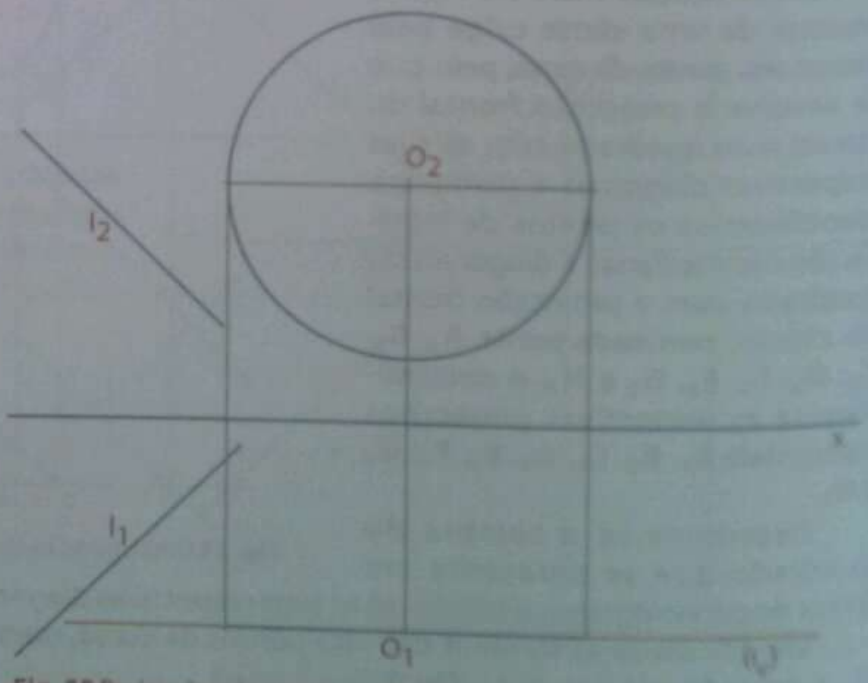


Fig. 55 Projecções do círculo e do raio luminoso **l**

O primeiro passo para a resolução deste exercício consiste, naturalmente, em averiguar a existência de pontos de quebra, com o recurso ao método de plano luz/sombra passante.

Traça-se o raio luminoso **l'**, paralelo à direcção luminosa **l** e concorrente com o eixo **x**, no ponto **K**.

O plano luz/sombra passante e o plano de frente, φ, que contém o círculo, intersectam-se dando origem à recta **i**, determinada pelo ponto **I** e a sua direcção.

A recta **i** intersecta o círculo, o que nos permite concluir que a sombra projectada do círculo apresenta pontos de quebra, ou seja, situa-se no SPHA e no SPFS. A circunferência que delimita o círculo é intersectada pela recta **i**, nos pontos **X** e **Z**, os dois pontos de quebra, isto é, os dois dos pontos da circunferência, cuja sombra projectada situa-se no eixo **x**.

Um círculo, situado num plano paralelo a um plano de projecção, tem nesse plano de projecção a sua sombra projectada geometricamente igual ao próprio círculo. Portanto, no presente exercício, a sombra projectada do círculo no SPFS é um segmento de círculo com raio igual ao do círculo dado.

Para a determinação do segmento do círculo, basta definir-se a sombra do centro do círculo no plano frontal de projecção, O_{s_2}, e traçar-se uma circunferência com o raio igual ao do círculo dado. Os pontos de intersecção da circunferência com o eixo **x** são as sombras X_s e Z_s, dos pontos **X** e **Z** do círculo. Deste modo poupou-se o traçado de raios luminosos passando pelos pontos de quebra para a determinação das suas sombras (Fig. 56).

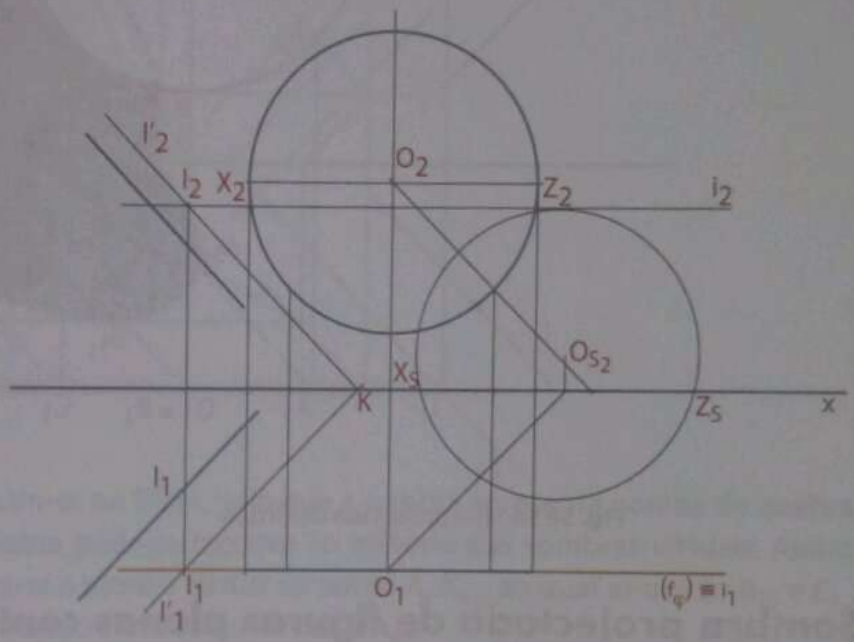


Fig. 56 Determinação dos pontos de quebra e da sombra no SPFS

A parte da sombra que resta determinar é a que se projecta no plano a que o círculo não é paralelo, pelo que, como vimos no exercício anterior, a sombra é um segmento de elipse. Trata-se da sombra que o círculo produz no SPHA.

Assim sendo, na base dos procedimentos do exercício anterior, envolve-se a parte do círculo cuja sombra ainda não foi determinada, num quadrado, identificando os pontos das suas diagonais e medianas, designadamente **A**, **B** e **C** (Fig. 57).

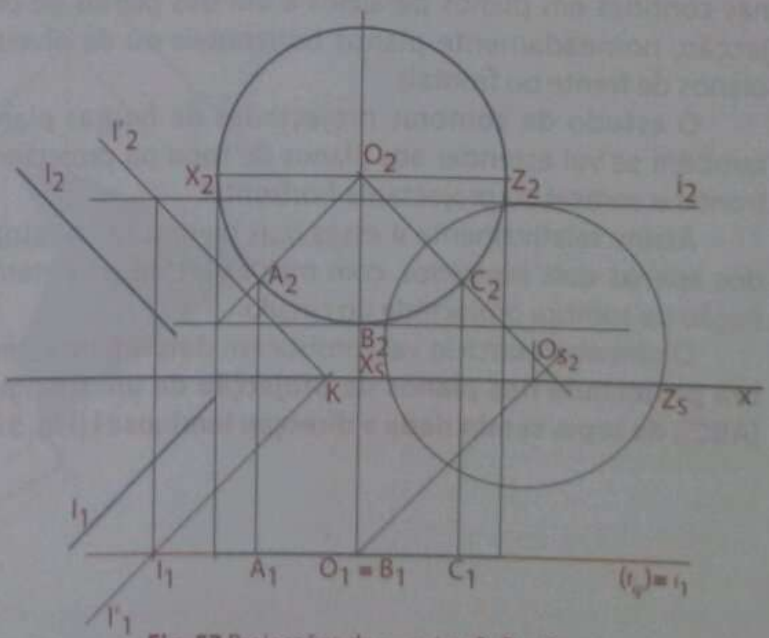


Fig. 57 Projecções dos pontos **A**, **B** e **C**

Com o recurso aos conhecimentos relativos ao paralelogramo envolvente, determinam-se as sombras A_{s_1}, B_{s_1}, e C_{s_1}, dos pontos **A**, **B** e **C**. Seguidamente, faz-se a união dos pontos e distinguem-se os traços e as cores do desenho (Fig. 58).

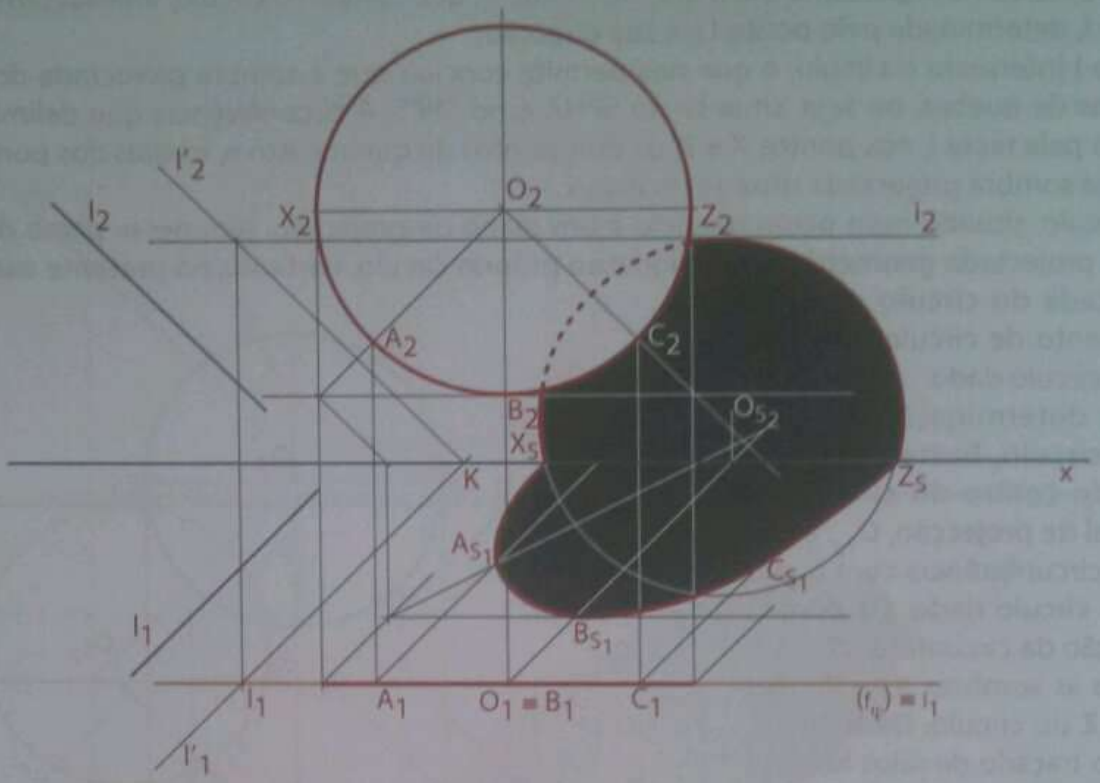


Fig. 58 Sombra projectada do círculo.

Sombra projectada de figuras planas contidas em planos perpendiculares a um dos planos de projecção

Até aqui, foram determinadas sombras de figuras planas contidas em planos paralelos a um dos planos de projecção, nomeadamente planos horizontais ou de níveis e planos de frente ou frontais.

O estudo de sombras projectadas de figuras planas também se vai estender aos planos de topo ou projectante frontal e vertical ou projectante horizontal.

Assim, relativamente a esses dois planos, serão resolvidos apenas dois exercícios, com maior detalhe, na determinação da sombra projectada do círculo.

O primeiro exercício vai consistir em **determinar a sombra projectada nos planos de projecção de um triângulo [ABC], de topo, sendo dada a direcção luminosa l (Fig. 59).**

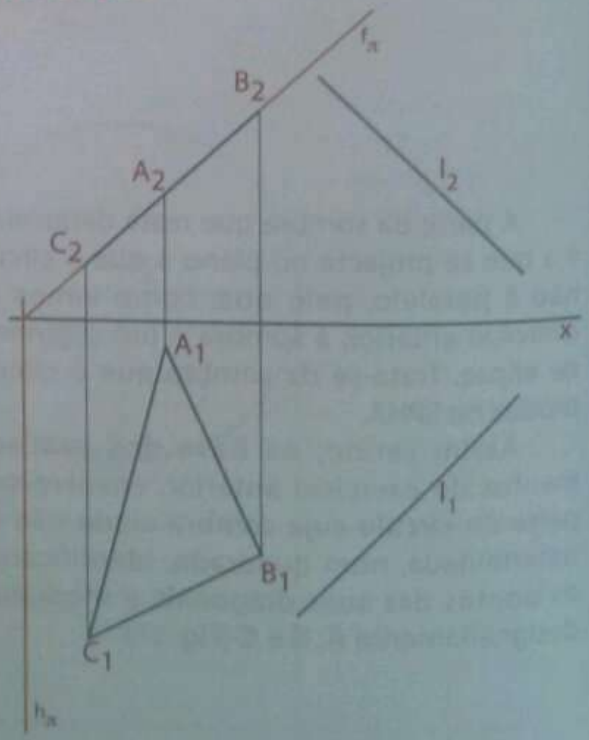


Fig. 59 Projecções do triângulo e do raio luminoso l.

Em primeiro lugar, determinam-se as sombras dos três vértices do polígono, fazendo-se passar pelos três pontos raios luminosos paralelos à direcção luminosa, obtendo-se, deste modo, A_{s_2}, B_{s_1} e C_{s_1} (Fig. 60).

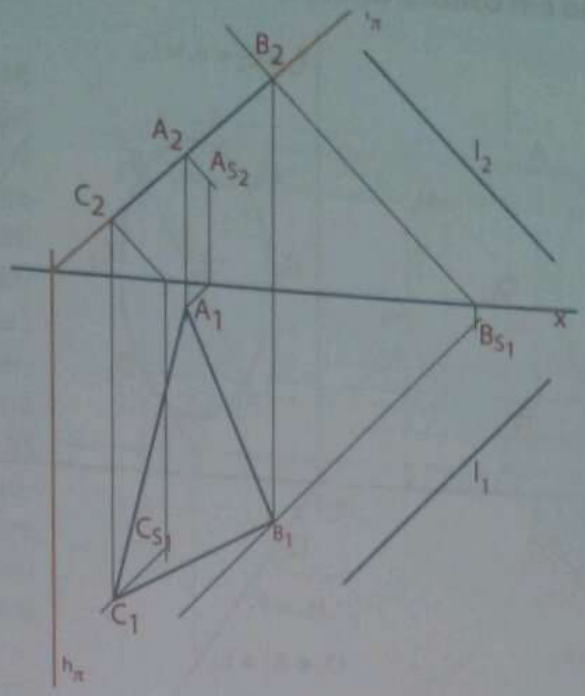


Fig. 60 Determinação das sombras dos três vértices do triângulo

A_{s_2} situa-se no SPFS, e B_{s_1} e C_{s_1} situam-se no SPHA, pelo que a sombra apresenta pontos de quebra. Para a determinação dos pontos de quebra pode-se recorrer ao método das sombras virtuais. Assim, para se evitar muitos traçados, determina-se a sombra virtual do ponto A, A_{v_1}, ao qual se unirão B_{s_1} e C_{s_1}. Dessa união determinam-se os pontos de quebra que serão unidos a A_{s_2}.

Estas uniões são antecedidas pela união de B_{s_1} e C_{s_1}, que é directa, porque os dois pontos se encontram no mesmo plano.

Por último, como em todos os exercícios, distinguem-se os traços e as cores do desenho (Fig. 61).

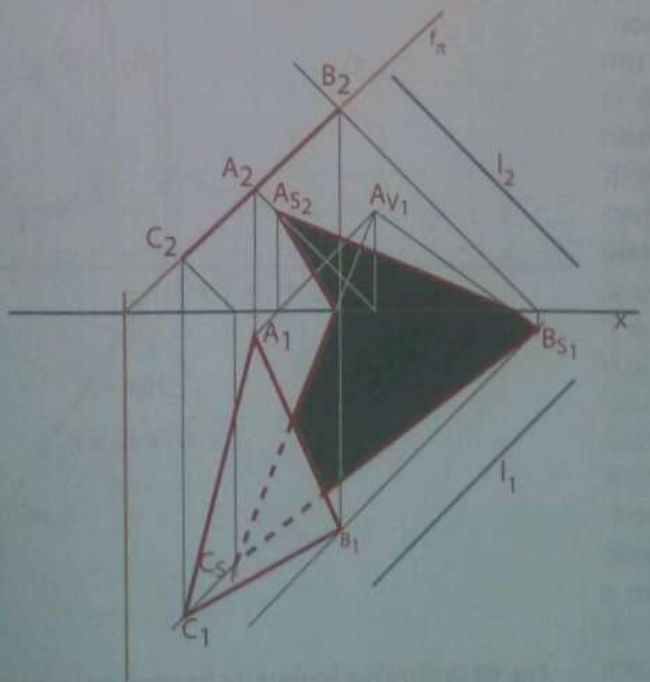


Fig. 61 Sombra projectada do triângulo.

O segundo e último exercício relativo às sombras projectadas de figuras planas, contidas em planos de topo e vertical, vai consistir em **determinar a sombra projectada de um círculo, contido num plano projectante horizontal, tendo em conta a direcção luminosa l dada** (Fig. 62).

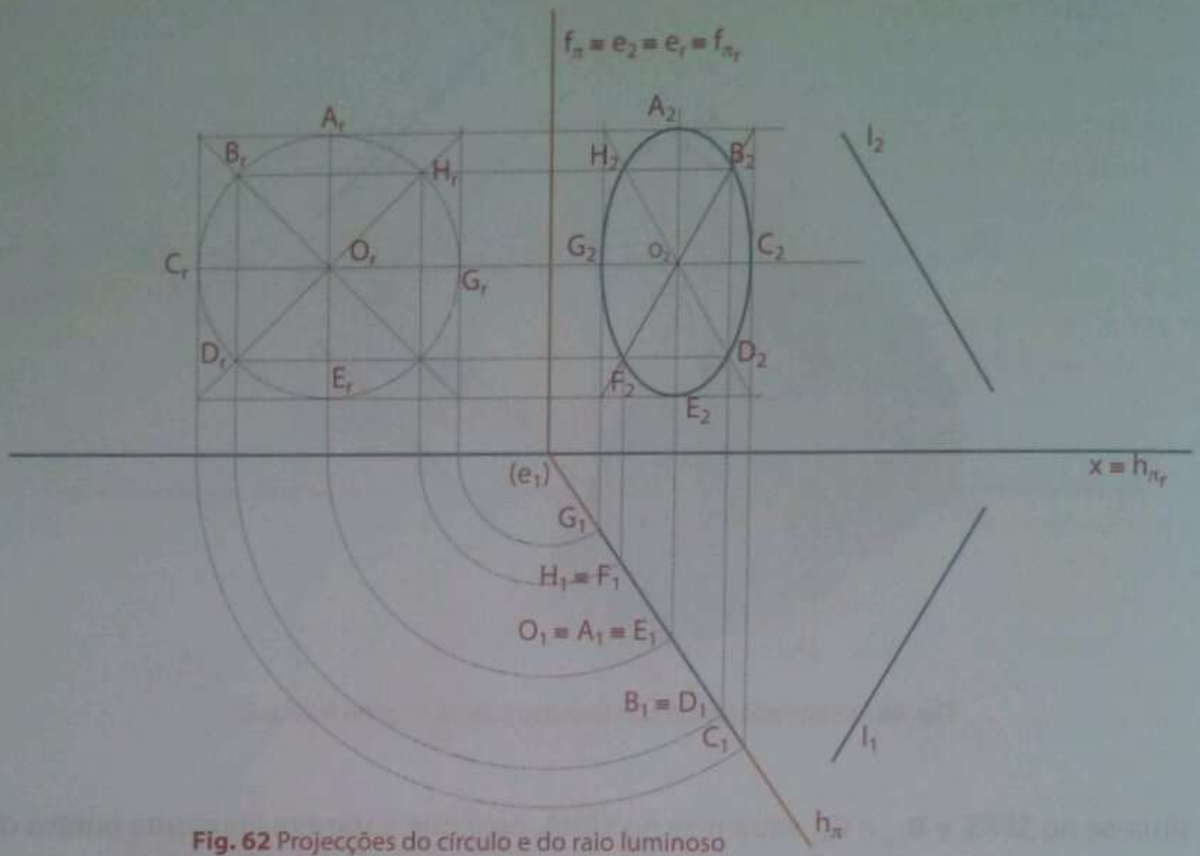


Fig. 62 Projecções do círculo e do raio luminoso

Obviamente, o primeiro passo para a determinação da sombra projectada de um círculo consiste em averiguar a existência de pontos de quebra dessa sombra.

Para a averiguação de pontos de quebra da sombra de um círculo é aconselhável, como já tinha sido dito, o uso do método do plano luz/sombra passante.

Determinam-se as projecções do raio luminoso **l'**, paralelo à **l** e concorrente com o eixo **x**, no ponto **K**. O raio luminoso **l'** e o eixo **x** definem o plano luz/sombra passante, cuja intersecção com o plano π, projectante horizontal, origina a recta **i**. A recta **i** é definida pelos pontos **I** e **T**. O ponto **I** é o ponto de intersecção da recta **l'** com o plano vertical, e o ponto **T** resulta da intersecção do eixo **x** com o mesmo plano π (Fig. 63).

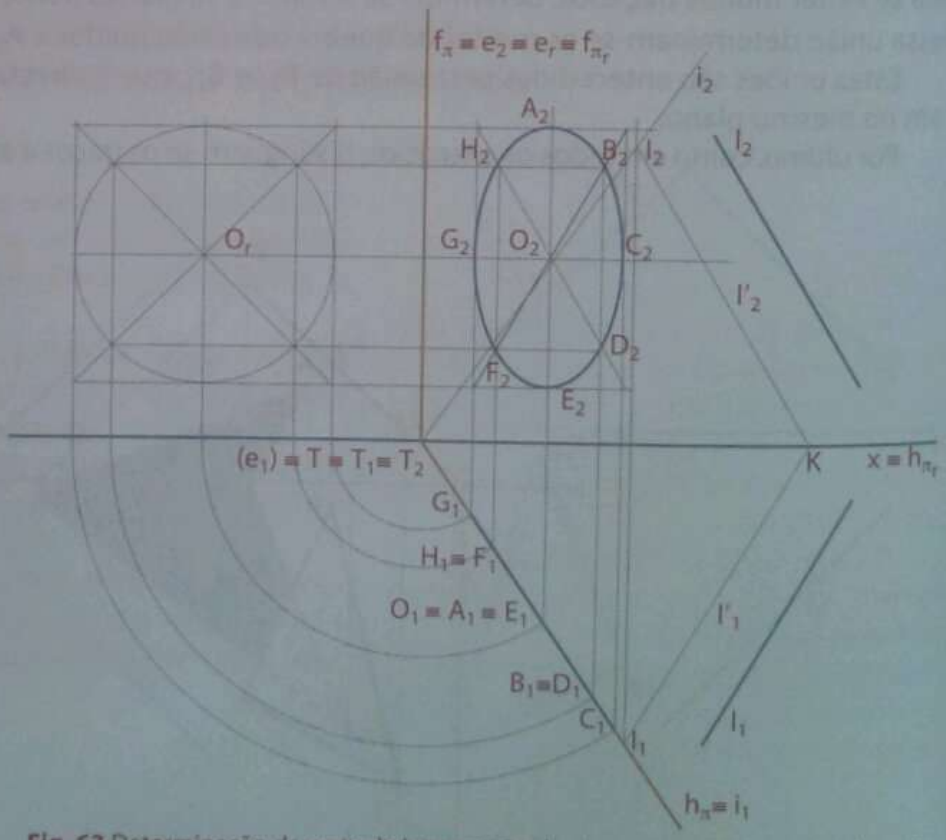


Fig. 63 Determinação da recta de intersecção do plano que contém o círculo com o plano passante luz/sombra.

Conforme o desenho anterior, a recta **i** intersecta a circunferência que delimita o círculo em dois pontos, o que mostra que efectivamente a sombra projectada do círculo apresenta dois pontos de quebra e, consequentemente, essa sombra apresenta-se em ambos os planos de projecção.

A construção de uma elipse não é rigorosa pois é feita à mão levantada, pelo que alguns pontos que se marcam na curva elíptica também não são rigorosos. Assim sendo, para a localização dos pontos **X** e **Z**, de intersecção da recta **i** com o círculo, é necessário recorrer-se à sua construção rigorosa, na base da qual se determinaram as suas projecções, ou seja, efectua-se o rebatimento da recta **i** sobre o mesmo plano onde se rebateu o círculo, e localizam-se os pontos X_r e Z_r.

Efectua-se a inversão do rebatimento dos dois pontos para se obter as suas projecções e, seguidamente, determinam-se as suas sombras X_s e Z_s (Fig. 64).

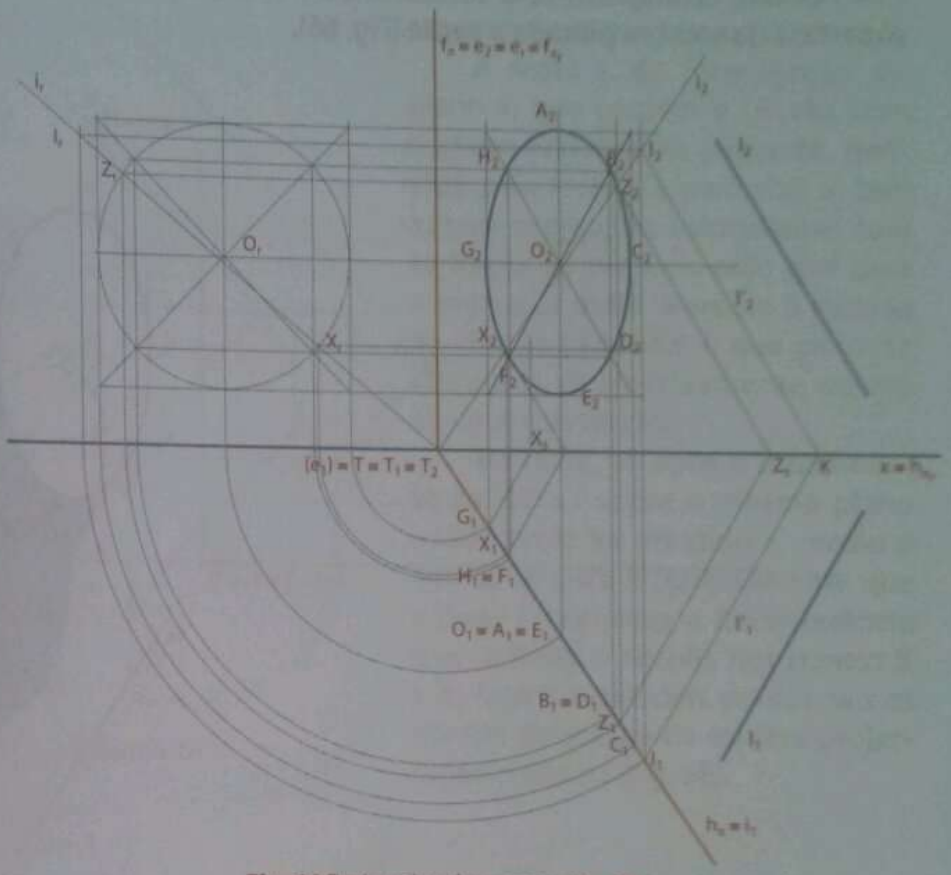


Fig. 64 Projecções dos pontos **X** e **Z** das suas sombras

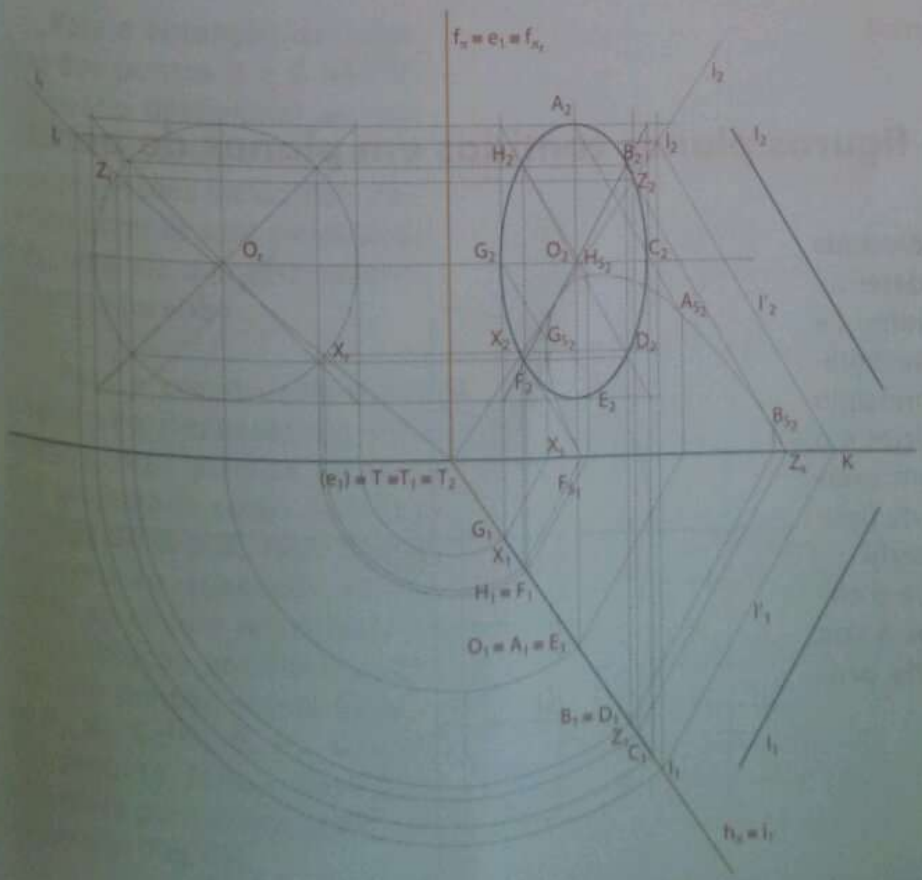


Fig. 65 Determinação do contorno da sombra do SPFS

Como se disse, **X** e **Z** determinam a separação entre a sombra projectada no SPFS e no SPHA.

Determina-se a sombra situada no SPFS, que resulta da determinação das sombras reais dos pontos **G**, **H**, **A** e **B**, nomeadamente G_{s_2}, H_{s_2}, A_{s_2} e B_{s_2}, que se unirão entre si e a X_s e Z_s, pois esses dois pontos são comuns aos dois planos de projecção (Fig. 65).

Determina-se a sombra situada no SPHA, que é resultante da determinação das sombras reais dos pontos **C**, **D**, **E** e **F**, nomeadamente C_{s_1}, D_{s_1}, E_{s_1} e F_{s_1}, que se unirão entre si e a X_s e Z_s.

Por fim, distinguem-se o contorno da sombra representado a traço grosso contínuo vermelho e a superfície da sombra pintada a verde (Fig. 66).

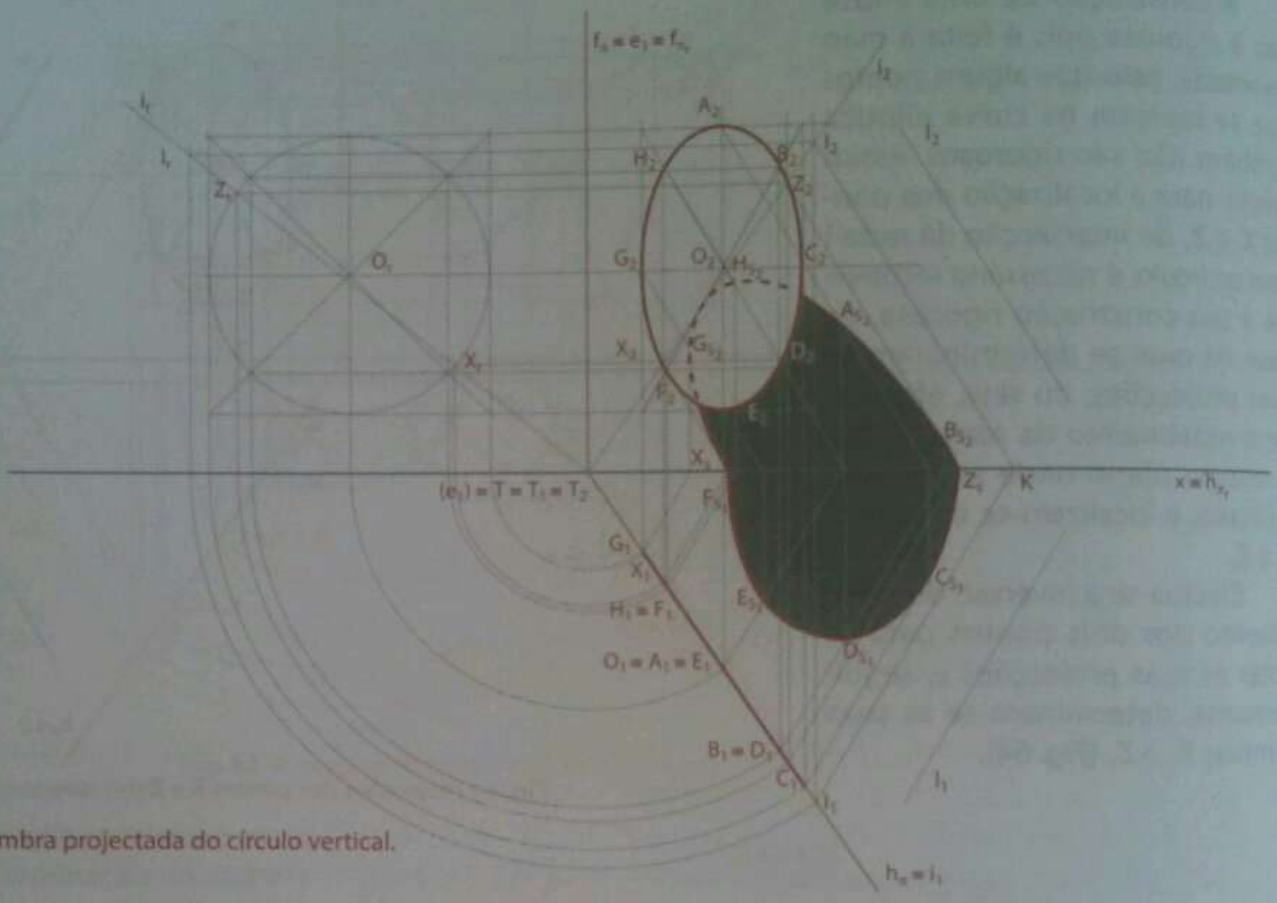


Fig. 66 Sombra projectada do círculo vertical.

Sombra projectada de figuras planas contidas em planos de perfil

A determinação da sombra projectada de uma figura plana consiste em determinar as sombras de um número mínimo de pontos suficientes para a sua representação. Sendo assim, uma vez que o princípio de base para a resolução de exercícios é o mesmo, iremos resolver apenas um exercício relativo à sombra projectada de figuras planas contidas em planos de perfil.

Dada a direcção luminosa l e o círculo de centro O, representemos a sua sombra projectada nos planos de projecção (Fig. 67).

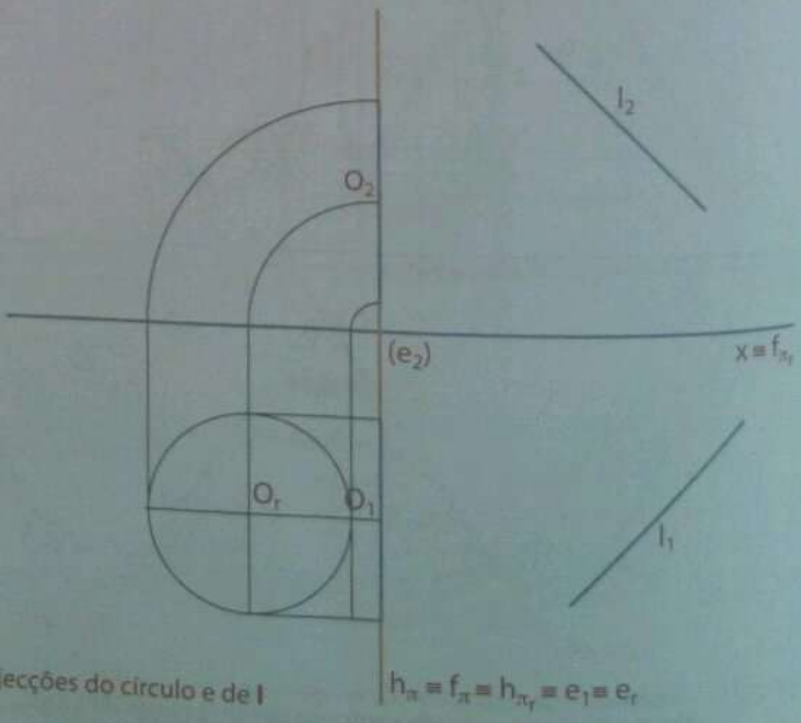


Fig. 67 Projecções do círculo e de **l**

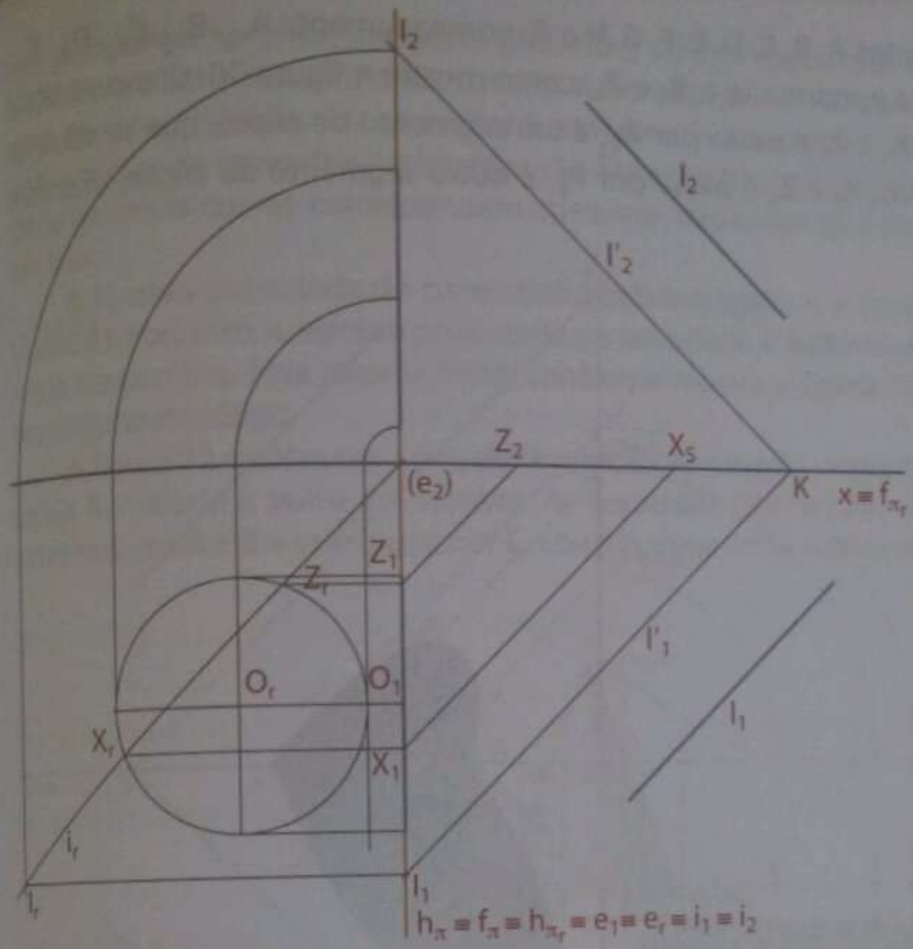


Fig. 68 Projecções dos pontos de quebra

Averiguemos a existência de pontos de quebra através do traçado de um raio luminoso **l'**, paralelo a **l** e concorrente com o eixo **x**, no ponto **K**.

A recta **i**, de intersecção do plano π, que contém o círculo, com o plano luz/sombra passante, definido pela recta **l'** e pelo eixo **x**, tem as suas projecções coincidentes com os traços do plano π, pelo que para a resolução deste exercício o recurso ao círculo rebatido é que permite visualizar se efectivamente ocorre alguma intersecção.

De facto, só após o rebatimento da recta **i** sobre o mesmo plano e lado onde foi rebatido o círculo é que se vê clara e rigorosamente que a recta **i** intersecta a circunferência que delimita o círculo, nos pontos **X** e **Z**. Assim, esses dois pontos são os pontos de quebra da sombra projectada do círculo (Fig. 68).

Para a obtenção das sombras dos pontos **X** e **Z** não foi necessário determinar as suas duas projecções, pois apenas as suas projecções horizontais permitem obter as suas sombras X_s e Z_s, uma vez que esses pontos situam-se no eixo ***x***.

Para a construção duma elipse são necessários, pelo menos, oito pontos (a sombra projectada serão dois segmentos de elipse), pelo que se recorreu ao quadrado envolvente ao círculo rebatido para a distribuição equilibrada dos tais oito pontos, nomeadamente A_r, B_r, C_r, D_r, E_r, F_r, G_r e H_r. Em seguida, foram identificados esses pontos nos planos de projecção (Fig. 69).

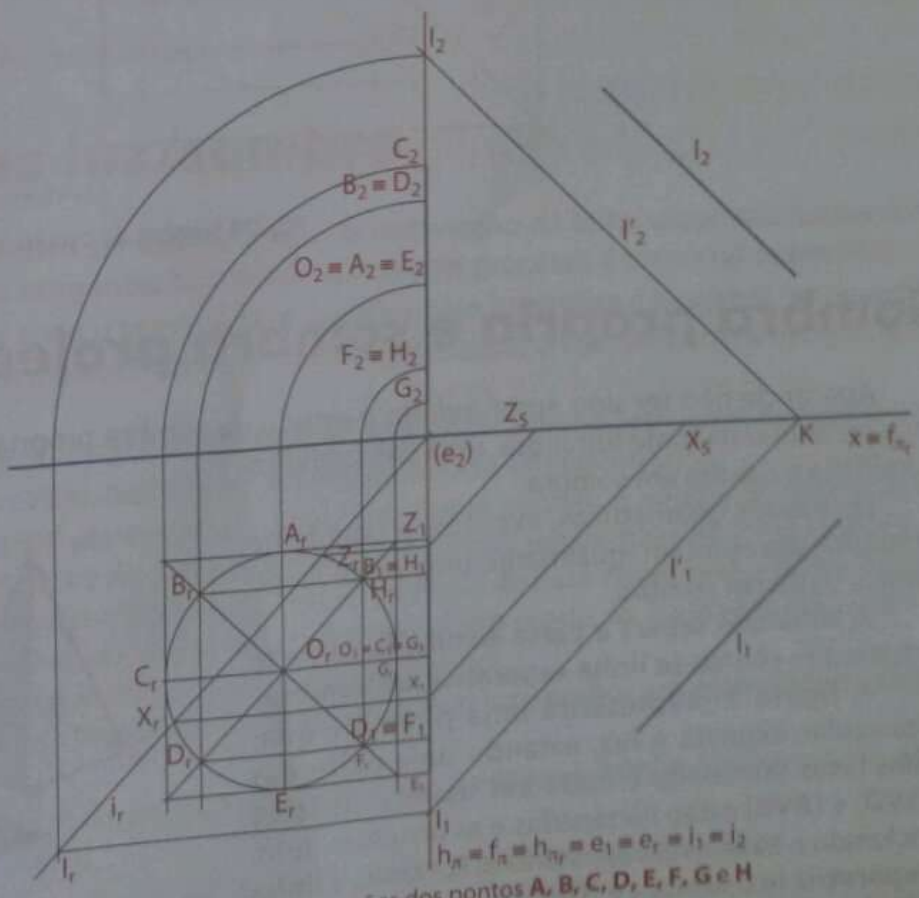


Fig. 69 Projecções dos pontos **A, B, C, D, E, F, G e H**

Determinam-se as sombras dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H** e **G**, nomeadamente A_{s_2}, B_{s_2}, C_{s_2}, D_{s_2}, E_{s_2}, F_{s_1}, G_{s_1} e H_{s_1} e, seguidamente, unem-se juntamente a X_s e Z_s, como mostra a figura 70. Como se pode observar, a curva que tem os extremos X_s e Z_s e passa por A_{s_2} é um segmento de elipse, que se situa no SPFS e a curva com os mesmos extremos, X_s e Z_s e passa por F_{s_1} é outro segmento de elipse, mas este situado no SPHA.

Finalmente, pinta-se a verde a superfície da sombra para facilitar a leitura do desenho e por aqui termina o estudo de sombra própria e sombra projectada nos planos de projecção de figuras planas (Fig. 70).

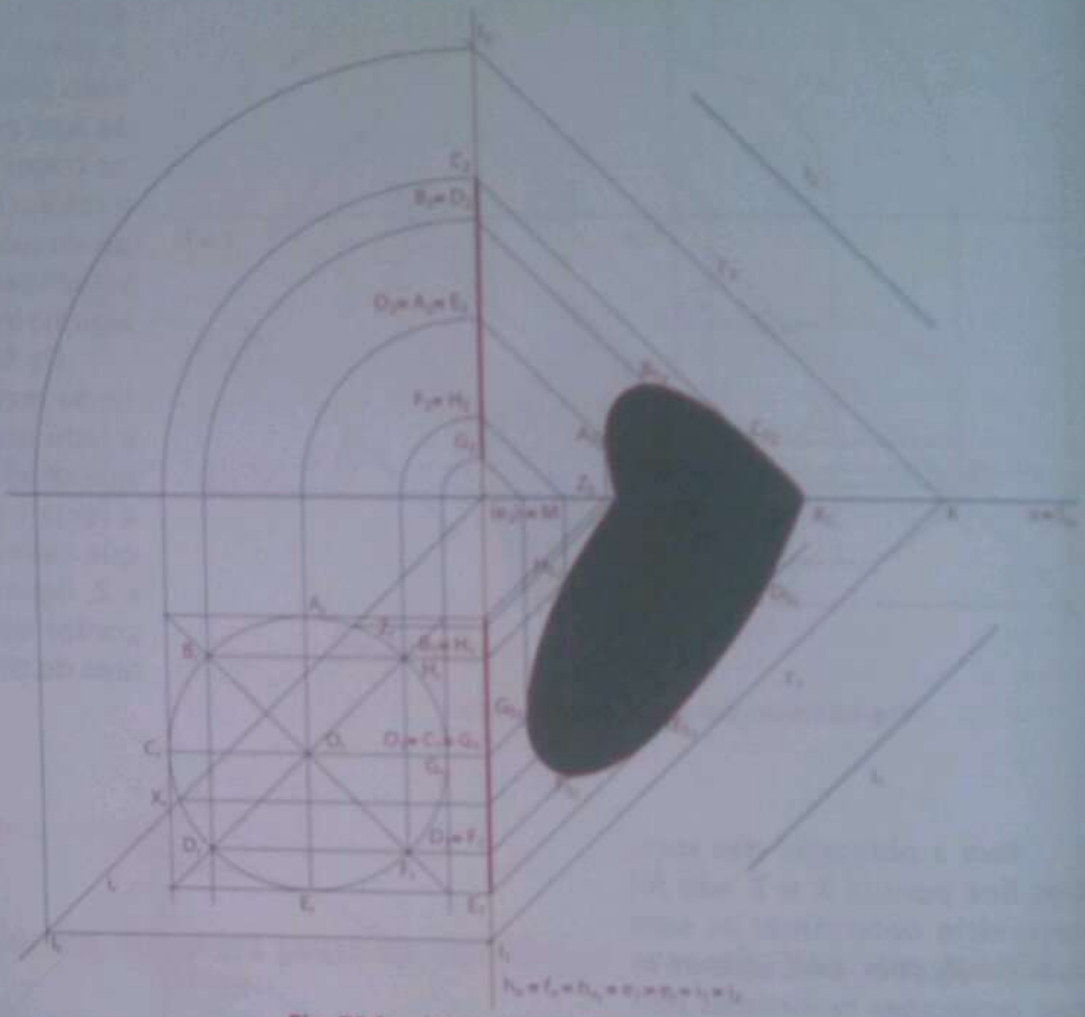


Fig. 70 Sombra do círculo de perfil

Sombra própria e sombra projectada de sólidos

Apesar de não ter sido aprofundado o estudo da sombra própria de figuras planas, ficou a ideia de que, perante uma fonte luminosa, uma das faces fica iluminada e a outra em sombra.

Os sólidos geométricos, expostos a uma fonte luminosa, apresentam igualmente uma parte iluminada e outra em sombra.

A linha que separa a parte iluminada da parte em sombra chama-se **linha separatriz luz/sombra**.

A figura 71 representa uma pirâmide quadrangular exposta à luz, estando uma parte das suas faces iluminada e outra em sombra. As faces [**AVD**] e [**AVB**] estão iluminadas e as restantes duas, incluindo a base, estão em sombra. Portanto, a **linha separatriz luz/sombra** é [**DVBA**].

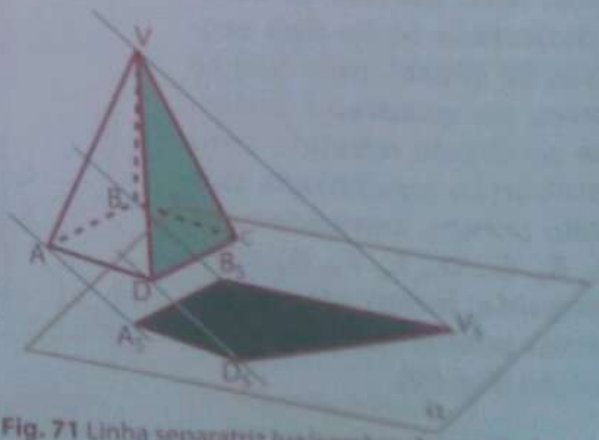


Fig. 71 Linha separatriz luz/sombra dum poliedro

Conforme se pode ver nesta pirâmide, a linha separatriz luz/sombra é uma linha quebrada. Nos poliedros, a linha separatriz luz/sombra é sempre uma linha quebrada, contrariamente ao que acontece com cones e cilindros, em que a linha separatriz luz/sombra é uma linha mista. Nos cones e cilindros, as linhas rectas da separatriz luz/sombra são as geratrizes que separam a parte iluminada da parte sombreada, e as linhas curvas correspondem aos arcos das bases que separam a parte iluminada da parte sombreada.

A sombra projectada do cone abaixo sobre o plano α é contornada pela linha separatriz luz/sombra [AVBCA]. Portanto, a sombra projectada de um sólido é delimitada pela sombra projectada da linha separatriz luz/sombra. Essa mesma linha, conforme mostra a figura 72, é que permite a identificação da sombra própria do sólido.

A figura 72 mostra um cone de revolução iluminado, o que faz com que uma parte da sua superfície esteja iluminada e outra em sombra. As geratrizes [**VA**] e [**VB**], juntamente com o arco da base com os extremos em **A** e **B** e que passa por **C**, constituem a linha separatriz luz/sombra do cone.

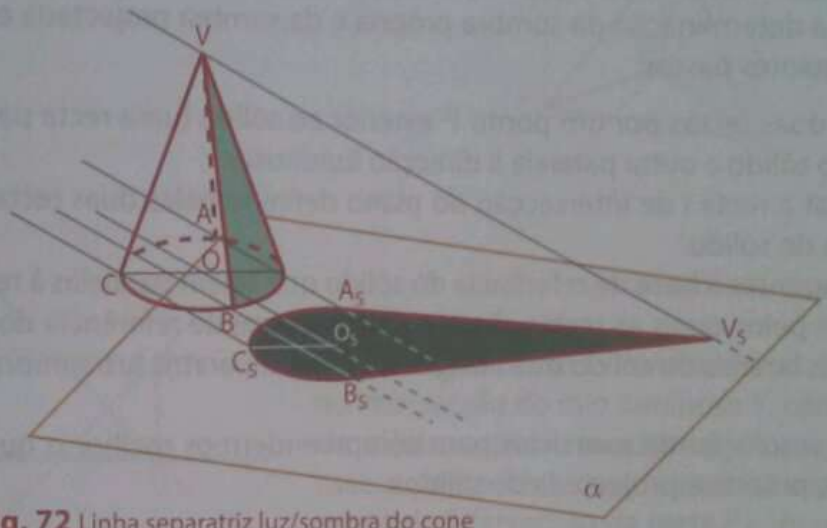


Fig. 72 Linha separatriz luz/sombra do cone

Planos tangentes luz/sombra

Dentre vários métodos que podem ser usados para a determinação da linha separatriz luz/sombra, aconselhamos o recurso aos **planos tangentes luz/sombra**, pois este processo é universal e científico.

Plano tangente luz/sombra é todo o plano que, contendo o raio luminoso, é tangente ou rasante a um sólido ao longo de uma das suas arestas laterais, no caso de poliedros, ou geratriz, no caso de cones e cilindros.

Com efeito, os planos tangentes luz/sombra permitem identificar a linha separatriz luz/sombra, o contorno da sombra projectada do sólido, que é a sombra projectada da tal separatriz.

No caso de cones e pirâmides, os planos separatrizes luz/sombra contêm o vértice do sólido, pelo que esse vértice é um dos pontos da linha de intersecção dos dois planos separatrizes. Essa linha de intersecção dos dois planos é o raio luminoso cuja intersecção com o plano da base determina o ponto **I**. Pelo ponto I passam rectas tangentes à base do sólido determinando, deste modo, as geratrizes (no caso de cones) ou arestas laterais (no caso de pirâmides) separatrizes luz/sombra.

Em resumo, os passos dados para determinar a linha separatriz luz/sombra em pirâmides e cones são quatro, nomeadamente:

1. Conduzir pelo vértice do sólido um raio luminoso l. Esse raio luminoso é a linha de intersecção dos dois planos tangentes luz/sombra.
2. Determinar o ponto I, de intersecção do raio luminoso l, com o plano da base do sólido.
3. Conduzir pelo ponto I rectas tangentes à base do sólido t e t'.

4. Os pontos de tangência das rectas t e t' com a base do sólido definem as geratrizes ou arestas laterais que integram a linha separatriz luz/sombra.

Os procedimentos acima expostos dizem respeito tanto à situação do foco luminoso como à situação da direcção luminosa, enquanto nos cilindros e prismas os procedimentos são diferentes, pelo que faremos apenas a abordagem da direcção luminosa, como já tinha sido dito no início desta unidade temática (não iremos aprofundar o estudo da fonte luminosa situada a uma distância finita).

Assim, nos prismas e cilindros, os planos tangentes luz/sombra são paralelos entre si (quando se trata da direcção luminosa), uma vez que as geratrizes dos cilindros são paralelas entre si, bem como as arestas laterais dos prismas também são paralelas entre si, como também os raios luminosos são paralelos a uma direcção luminosa, contrariamente aos cones e pirâmides em que os planos tangentes luz/sombra concorrem na recta que contém o vértice do sólido.

Portanto, cada um dos planos tangentes luz/sombra pode ser definido por duas rectas, nomeadamente a geratriz (cilindro) ou aresta lateral (prisma) do sólido, e um raio luminoso.

Assim, para a determinação da sombra própria e da sombra projectada em prismas ou cilindros, há que seguir os seguintes passos:

1. Conduzir duas rectas por um ponto P exterior ao sólido (uma recta paralela às geratrizes/arestas laterais do sólido e outra paralela à direcção luminosa).
2. Determinar a recta i de intersecção do plano definido pelas duas rectas com o plano da base de referência do sólido.
3. Traçar tangentes à base de referência do sólido que sejam paralelas à recta i.
4. Os pontos pelos quais as rectas são tangentes à base de referência do sólido definem as geratrizes/arestas laterais do sólido que integram a linha separatriz luz/sombra.

Passemos à resolução de exercícios para compreendermos melhor o que se expôs anteriormente, sobre as sombras, própria e projectada de sólidos.

Sombra própria e sombra projectada de sólidos com bases de nível e de frente

Pirâmides

Determinemos as sombras própria e projectada nos planos de projecção de uma pirâmide triangular regular de base contida no plano horizontal de projecção, tendo em conta a direcção luminosa l dada (Fig. 73).

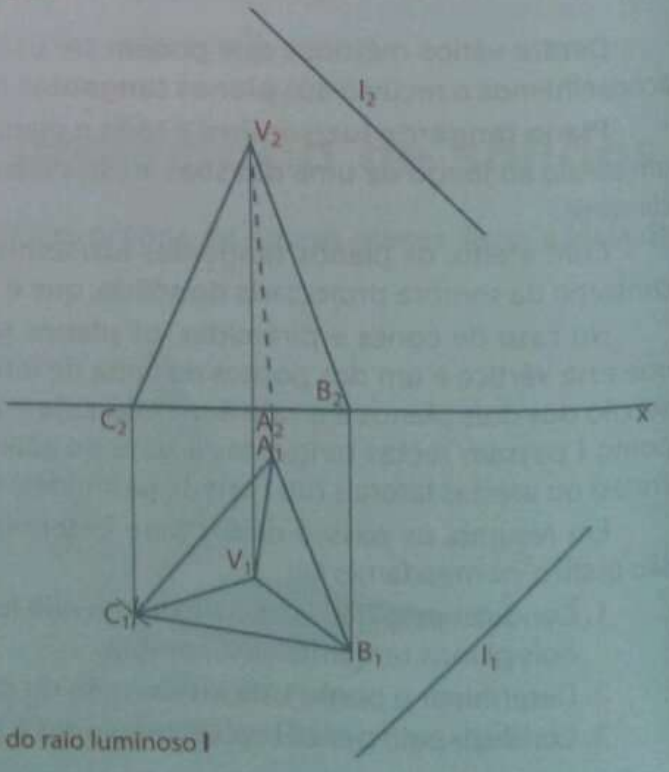


Fig. 73 Projecções da pirâmide e do raio luminoso l

Os procedimentos necessários para a resolução deste exercício já foram explicados, pelo que resta aplicá-los para se obter a solução desejada.

Antes de mais nada, determina-se a linha separatriz luz/sombra, com o recurso aos planos tangentes luz/sombra.

Para o efeito, o primeiro passo consiste em conduzir pelo vértice **V** da pirâmide um raio luminoso **l'** que tenha a direcção luminosa dada (Fig. 74).

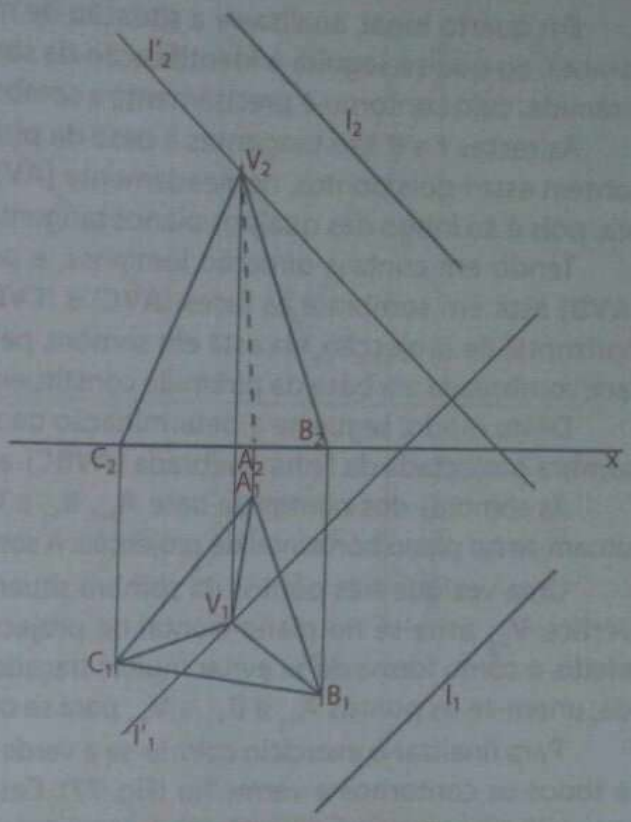


Fig. 74 Projecções de raio **l'**

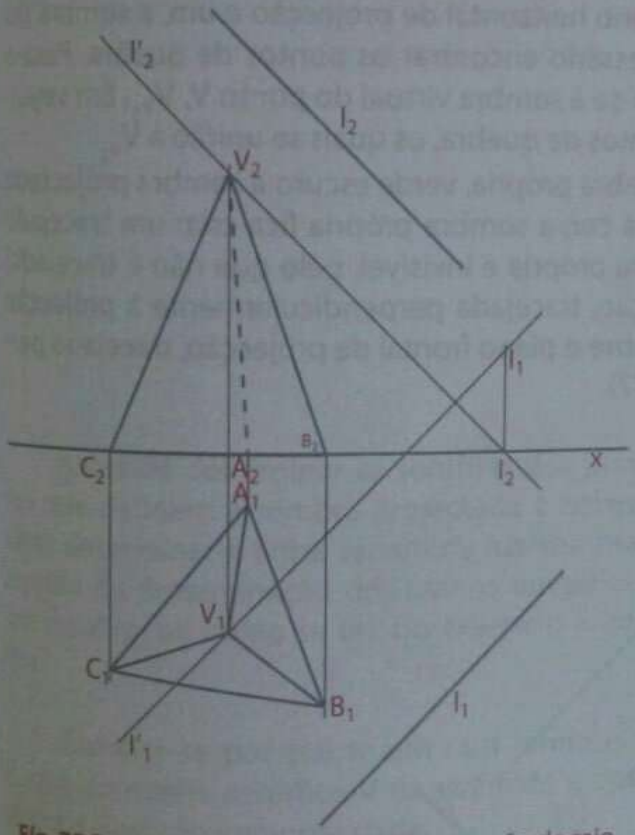


Fig. 75 Determinação do ponto de intersecção do raio **l'** com o plano da base

O segundo passo consiste em determinar o ponto **I** de intersecção do raio luminoso **l'**, com o plano da base do sólido, o plano horizontal de projecção. Para este caso, o ponto **I** é o traço horizontal da recta **l'**, ou seja, o ponto de intersecção da recta **l'** com o plano horizontal de projecção (Fig. 75).

Em terceiro lugar, conduzem-se pelo ponto **I** rectas **t** e **t'**, tangentes à base da pirâmide. Neste exercício, as rectas **t** e **t'** são igualmente traços horizontais dos planos tangentes luz/sombra (Fig. 76).

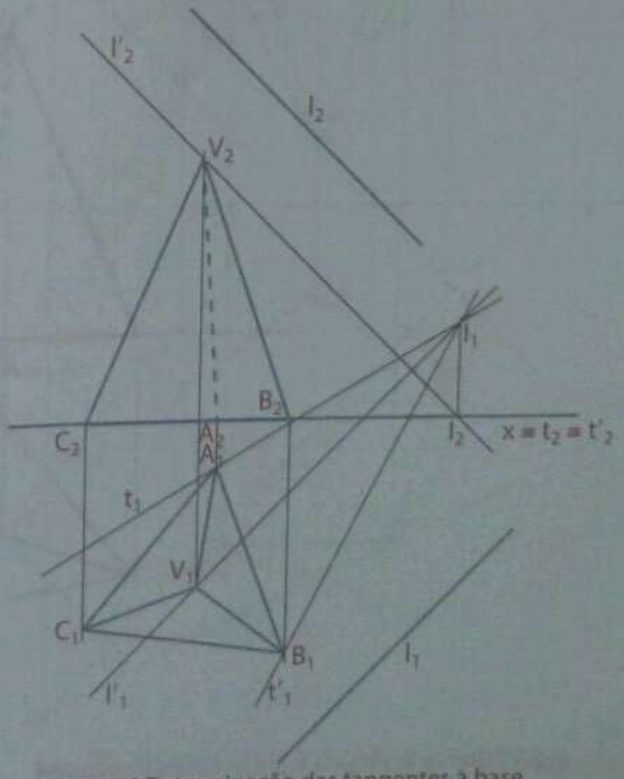


Fig. 76 Determinação das tangentes à base

Em quarto lugar, analisa-se a situação de modo a descobrir-se quais são as arestas separatrizes luz/sombra, ao que se seguirá a identificação da sombra própria e a determinação da sombra projectada da pirâmide, cujo contorno é precisamente a sombra projectada da separatriz luz/sombra.

As rectas **t** e **t'** são tangentes à base da pirâmide, nos pontos **A** e **B**, pelo que as arestas laterais que contêm esses dois pontos, nomeadamente **[AV]** e **[BV]**, são duas das arestas da linha separatriz luz/sombra, pois é ao longo das quais os planos tangentes (luz/sombra) são tangentes à pirâmide.

Tendo em conta a direcção luminosa, e perante as arestas laterais separatrizes luz/sombra, a face **[AVB]** está em sombra e as faces **[AVC]** e **[CVB]** estão iluminadas. Pelo facto de a base estar no plano horizontal de projecção, ela está em sombra, pelo que a linha separatriz luz/sombra é **[AVBC]**. Portanto, a face sombreada e a base da pirâmide constituem a sua sombra própria.

Deste modo, segue-se a determinação da sombra projectada do sólido, através da determinação da sombra projectada da linha quebrada **[AVBC]**, a linha separatriz luz/sombra da pirâmide.

As sombras dos pontos da base A_{s_1}, B_{s_1} e C_{s_1} são coincidentes com os próprios pontos **A**, **B** e **C**, pois situam-se no plano horizontal de projecção. A sombra do vértice V_{s_2} situa-se no plano frontal de projecção.

Uma vez que três pontos da sombra situam-se no plano horizontal de projecção e um, a sombra do vértice V_{s_2} situa-se no plano frontal de projecção, é necessário encontrar os pontos de quebra. Para o efeito, e como forma de se evitar muitos traçados, recorreu-se à sombra virtual do ponto **V**, V_{v_1}. Em seguida, unem-se os pontos A_{s_1} e B_{s_1}, a V_{v_1} para se obter os pontos de quebra, os quais se unirão à V_{s_2}.

Para finalizar o exercício coloriu-se a verde claro a sombra própria, verde escuro a sombra projectada e todos os contornos a vermelho (Fig. 77). Caso não use a cor, a sombra própria fica com um tracejado paralelo ao eixo **x** (no plano frontal de projecção a sombra própria é invisível, pelo que não é tracejada) a sombra projectada sobre o plano horizontal de projecção, tracejada perpendicularmente à projecção horizontal da direcção luminosa, e a sombra projectada sobre o plano frontal de projecção, tracejado perpendicular à projecção frontal da direcção luminosa (Fig. 77).

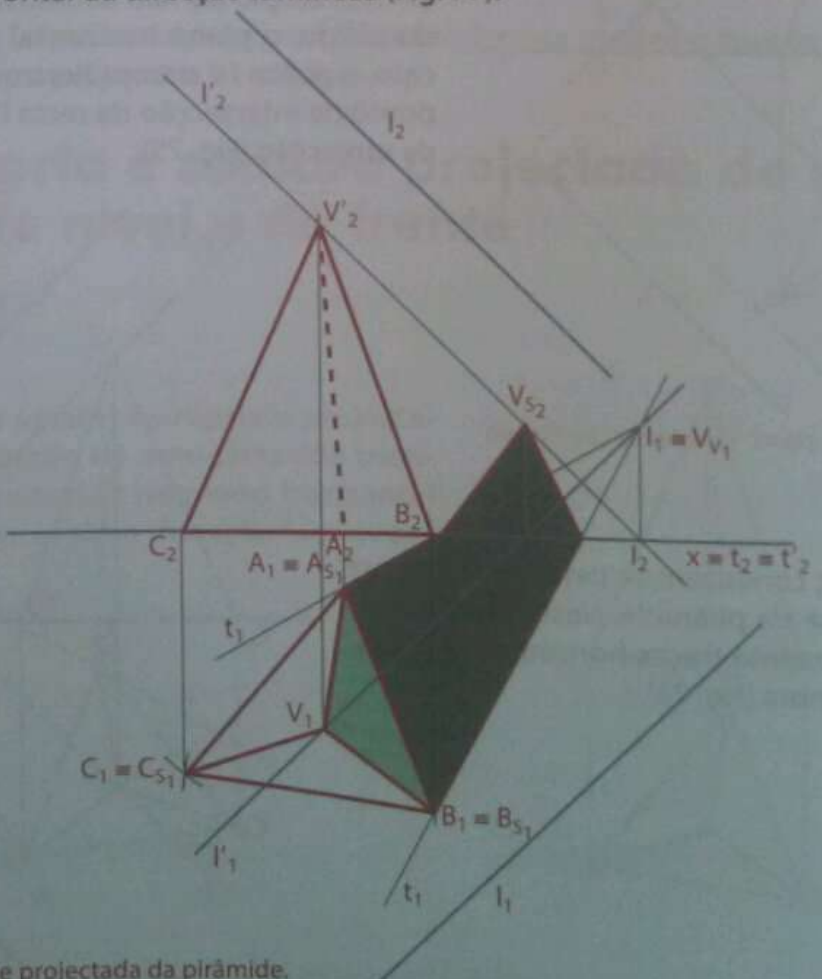


Fig. 77 Sombras própria e projectada da pirâmide.

Passemos a determinar as sombras própria e projectada nos planos de projecção de uma pirâmide pentagonal regular, de base com cota superior à do vértice, considerando a direcção luminosa l dada (Fig. 78).

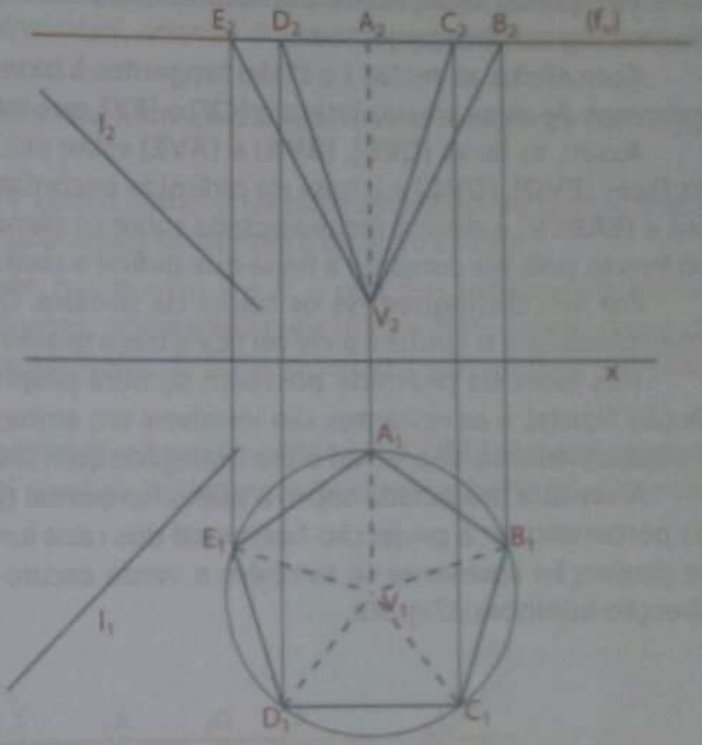


Fig. 78 Projecções da pirâmide e da direcção luminosa

Antes de determinar as sombras dos pontos que definem a sombra projectada é necessário determinar a linha separatriz luz/sombra, através da determinação dos planos tangentes luz/sombra, tal como se fez no exercício anterior.

Começa-se por traçar um raio luminoso l', que contenha o vértice **V** da pirâmide e que tenha a direcção luminosa dada.

Seguidamente, determina-se o ponto **I** de intersecção do raio luminoso **l'** com o plano ν, horizontal ou de nível, da base da pirâmide.

Em terceiro lugar, conduzem-se pelo ponto **I** rectas **t** e **t'** tangentes à base da pirâmide (Fig. 79).

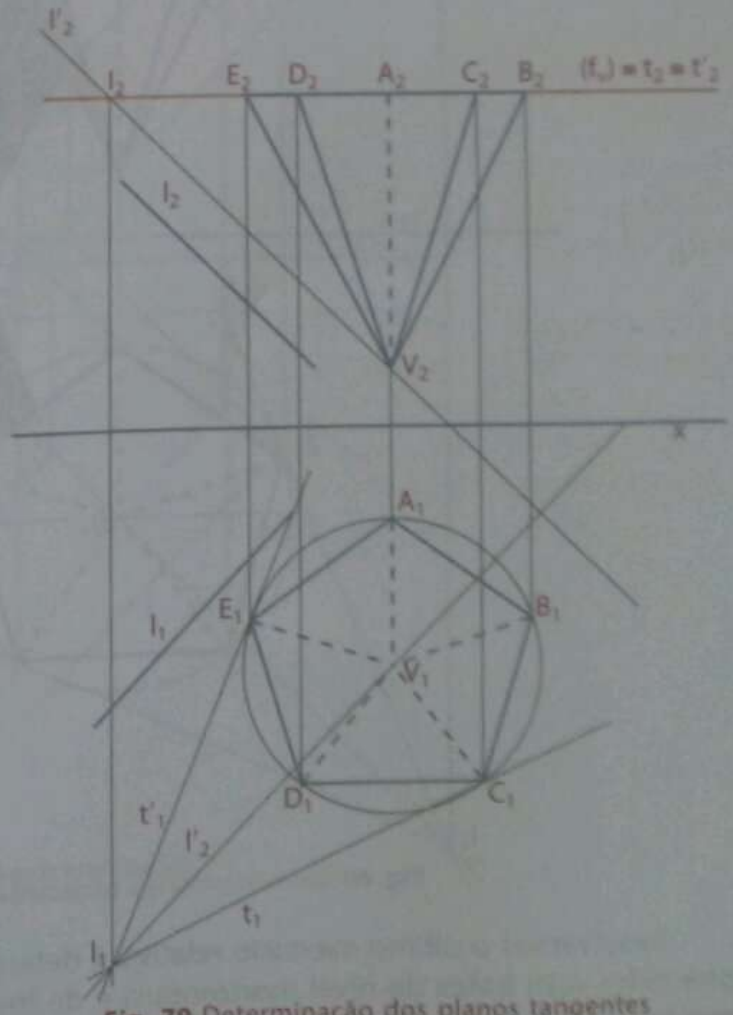


Fig. 79 Determinação dos planos tangentes luz/sombra

Em quarto lugar, faz-se um estudo que permite identificar a sombra própria da pirâmide e determina-se a sua sombra projectada.

Com efeito, as rectas **t** e **t'** são tangentes à base pelos pontos **C** e **E**, ou seja, esses dois pontos são os extremos de duas arestas laterais, **[CV]** e **[EV]**, que integram a linha separatriz luz/sombra.

Assim, as faces **[CVB]**, **[BVA]** e **[AVE]** estão em sombra, constituindo a sombra própria da pirâmide. As faces **[EVD]**, **[DVC]** e a base da pirâmide encontram-se iluminadas. Portanto, a linha separatriz luz/sombra é **[EABCV]** e deverá ser projectada sobre os planos de projecção para se obter a sombra projectada da pirâmide, pois ela constitui a linha que define o contorno dessa sombra.

Por fim, distinguem-se os traços da sombra. O contorno invisível fica representado a traço grosso interrompido, e o contorno visível fica a traço grosso contínuo.

Três faces da pirâmide possuem sombra própria; no entanto, apenas uma, **[BVC]**, é visível em projecção frontal, e as restantes são invisíveis em ambas as projecções. Portanto, a face **[BVC]**, em projecção frontal, apresenta-se a verde claro (tracejado com linhas paralelas ao eixo **x**).

A sombra projectada sobre o plano horizontal de projecção representa-se a verde escuro (um tracejado perpendicular à projecção horizontal dos raios luminosos), e a sombra projectada sobre o plano frontal de projecção apresenta-se também a verde escuro (um tracejado perpendicular à projecção frontal da direcção luminosa) (Fig. 80).

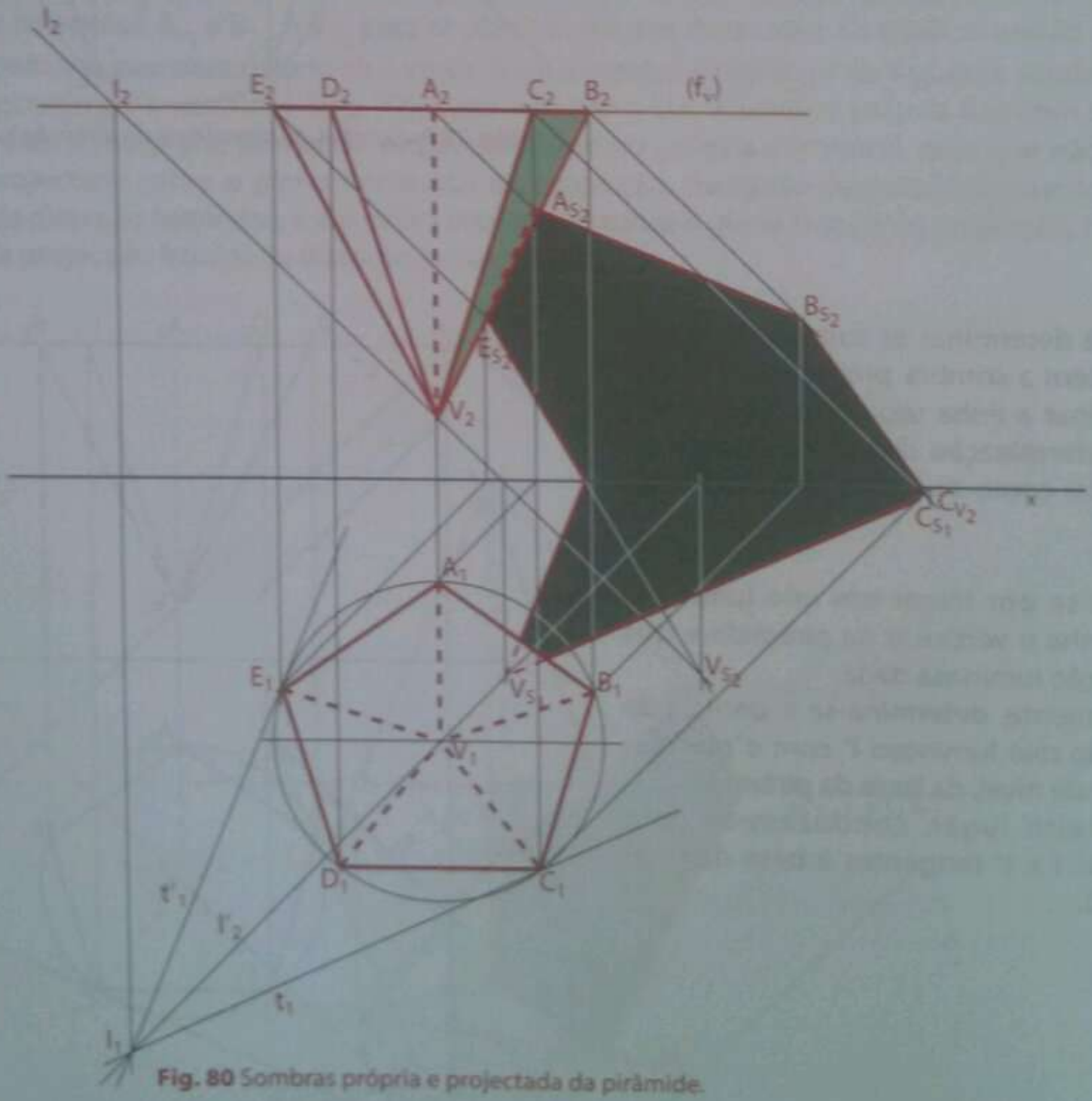


Fig. 80 Sombras própria e projectada da pirâmide.

Resolvamos o último exercício relativo à determinação da sombra própria e sombra projectada de pirâmides com bases de nível (horizontais) e de frente (frontais). **A pirâmide é hexagonal regular e a sua base é frontal. A direcção luminosa é a convencional.**

Seguem-se rigorosamente os mesmos passos que os dos dois exercícios anteriores, nomeadamente começando por se determinar a linha separatriz luz/sombra, através do uso dos planos tangentes luz/sombra.

Conduz-se pelo ponto **V**, vértice da pirâmide, um raio luminoso **l'**, que tenha a direcção luminosa convencional, conforme os dados do exercício.

Determina-se o ponto **I**, de intersecção da recta **l'** com o plano φ, da base do sólido, ao que se segue o traçado de rectas **t** e **t'** que contenham o ponto **I**, e que sejam tangentes à base do sólido.

As rectas **t** e **t'** são tangentes à base da pirâmide, nos pontos **B** e **E**, o que nos faz concluir que as arestas laterais da pirâmide que contenham esses pontos, nomeadamente **[BV]** e **[EV]**, fazem parte da linha separatriz luz/sombra. As outras arestas que fazem parte da linha separatriz luz/sombra são **[AB]**, **[FA]** e **[EF]**, da base da pirâmide.

Assim, tendo em conta o exposto e a direcção luminosa, a base do sólido **[ABCDEF]** está em sombra, e as faces **[BVC]**, **[CVD]** e **[DVE]** estão igualmente em sombra. As restantes faces estão iluminadas, nomeadamente **[EVF]**, **[FVA]** e **[AVB]** (Fig. 81).

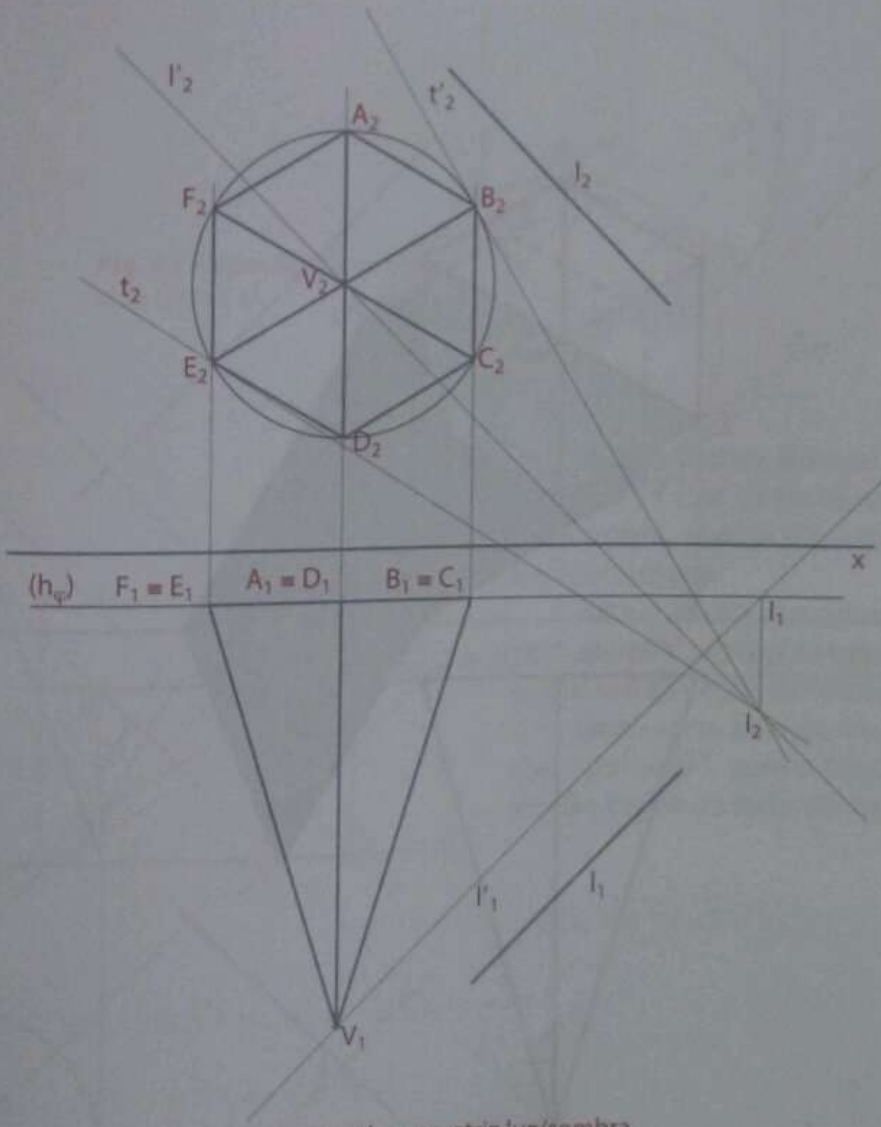


Fig. 81 Determinação da separatriz luz/sombra

Determina-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra, **[ABVEF]**, nomeadamente **[$A_{s_2}B_{s_2}V_{s_1}E_{s_2}F_{s_2}$]**.

De todos os pontos que definem a sombra projectada, V_{s_1} é o único que se encontra num plano diferente do dos outros pontos, pelo que se optou por se determinar a sua sombra virtual, V_{v_2}, de modo a facilitar a união dos pontos e encontrar os pontos de quebra.

Note que, pelo facto de a base do sólido ter a sua sombra no plano a que é paralelo, as sombras dos lados dessa base que fazem parte da linha separatriz luz/sombra são paralelas e geometricamente iguais aos próprios lados.

Por fim, pintam-se as sombras. Em projecção frontal, todas as faces em sombra são visíveis (excepto a base) pelo que estarão a verde claro, enquanto em projecção horizontal não será pintada, porque a sombra própria não é visível nessa projecção.

A sombra projectada nos planos de projecção não é totalmente visível no plano frontal de projecção devido à sobreposição com a projecção frontal da pirâmide, pelo que a parte visível fica a verde escuro (Fig. 82).

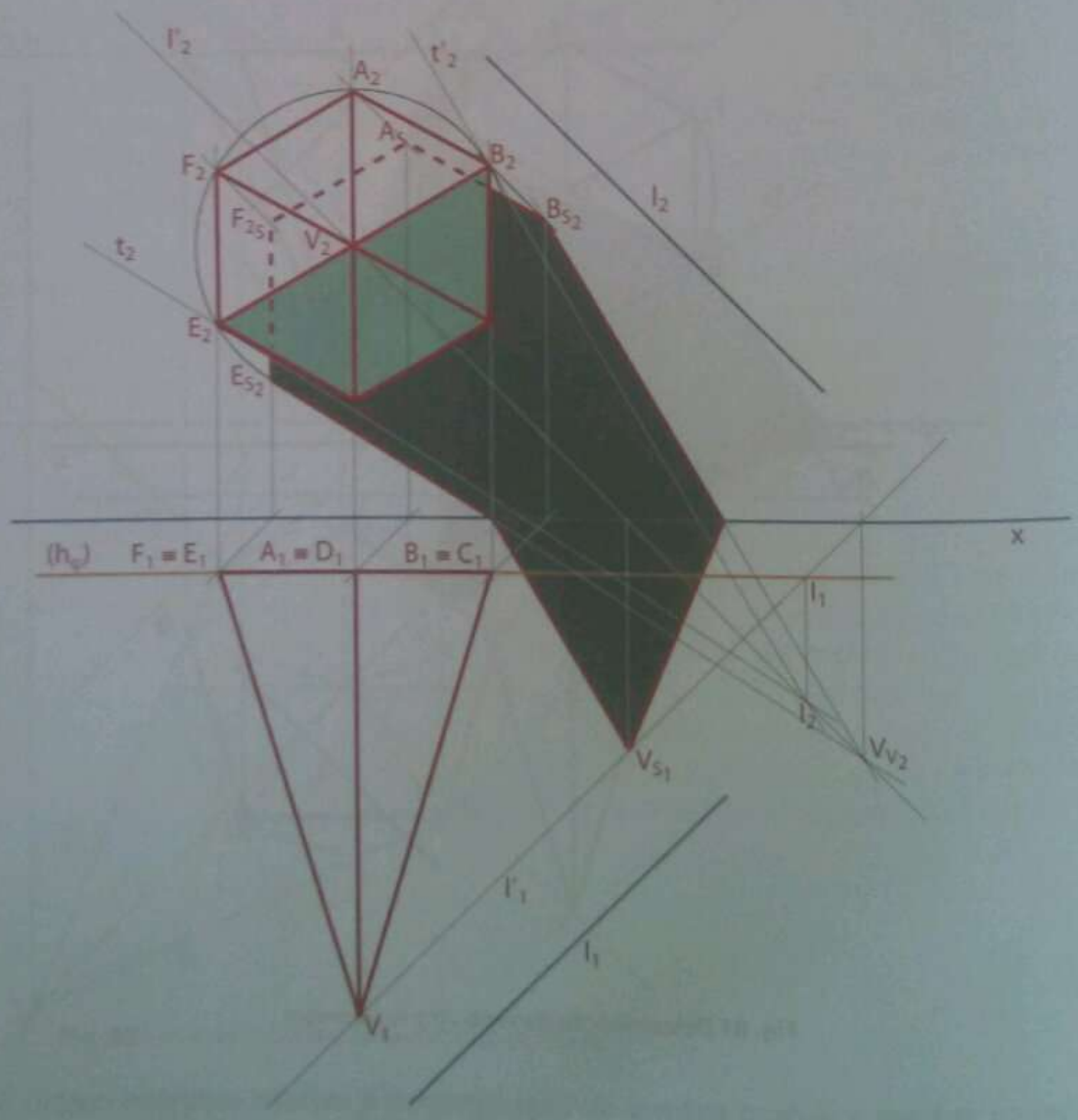


Fig. 82 Sombras própria e projectada da pirâmide de base ou frente.

Cones

A determinação de sombras própria e projectada nos planos de projecção de cones tem como recurso, tal como nas pirâmides, os planos tangentes luz/sombra, e segue os mesmos passos para se determinar a linha separatriz luz/sombra.

Devido a essa similaridade, iremos resolver apenas dois problemas, em que o primeiro consistirá em **determinar, tendo em conta a direcção luminosa convencional, as sombras própria e projectada nos planos de projecção de um cone de revolução de base contida no plano horizontal de projecção (Fig. 83).**

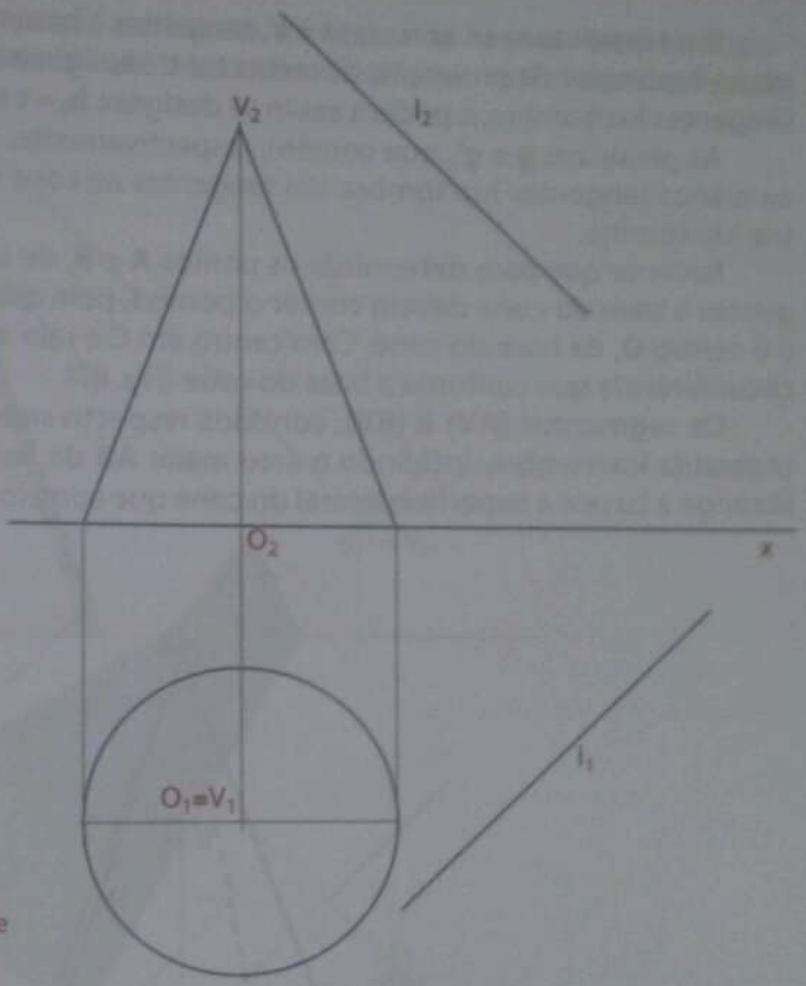
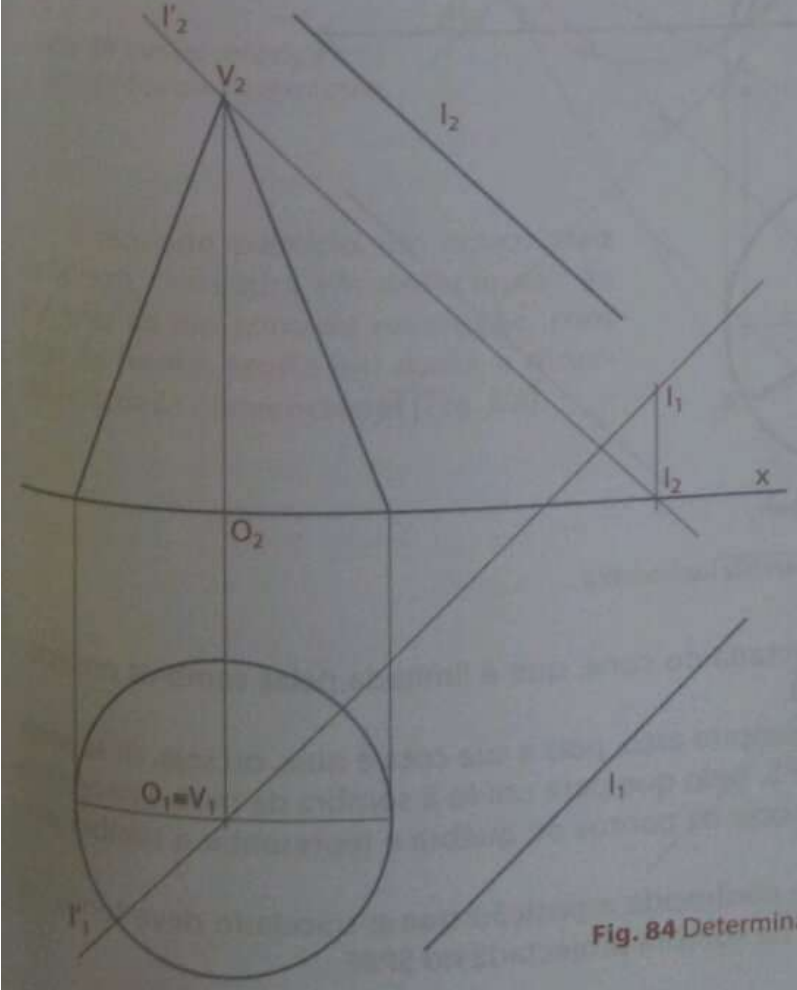


Fig. 83 Projecções do cone e da recta **l**



À semelhança do que se fez nas pirâmides, começa-se por determinar a linha separatriz luz/sombra, com o recurso aos planos tangentes luz/sombra.

Para o efeito, em primeiro lugar, conduz-se pelo ponto **V**, vértice do cone, um raio luminoso **l'** paralelo à direcção luminosa dada.

Determina-se o ponto **I**, de intersecção do raio luminoso **l'** com o plano horizontal de projecção, plano da base do cone (Fig. 84).

Fig. 84 Determinação do ponto **I**

Por **I** conduzem-se as rectas **t** e **t'**, tangentes à base do cone. Pelo facto de a base do cone situar-se no plano horizontal de projecção, as rectas **t** e **t'** são igualmente traços horizontais dos planos δ e δ_1, planos tangentes luz/sombra, e podem assim se designar, $h_\delta \equiv t$ e $h_{\delta_1} \equiv t'$ ou simplesmente h_δ e $h_{\delta 1}$.

As geratrizes **g** e **g'**, que contêm, respectivamente, os pontos **A** e **B**, são as geratrizes sobre as quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes ao cone e, por conseguinte, fazem parte da linha separatriz luz/sombra.

Recorde que para determinar os pontos **A** e **B**, de tangência, há um procedimento rigoroso. As tangentes à base do cone devem conter o ponto **I**, pelo que se determina o ponto **C**, médio entre o ponto I e o centro **O**, da base do cone. Com centro em **C** e raio até **O**, traça-se um arco que intersecta em **A** e **B** a circunferência que contorna a base do cone (Fig. 85).

Os segmentos [**AV**] e [**BV**], contidos respectivamente nas geratrizes **g** e **g'**, fazem parte da linha separatriz luz/sombra, incluindo o arco maior $\overset{\frown}{AB}$ da base do cone. Portanto, a sombra própria do cone abrange a base e a superfície lateral do cone que corresponde ao arco menor $\overset{\frown}{AB}$.

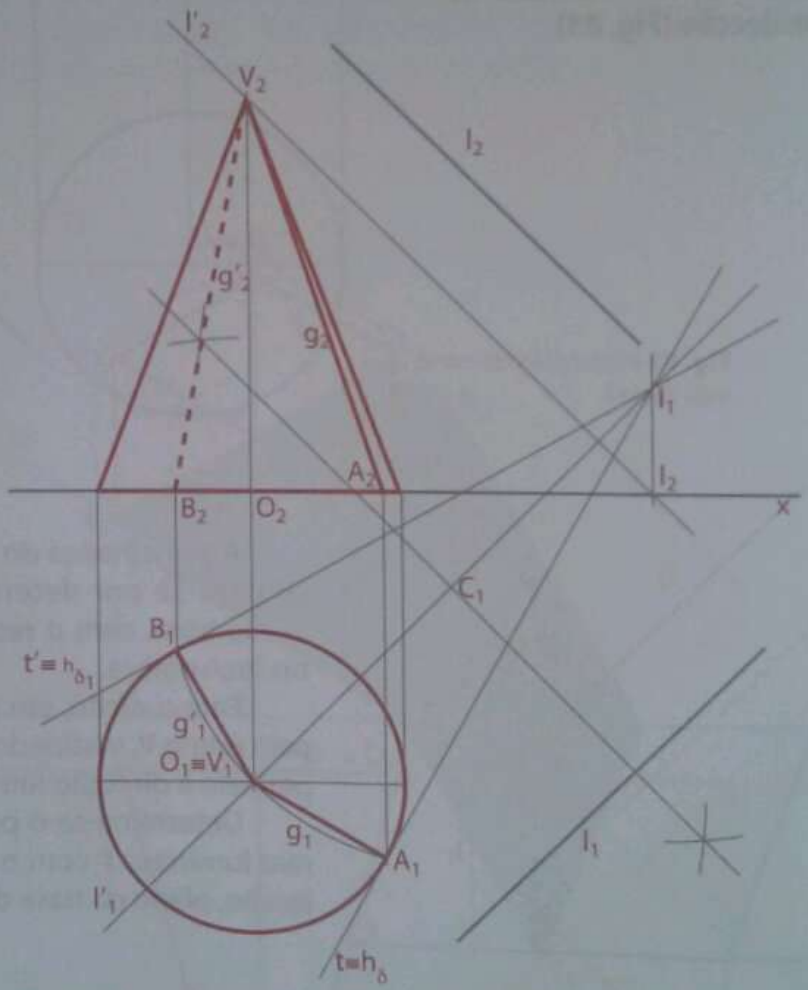


Fig. 85 Determinação da separatriz luz/sombra

Seguidamente, determina-se a sombra projectada do cone, que é limitada pelas sombras projectadas dos segmentos [**AV**] e [**BV**] e do arco maior $\overset{\frown}{AB}$.

A sombra do arco maior $\overset{\frown}{AB}$ coincide com o próprio arco, pois a sua cota é nula, ou seja, situa-se no SPHA. O vértice do cone tem a sua sombra no SPFS, pelo que para uni-lo à sombra da base é necessário recorrer-se à sombra virtual, V_{v_1}, de modo a conhecer os pontos de quebra e representar a sombra projectada sobre os dois semi-planos.

Relativamente ao traçado, já é sobejamente conhecida a posição que o tracejado deve tomar na sombra própria, na sombra projectada no SPHA, e na sombra projectada no SPFS.

Note que a sombra própria do cone, em projecção horizontal, é invisível na base e visível na superfície cónica em sombra. Em projecção frontal, a sombra própria do cone é apenas visível numa pequena parte como mostra a figura (Fig. 86).

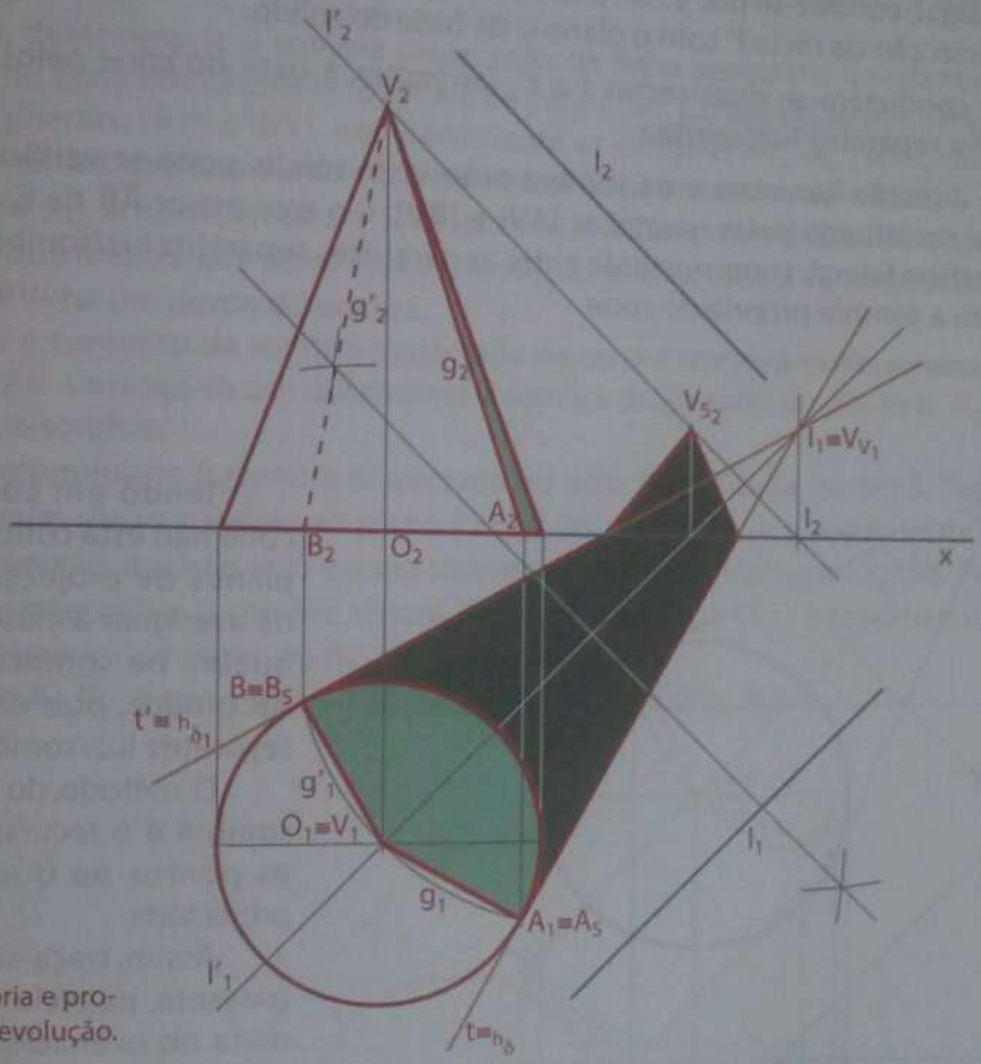


Fig. 86 Sombra própria e projectada do cone de revolução.

O segundo exercício, um pouco mais complexo, consistirá em **determinar as sombras de um cone de revolução, com base de frente, tendo em conta a direcção luminosa convencional (Fig. 87).**

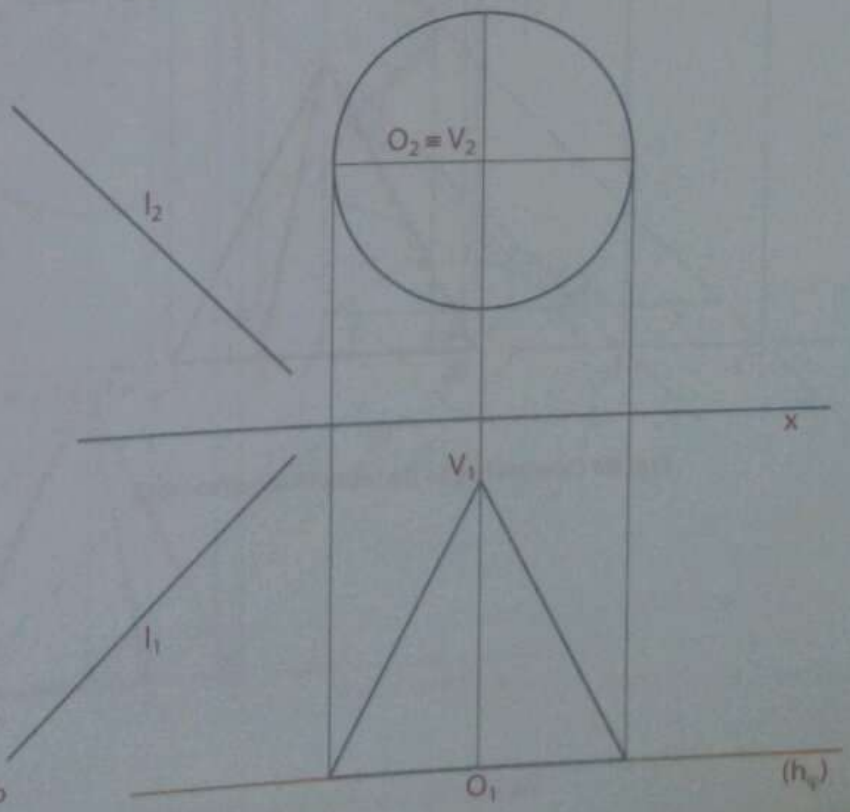


Fig. 87 Pojecções do cone e de l

Tal como no exercício que acabámos de resolver, a primeira etapa consiste em determinar-se a linha separatriz luz/sombra, recorrendo-se aos planos tangentes luz/sombra.

Em primeiro lugar, conduz-se por **V**, vértice do cone, um raio luminoso **l'** e segue-se a determinação do ponto I, de intersecção da recta **l'** com o plano φ da base do sólido.

Pelo ponto I, conduzem-se duas rectas **t** e **t'**, tangentes à base do cone pelos pontos **A** e **B**, que fazem parte da linha separatriz luz/sombra.

Com base na direcção luminosa e na sombra própria do sólido, pode-se verificar que a linha separatriz luz/sombra é constituída pelas geratrizes **[AV]** e **[BV]**, e o arco maior $\overset{\frown}{AB}$ da base, pois a base está iluminada e a superfície lateral, compreendida entre as geratrizes separatriz luz/sombra e o arco maior $\overset{\frown}{AB}$ da base, constituem a sombra própria do cone.

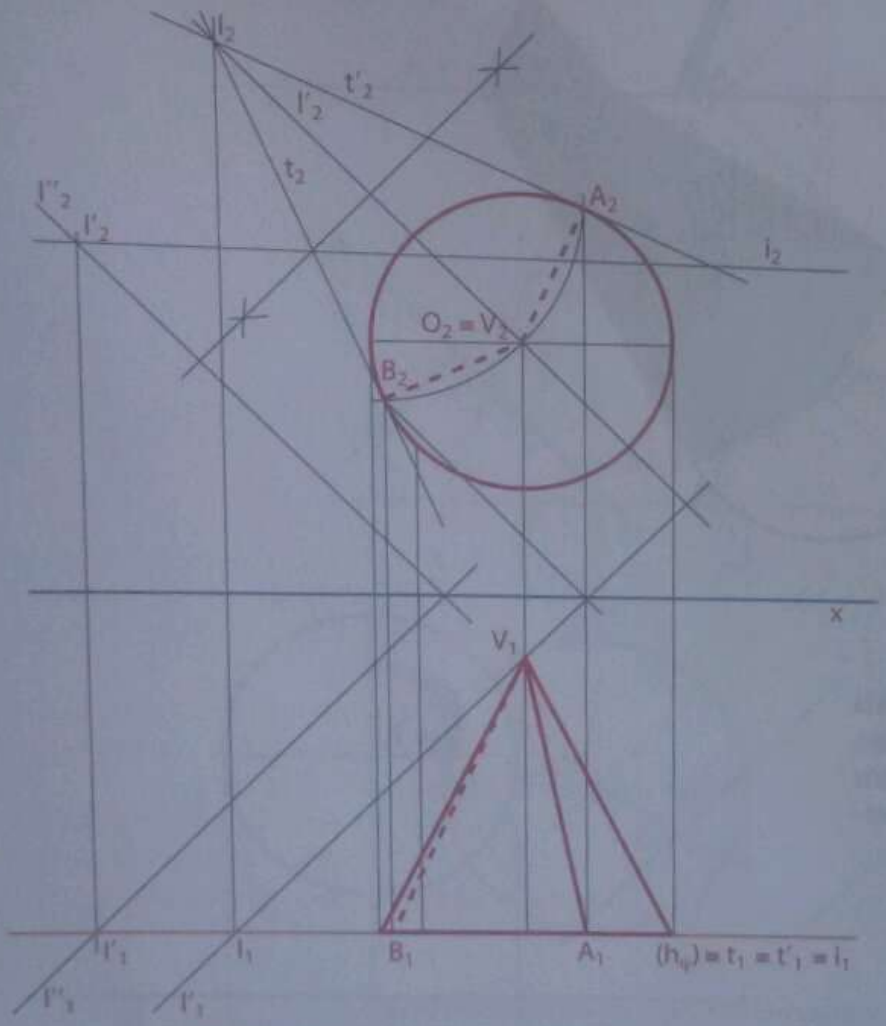


Fig. 88 Determinação da separatriz luz/sombra

Tendo em conta que a base do cone não está contida em nenhum dos planos de projecção, há necessidade de averiguar a existência de pontos de quebra na sombra que o arco maior $\overset{\frown}{AB}$ produz, pois ele faz parte da linha separatriz luz/sombra.

O método do plano passante luz/sombra é o recurso para se encontrar os pontos de quebra duma sombra projectada.

Assim, traça-se o raio luminoso **l''**, passante, paralelo à direcção luminosa dada no exercício, direcção luminosa convencional.

A recta **l''** intersecta o plano φ, da base do sólido, dando origem ao ponto **I'**. Por esse ponto, **I'**, traça-se a recta **i**, de intersecção do plano φ, da base do cone, com o plano passante luz/sombra. A recta **i** é fronto-horizontal, pois resulta da intersecção dum plano passante com um plano paralelo a um dos planos de projecção, neste caso ao plano frontal de projecção (Fig. 88).

A recta **i** intersecta o arco que faz parte da linha separatriz luz/sombra, no ponto **K**, o que nos leva a concluir que esse arco produz sombra em ambos os planos de projecção, pois apresenta um ponto de quebra.

Assim, a parte do arco maior $\overset{\frown}{AB}$, que produz sombra no SPHA é o arco $\overset{\frown}{KB}$, e a que produz sombra no SPFS é o arco $\overset{\frown}{AK}$.

Seguidamente, determina-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra, para se obter a sombra projectada do cone nos planos ortogonais de projecção. Comecemos por determinar as sombras projectadas dos segmentos [**AV**] e [**BV**], nomeadamente as sombras A_{s_2}, B_{s_1}, e V_{s_2} dos pontos que definem esses dois segmentos que fazem parte das geratrizes separatrizes luz/sombra.

Os pontos A_{s_2} e V_{s_2} encontram-se no SPFS, pelo que a sua união é directa, enquanto o ponto B_{s_1} situa-se no SPHA, o que implica que a sua união com V_{s_2} exija o recurso à V_{v_1}, sombra virtual do ponto **V**, pois no segmento [**BV**] há um ponto de quebra.

Para completar o contorno da sombra projectada do cone é necessário determinar a sombra projectada do arco maior $\overset{\frown}{AB}$. Começa-se por determinar a sombra projectada do ponto **K**, K_s, ponto de quebra do arco separatriz luz/sombra.

Em seguida, determina-se a sombra projectada do arco $\overset{\frown}{AK}$, situada no SPFS. Tendo em conta que o arco $\overset{\frown}{AK}$ se situa num plano paralelo ao plano frontal de projecção, e a sua sombra $A_{s_2}K_{s_2}$ situa-se no plano frontal de projecção, então o arco e a sua sombra são geometricamente iguais. Portanto, nada mais rigoroso do que se determinar a sombra virtual do centro do arco, O_{v_2}, e traçar-se uma circunferência com centro nesse ponto, e raio até K_s ou A_{s_2}.

Portanto, o arco $\overset{\frown}{A_{s_2}K_{s_2}}$ é geometricamente igual ao arco $\overset{\frown}{AK}$ (Fig. 89).

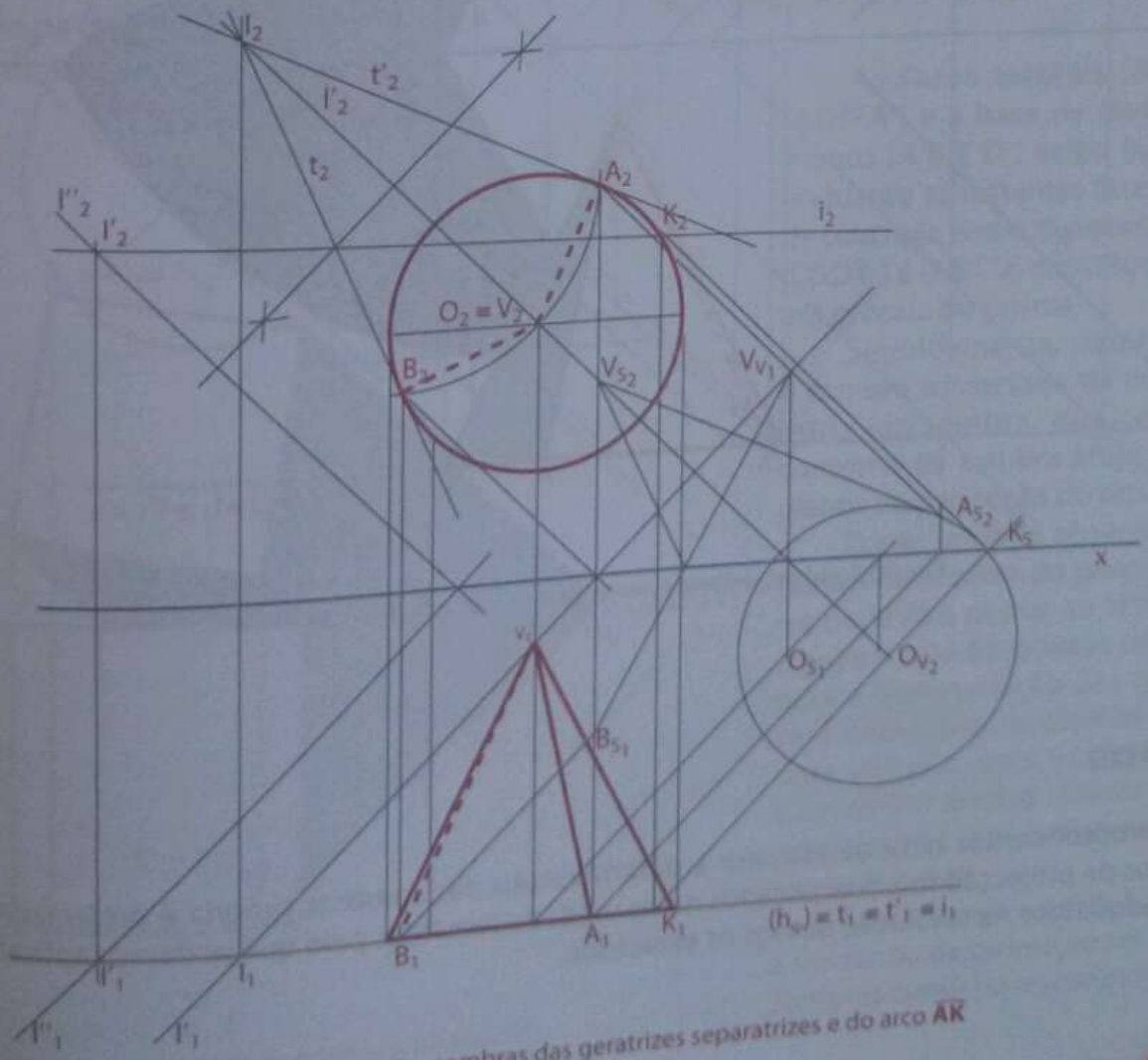


Fig. 89 Determinação das sombras das geratrizes separatrizes e do arco $\overset{\frown}{AK}$

A parte da sombra do arco que se situa no SPHA, o arco $\overset{\frown}{KB}$, é um segmento de uma elipse, pelo que, com o auxílio da metade do quadrado envolvente que se projecta em forma de metade dum paralelogramo envolvente, efectua-se o traçado do arco $K_s B_{s_1}$.

Por fim, distinguem-se os traços e as cores do desenho (Fig. 90).

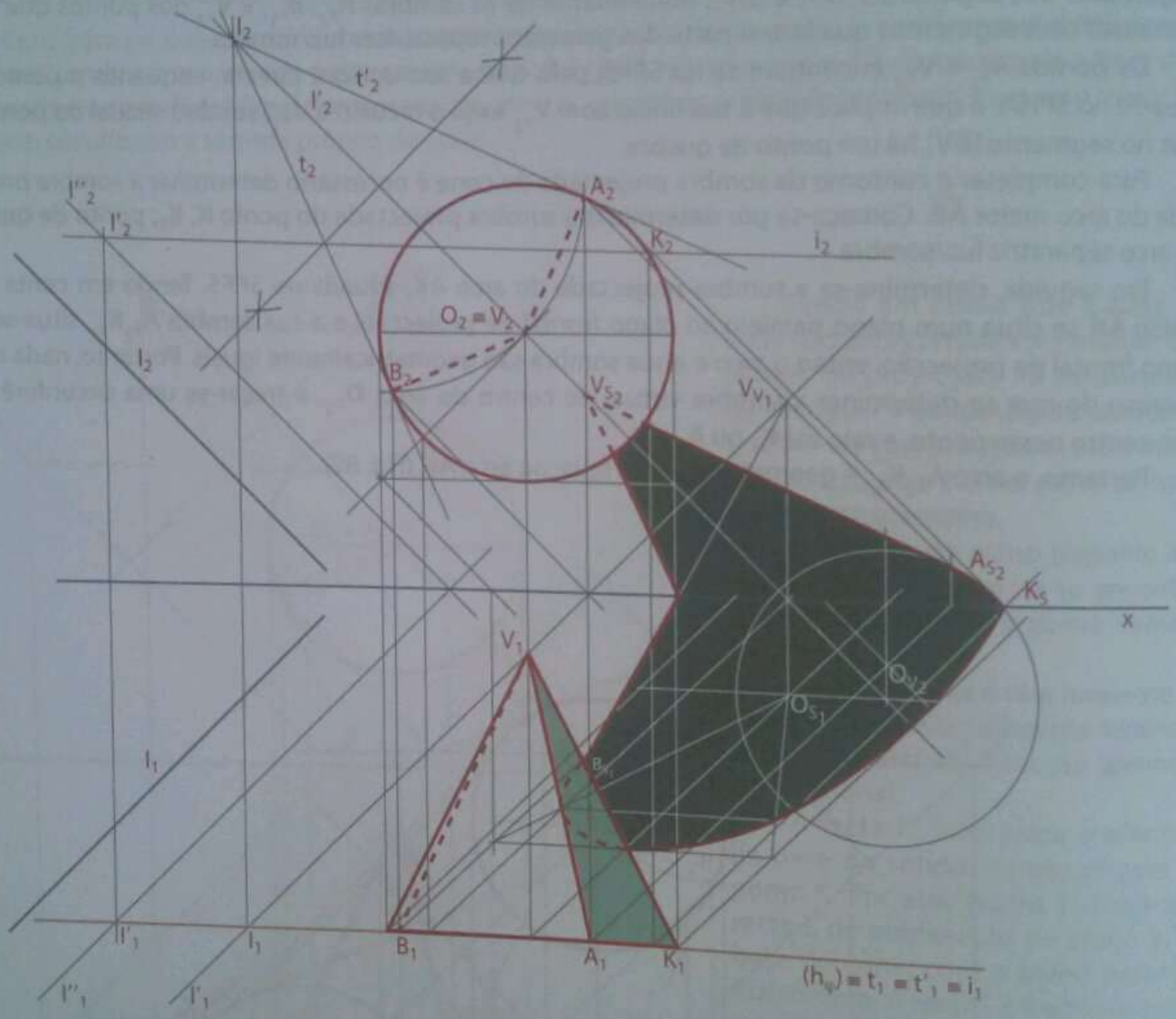


Fig. 90 Sombras própria e projectada do cone de base de frente.

Prismas

Os procedimentos necessários para a determinação das sombras própria e projectada de prismas nos planos de projecção foram explicados nesta unidade temática, pelo que podemos aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de alguns exercícios.

Determinemos as sombras própria e projectada nos planos de projecção dum prisma. O prisma tem as bases quadrangulares, é regular e está assente por uma das bases no plano frontal de projecção. A direcção luminosa é a convencional (Fig. 91).

Tal como noutros sólidos, começa-se por determinar a linha separatriz luz/sombra, para o que é necessário o recurso aos planos tangentes luz/sombra.

No entanto, tendo em conta o tipo de sólido e a sua posição no espaço, torna-se desnecessário seguir os quatro passos, na medida em que as rectas t e t', tangentes à base do sólido, têm as suas projecções frontais paralelas às projecções frontais da direcção luminosa, pelo que o primeiro passo consistirá em traçar tais tangentes e, por conseguinte, encontrar as arestas laterais separatrizes luz/sombra.

Assim, as rectas tangentes tocam a base de referência do prisma, nos pontos **D** e **B**, pelo que [**DD'**] e [**BB'**] são as arestas laterais que fazem parte da linha separatriz luz/sombra, que se completa com as arestas [**AB**] e [**AD**] da base, de afastamento nulo, e [**B'C'**] e [**C'D'**], da base de maior afastamento. Assim, a linha separatriz luz/sombra é [**B'BADD'C'**].

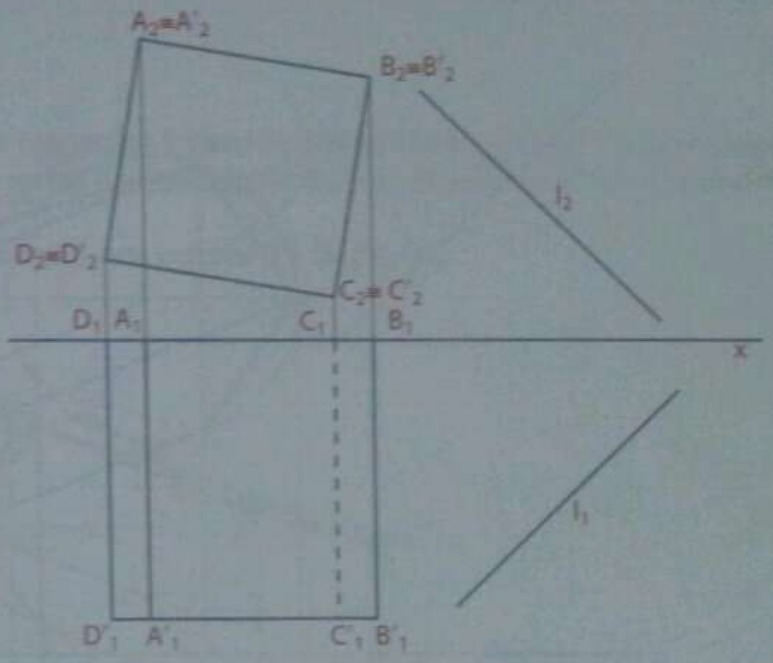


Fig. 91 Projecções do prisma e de l

As faces laterais [**ABB'A'**] e [**ADD'A'**] e a base de maior afastamento [**A'B'C'D'**] estão iluminadas, enquanto as restantes faces e a base de cota nula, respectivamente [**BCC'B'**], [**CDD'C'**] e [**ABCD**] constituem a sombra própria do prisma.

Seguidamente, determinou-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra, que constitui o contorno da sombra projectada nos planos de projecção do prisma.

Como se pode observar, alguns pontos da sombra do prisma situam-se no SPFS e outros no SPHA, o que significa que há pontos de quebra para a determinação dos quais não será necessário recorrer-se às sombras virtuais, pois os dois encontram-se em arestas laterais que são paralelos ao plano horizontal de projecção (Fig. 92).

Recorde que as rectas paralelas a um plano de projecção têm as suas sombras paralelas a si próprias.

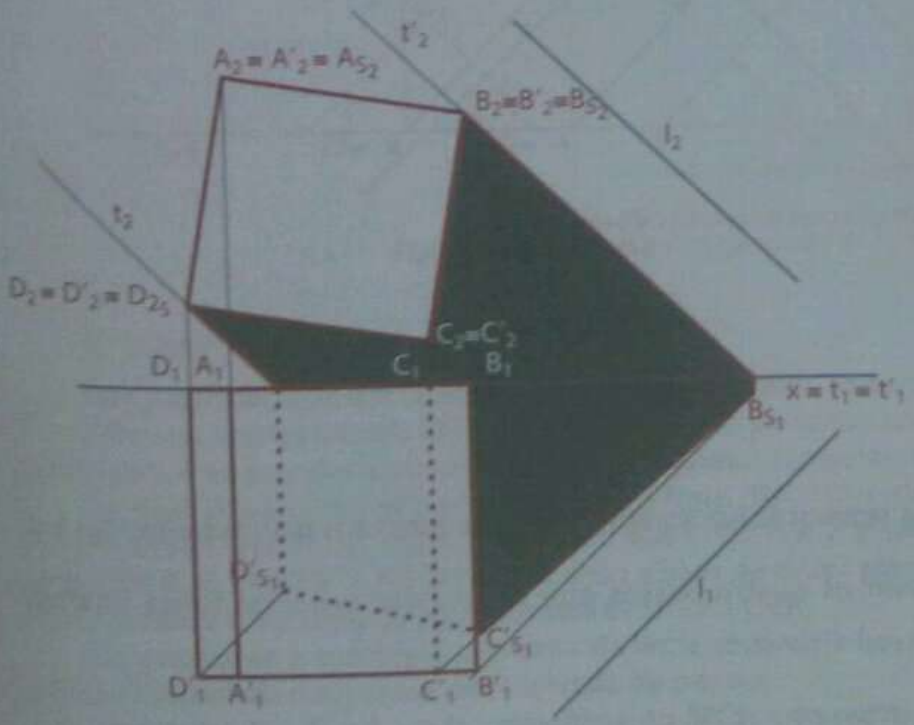


Fig. 92 Sombras própria e projectada do prisma quadrangular.

Determinemos as sombras própria e projectada de um outro prisma, desta vez pentagonal oblíquo, de bases de frente, tendo em conta a direcção luminosa convencional (Fig. 93).

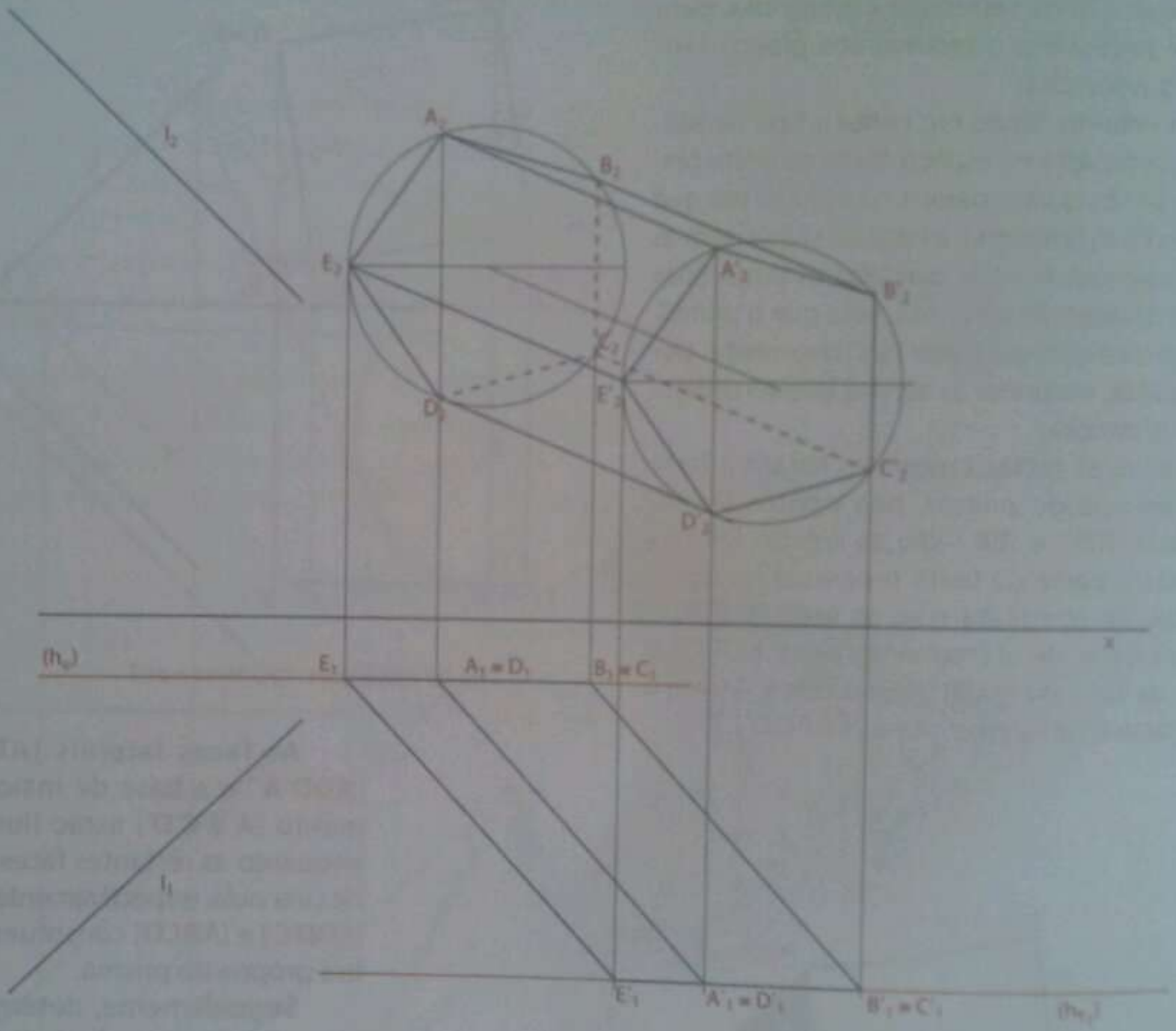


Fig. 93 Projecções do prisma e do raio luminoso **l**

Primeiro iremos determinar a linha separatriz luz/sombra, com o recurso aos planos tangentes luz/sombra.

Para o efeito, é necessário observar os quatro passos que se seguem expostos nesta unidade temática.

1.º passo

Conduzir por um ponto **P** qualquer (exterior ao sólido) duas rectas, **a** e **l'**, sendo **a** paralela às arestas laterais do sólido, e **l'** paralela à direcção luminosa **l**.

2.º passo

Determinar a recta **i**, de intersecção do plano definido pelas rectas **a** e **l'**, concorrentes no ponto **P**, com o plano da base de referência do prisma. Neste exercício, o plano de referência é o plano φ, plano da base de menor afastamento.

3.º passo

Traçar duas rectas **t** e **t'**, paralelas à recta **i**, e tangentes à base de referência do prisma. As duas rectas tangentes à base de referência do prisma são as rectas de intersecção do plano de base de referência com os planos tangentes luz/sombra.

As rectas **t** e **t'** são tangentes à base de referência, nos pontos **B** e **D** (Fig. 94).

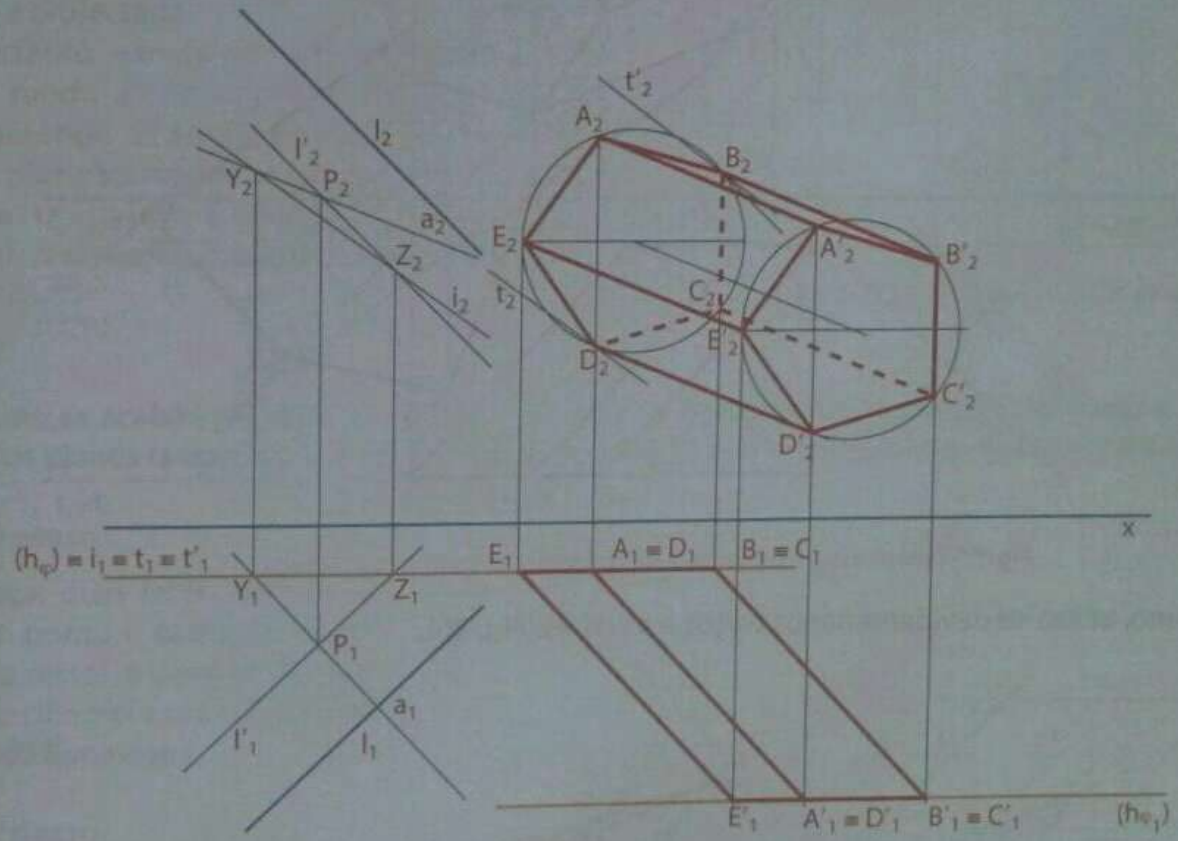


Fig. 94 Determinação das tangentes **t** e **t'**

4.º passo

Este passo consiste em fazer uma análise da separatriz, da sombra própria e das faces iluminadas.

Assim, as arestas laterais [**BB'**] e [**DD'**] constituem parte das arestas que fazem parte da linha separatriz luz/sombra. É através dessas duas arestas, que os planos tangentes luz/sombra são tangentes ao prisma.

Na base disso, como se pode observar, as faces [**BB'C'C**] e [**CC'D'D**], incluindo a base de menor afastamento, [**ABCDE**], estão em sombra, pelo que constituem a sombra própria do prisma, e as restantes faces, [**BB'A'A**], [**AA'E'E**] e [**EE'D'D**], incluindo a base de maior afastamento, [**A'B'C'D'E'**], estão iluminadas.

Deste modo, a linha separatriz luz/sombra é [**BB'C'D'DEA**].

Determina-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra, pois ela é que permite obter a sombra projectada nos planos de projecção do prisma.

Os pontos D_{s_2}, E_{s_2}, A_{s_2} e B_{s_2} situam-se no SPFS, e os pontos B'_{s_1}, C'_{s_1}, e D'_{s_1} situam-se no SPHA, o que nos leva a concluir que a sombra tem pontos de quebra, os quais se localizam nas arestas laterais separatrizes luz/sombra.

Através da determinação das sombras virtuais dos pontos **B** e **D**, nomeadamente B_{V_2} e D_{V_2}, foi possível encontrar os pontos de quebra e determinar a linha quebrada que contorna a sombra projectada do prisma (Fig. 95).

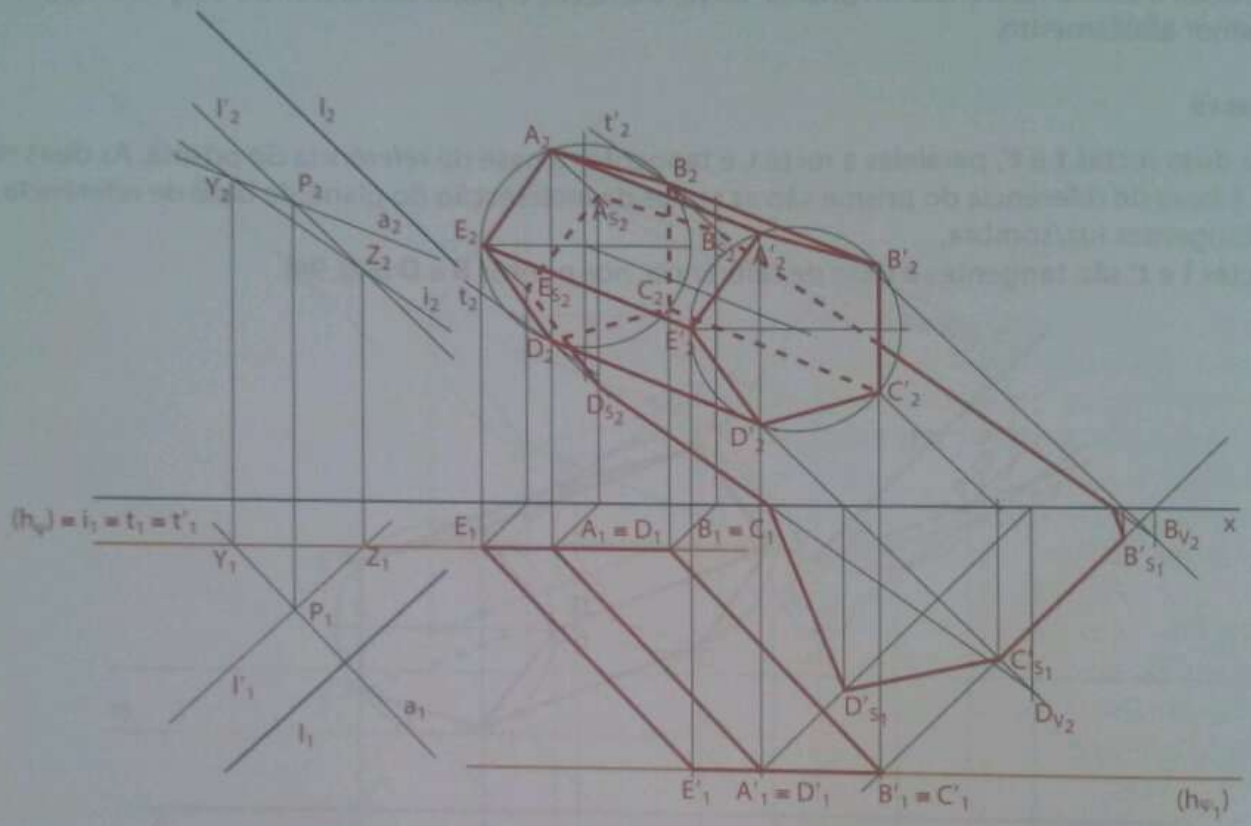


Fig. 95 Determinação da sombra do contorno da sombra projectada.

Por último, utiliza-se devidamente os traços e as cores (Fig. 96).

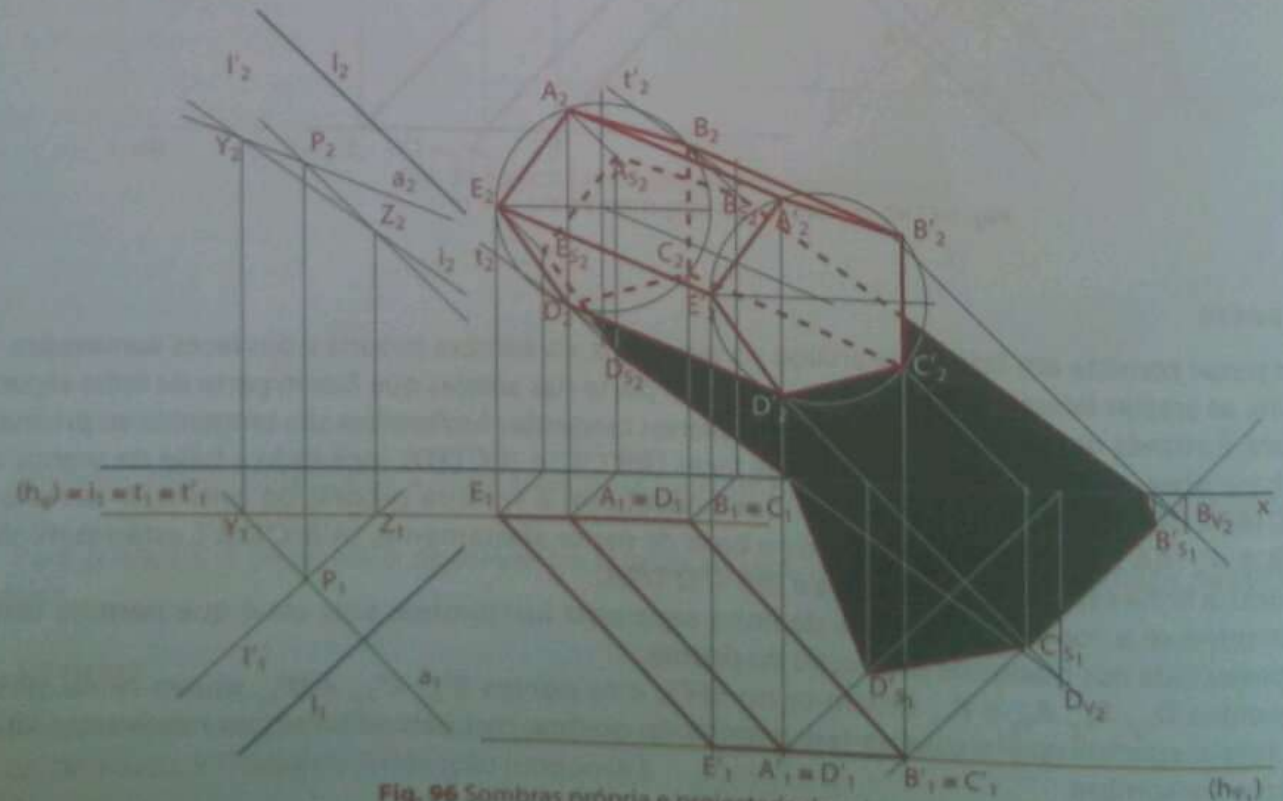


Fig. 96 Sombras própria e projectada do prisma.

Cilindros

Os quatro primeiros passos dados para a determinação da linha separatriz luz/sombra nos prismas, e a subsequente identificação da sombra própria são precisamente os mesmos para o caso de cilindros.

Com efeito, esses sólidos têm de comum duas bases e arestas/geratrizes paralelas, características que lhes permitem usar os mesmos princípios de base para a determinação de sombras própria e projectada.

Portanto, vamos pôr em prática essas teorias de modo a consolidar os conhecimentos, **determinando as sombras própria e projectada nos planos ortogonais de projecção de um cilindro. O cilindro é oblíquo e tem as bases de nível. A direcção luminosa é a convencional (Fig. 97).**

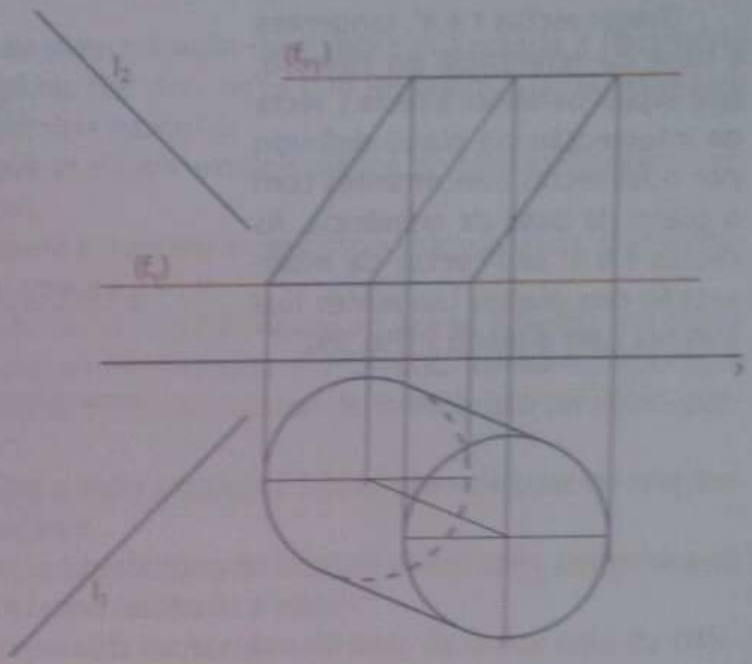


Fig. 97 Projecções do cilindro e do raio l

Como se acabou de dizer, começa-se por se determinar a linha separatriz luz/sombra, tendo como recurso os planos tangentes luz/sombra, ao que se seguirão os outros passos expostos para esse efeito.

1.º passo

Traçar duas rectas concorrentes num ponto P qualquer, sendo uma das rectas a paralela às geratrizes do cilindro, e outra l' paralela à direcção luminosa l.

2.º passo

Determinar a recta i, de intersecção do plano definido pelas rectas a e l', com o plano da base de referência ν. Foi escolhido o plano ν, o de menor cota, como sendo o plano da base de referência (Fig. 98).

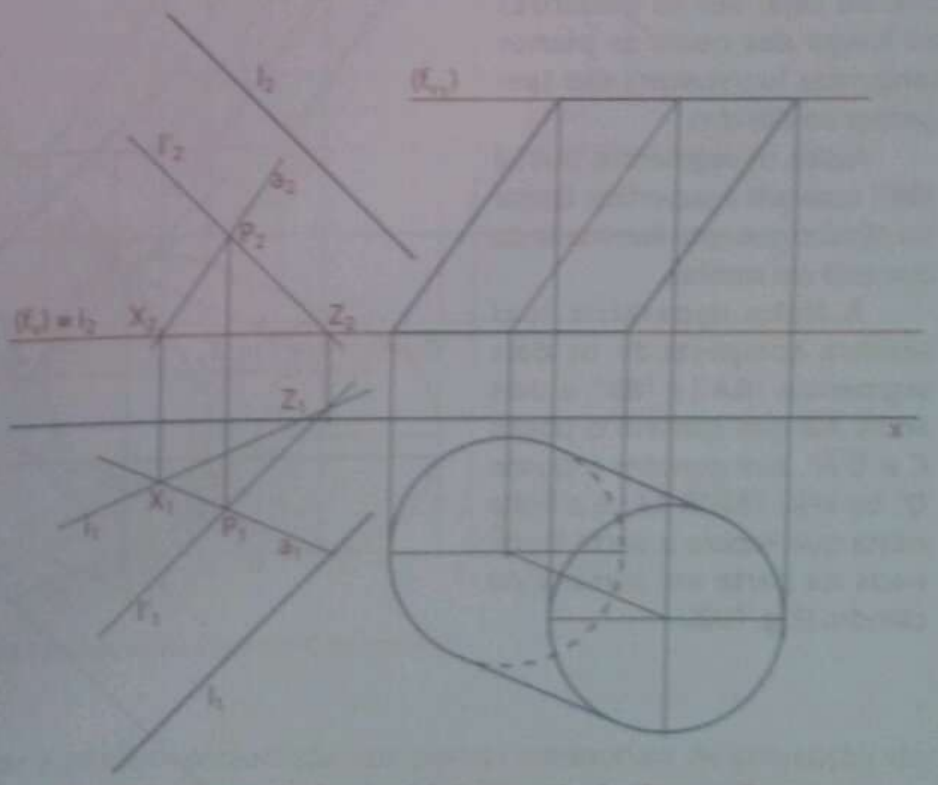


Fig. 98 Determinação da recta i de intersecção do plano auxiliar com o plano da base

3.º passo

Traçar rectas **t** e **t'**, tangentes à base de referência do cilindro, que sejam paralelas à recta **i**, recta de intersecção do plano definido por duas rectas concorrentes com o plano da base de referência. As rectas **t** e **t'** são rectas de intersecção dos planos tangentes luz/sombra com o plano ν (Fig. 99).

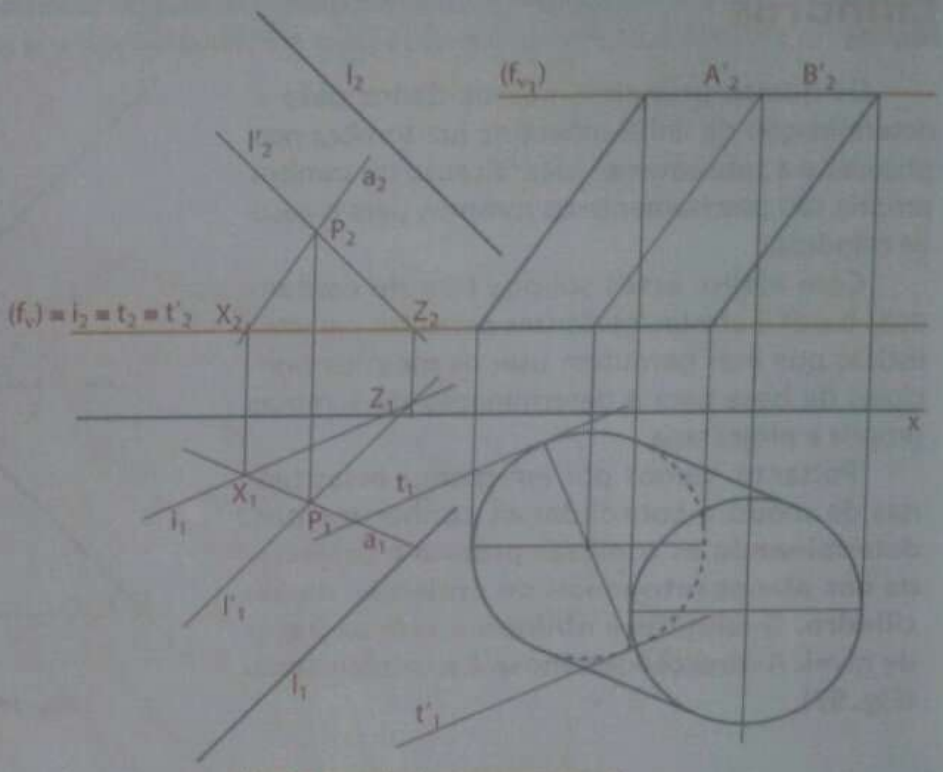


Fig. 99 Traçado das tangentes **t** e **t'**

4.º passo

Os pontos **A** e **B** são os pontos pelos quais as rectas **t** e **t'** são tangentes à base de referência do cilindro, pelo que as geratrizes **g** e **g'**, que contêm esses pontos, fazem parte da linha separatriz luz/sombra, ou seja, são as geratrizes ao longo das quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes ao cilindro.

Assim, os segmentos [**AA'**] e [**BB'**] separam a superfície lateral do cilindro que está iluminada da que está em sombra.

A linha separatriz luz/sombra compreende os dois segmentos [**AA'**] e [**BB'**] e dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ que contém o ponto **C** e $\overset{\frown}{B'A'}$, que contém o ponto **D'**, ou seja, [$A\overset{\frown}{A'B'}B\overset{\frown}{A}$] é a linha mista que separa a parte iluminada da parte em sombra do cilindro (Fig. 100).

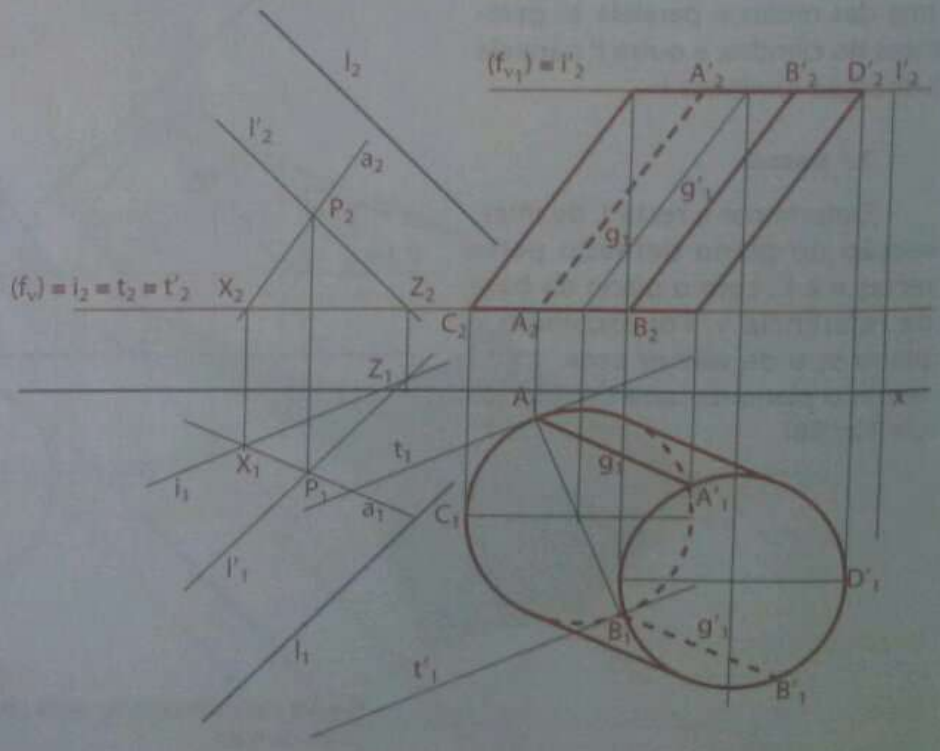


Fig. 248 Traçado das geratrizes separatrizes luz/sombra

Uma vez identificada a sombra própria do cilindro, a etapa seguinte consiste em determinar a sua sombra projectada.

No entanto, tratando-se de um cilindro, antes da determinação da sombra projectada é necessário averiguar a existência de pontos de quebra nas sombras dos dois arcos que integram a linha separatriz luz/sombra, com o recurso ao método do plano luz/sombra passante.

Note que, pelo facto de se tratar de dois arcos que se situam em dois planos, o método do plano luz/sombra passante será aplicado para cada um dos arcos.

Assim sendo, traça-se um raio luminoso l'', passante e paralelo à direcção luminosa dada, que juntamente com o eixo **x** definem o plano luz/sombra passante.

A intersecção da recta **l''** com o plano da base de referência dá origem ao ponto **I**. Tendo em conta que a intersecção dum plano passante com um plano de nível resulta numa recta fronto-horizontal, o ponto **I** é suficiente para determiná-la. Assim, **i'** é a recta fronto-horizontal de intersecção do plano passante com o plano ν.

A recta **i'** intersecta no ponto **K** o arco que integra a linha separatriz luz/sombra da base de referência do cilindro, pelo que há um ponto de quebra nesse arco.

Relativamente ao arco que integra a linha separatriz luz/sombra, da base de maior cota, determina-se o ponto **I'**, de intersecção da recta **l''** com ν_1, o que tem como resultado a recta **i''**.

A recta **i''** é exterior ao arco que integra a linha separatriz luz/sombra da base de maior cota do cilindro, pelo que não há pontos de quebra na sombra desse arco, ou seja, a sua sombra situa-se num único semi-plano (Fig. 101).

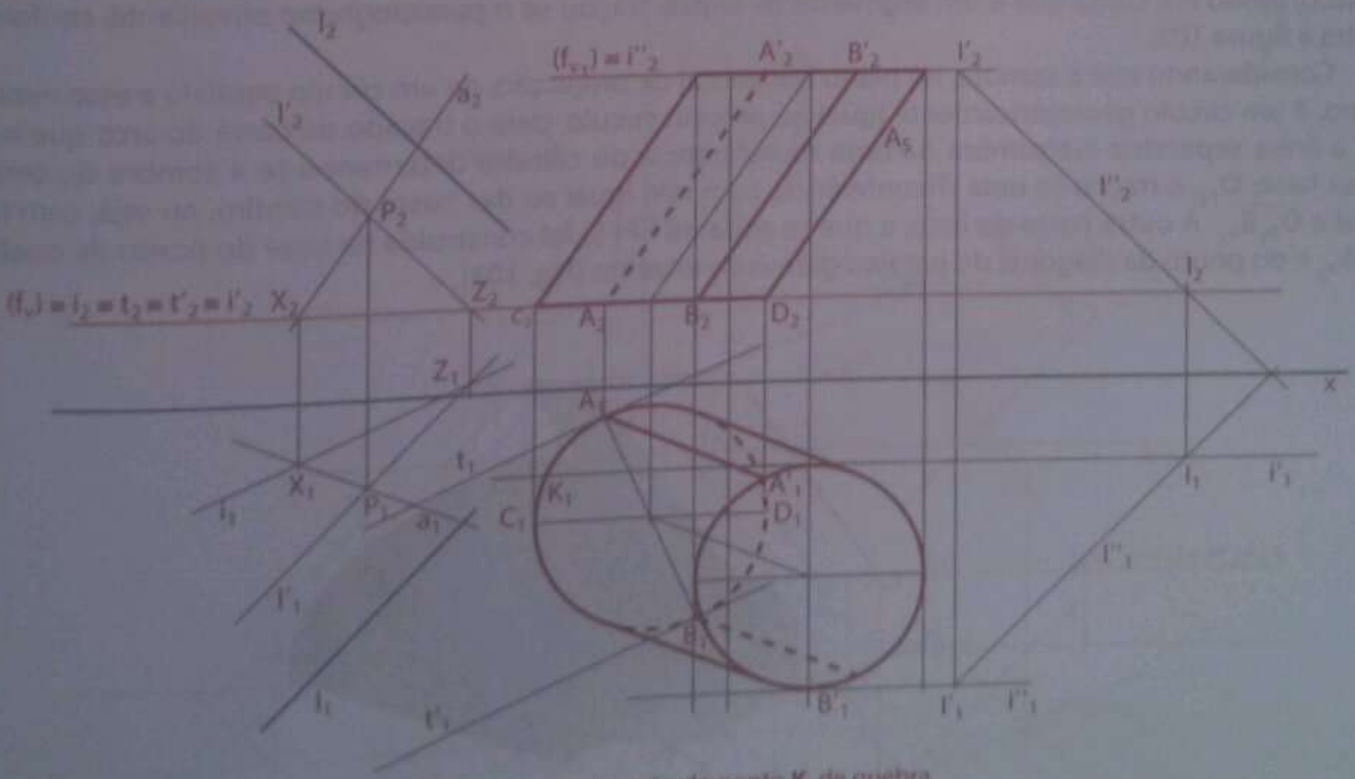


Fig. 101 Determinação do ponto **K**, de quebra

Feito isso, já se pode determinar a sombra projectada nos planos ortogonais de projecção do cilindro. Começa-se por se determinar as sombras projectadas dos segmentos [**AA'**] e [**BB'**]. A_{s_2} e A'_{s_2} situam-se no SPFS, pelo que a sua união é directa, enquanto B_{s_1} e B'_{s_2} se situam em diferentes planos,

pelo que se determinou a sombra virtual de B', B'_{v_1} para se encontrar o ponto de quebra (Fig. 102).

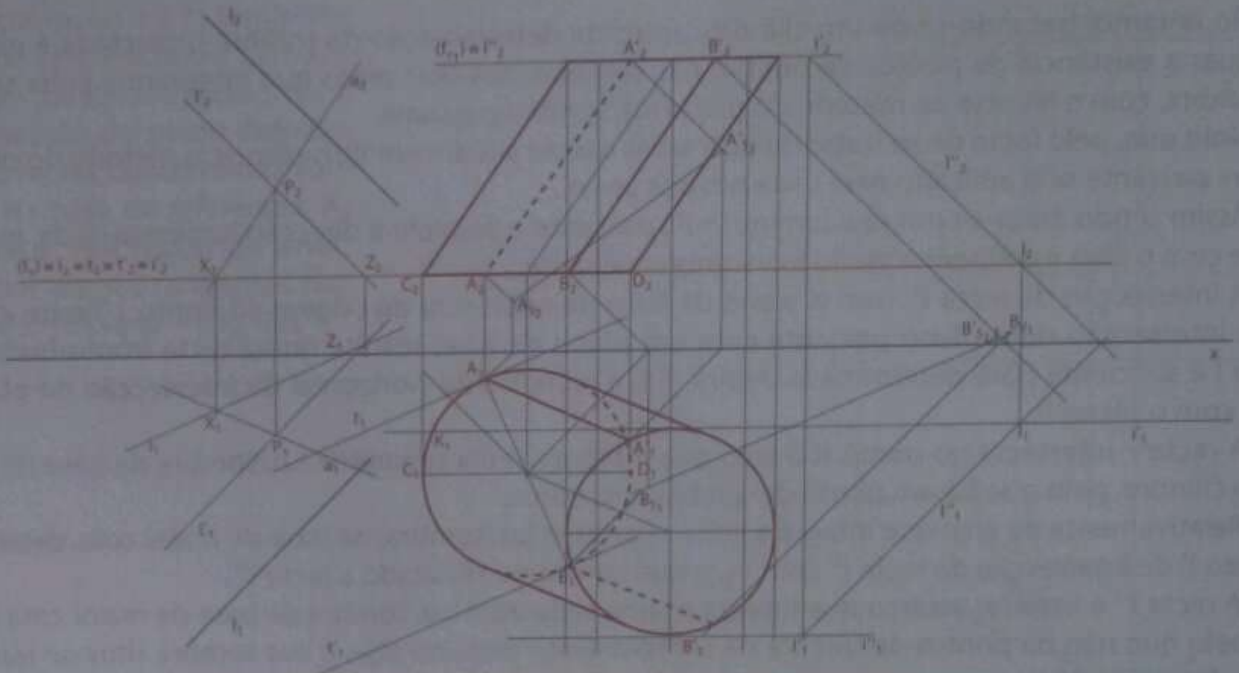


Fig. 102 Determinação das sombras projectadas das geratrizes separatrizes.

Para o traçado da sombra do arco que integra a linha separatriz luz/sombra da base de maior cota do cilindro, tendo em conta que é um segmento de elipse, traçou-se o paralelogramo envolvente, conforme ilustra a figura 103.

Considerando que a sombra, no plano horizontal de projecção, de um círculo paralelo a esse mesmo plano, é um círculo geometricamente igual ao próprio círculo, para o traçado da parte do arco que integra a linha separatriz luz/sombra da base de referência do cilindro determinou-se a sombra do centro dessa base, O_{s_1}, e traçou-se uma circunferência com raio igual ao das bases do cilindro, ou seja, com raio igual a $\overline{O_{s_1}B_{s_1}}$. A outra parte do arco, a que se situa no SPFS, foi construída na base do ponto de quebra, de A_{s_2} e do ponto da diagonal do paralelogramo envolvente (Fig. 103).

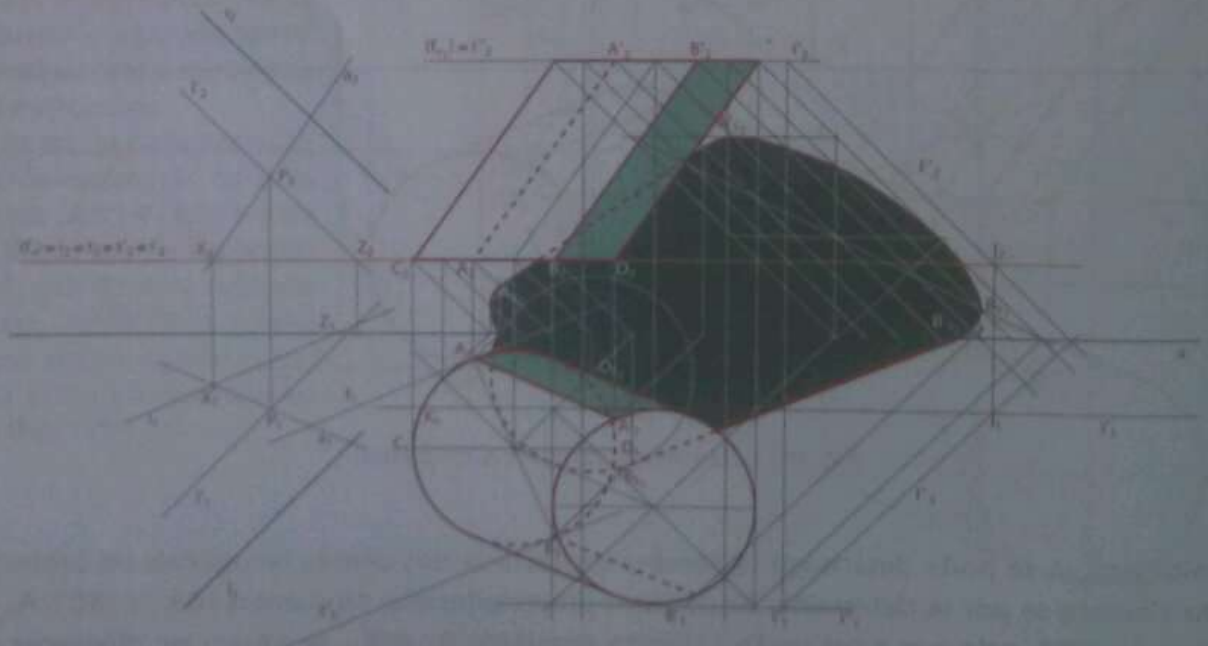


Fig. 103 Sombras própria e projectada do cilindro oblíquo.

Sombra própria e sombra projectada de sólidos com bases de perfil

A determinação das sombras própria e projectada de sólidos com bases de perfil segue exactamente os mesmos passos dados na determinação de sombras de sólidos com bases de nível e de frente.

Pirâmides

Determinemos as sombras própria e projectada de uma pirâmide hexagonal regular, com base contida num plano de perfil π, tendo em conta a direcção luminosa convencional.

A primeira etapa consiste em determinar a linha separatriz luz/sombra para o que é necessário recorrer aos planos tangentes luz/sombra.

1.º passo

Pelo vértice da pirâmide, conduzir um raio luminoso r', que tenha a direcção luminosa convencional, conforme o enunciado do exercício.

2.º passo

Determinar o ponto I de intersecção do raio luminoso r' com o plano π da base do sólido (Fig. 104).

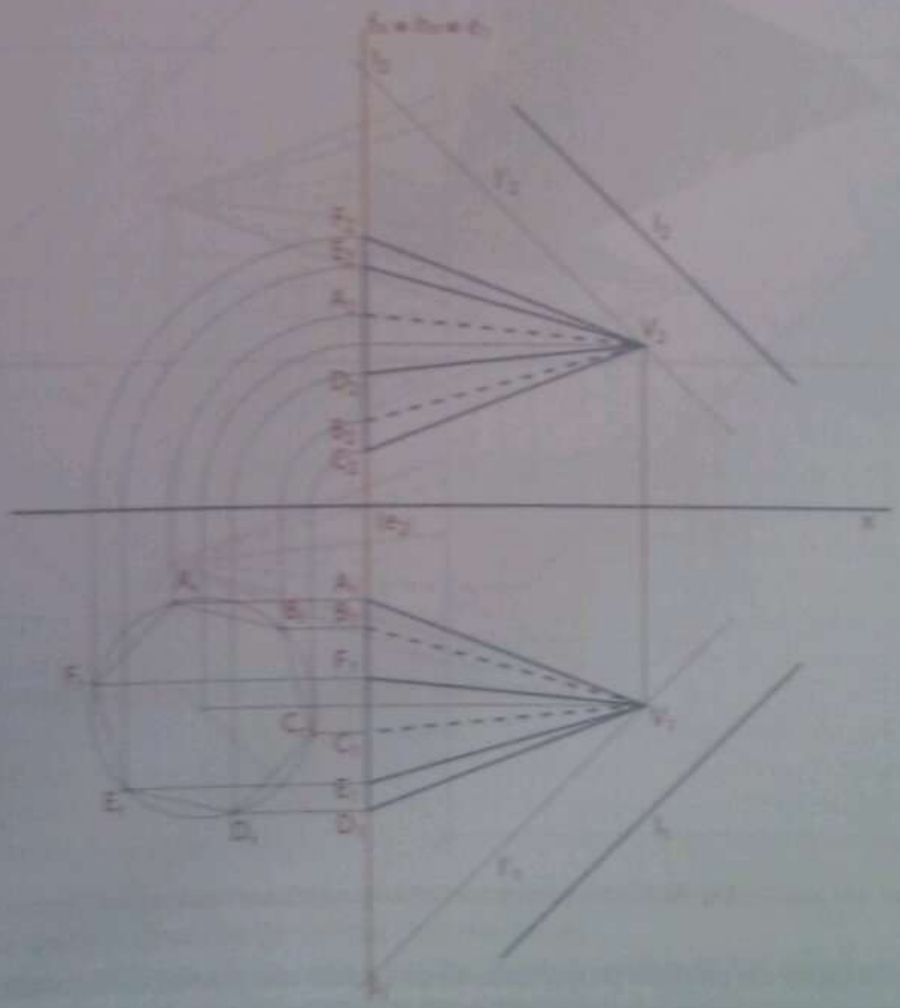


Fig. 104 Projecções da pirâmide e da direcção luminosa e determinação do ponto I

3.º passo

Por **I**, conduzir duas rectas **t** e **t'** tangentes à base da pirâmide.

Conforme se pode depreender, as duas rectas tangentes à base da pirâmide são de perfil, pelo que para analisar os pontos de tangência recorreu-se ao rebatimento das tangentes sobre o mesmo plano onde foi construída a base do sólido.

Para o efeito, foi rebatido o ponto **I** e, seguidamente por ele, foram conduzidas tangentes (t_r e t'_r) ao hexágono, base da pirâmide.

4.º passo

Assim, as rectas **t** e **t'** são tangentes à base do sólido pelos pontos **D** e **F**, o que nos leva a concluir que as arestas laterais **[DV]** e **[FV]** fazem parte da linha separatriz luz/sombra, arestas ao longo das quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes ou rasantes à pirâmide.

As arestas laterais **[DV]** e **[FV]** separam a parte iluminada da parte sombreada, da superfície lateral da pirâmide. Deste modo, as faces **[AVF]**, **[AVB]**, **[BVC]** e **[CVD]** estão em sombra, e as faces **[DVE]** e **[EVF]** estão iluminadas. A base do sólido, logicamente, está iluminada, o que faz com que a linha separatriz luz/sombra seja **[DVFABC]** (Fig. 105).

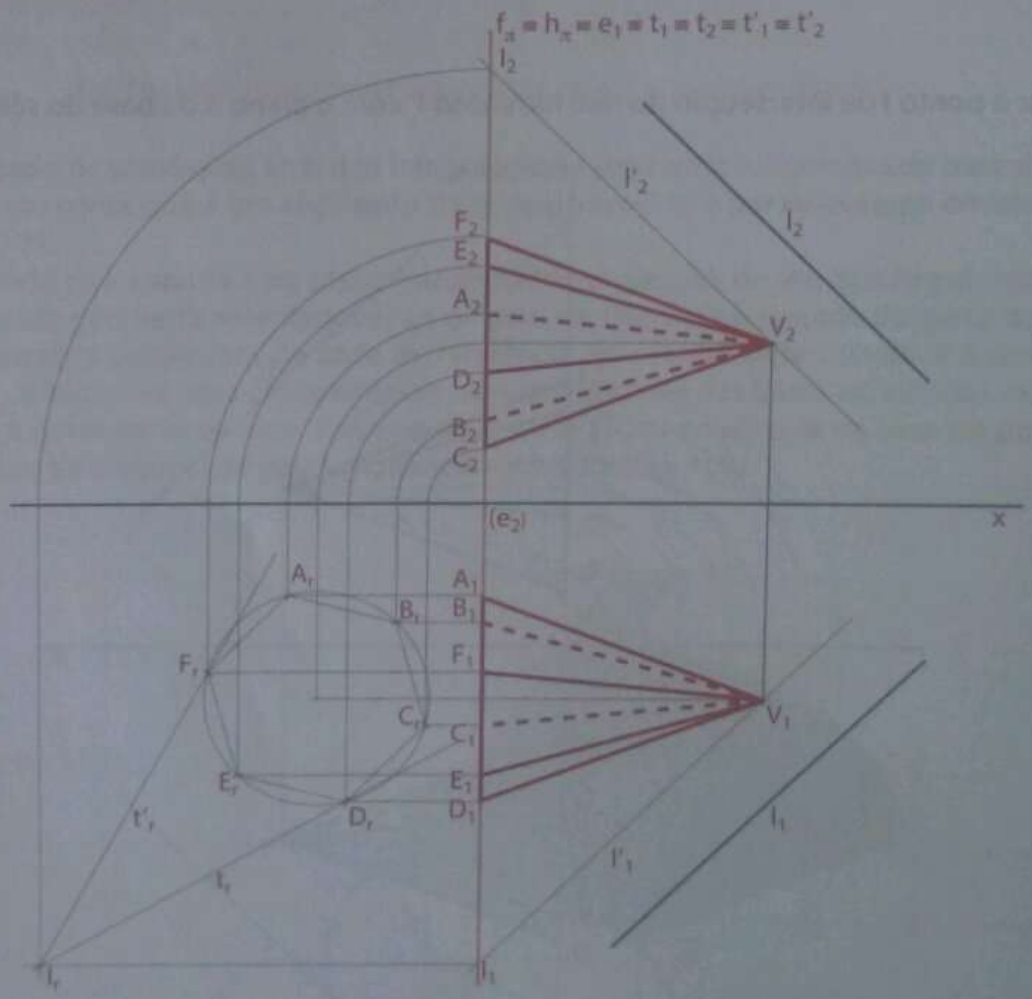


Fig. 105 Determinação da linha separatriz luz/sombra

Para a determinação da sombra projectada da pirâmide nos planos ortogonais de projecção, determinam-se as sombras reais dos pontos que integram a linha separatriz luz/sombra, nomeadamente **D**, **V**, **F**, **A**, **B** e **C** que são D_{s_1}, V_{s_1}, F_{s_2}, A_{s_2}, B_{s_1} e C_{s_1}.

D_{s_1}, V_{s_1}, B_{s_1} e C_{s_1} situam-se no SPHA, enquanto F_{s_2} e A_{s_2} se situam no SPFS, pelo que há dois pontos de quebra, nomeadamente entre B_{s_1} e A_{s_2} e entre V_{s_1} e F_{s_2}, o que fez com que se recorresse à determinação de sombras virtuais de **B** e **F**, respectivamente.

Por último, aplicam-se as cores como ilustra a figura (Fig. 106).

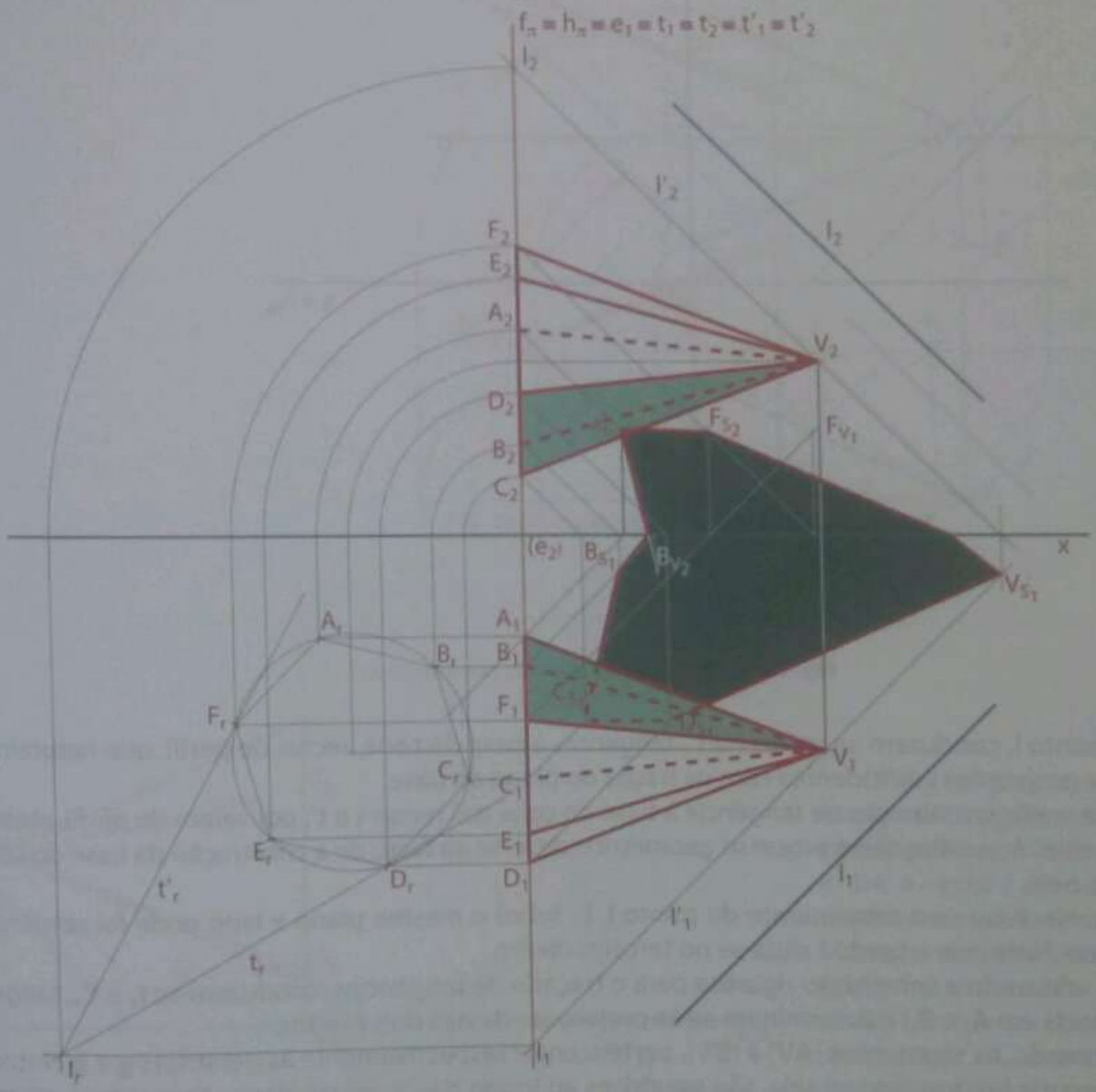


Fig. 106 Sombras própria e projectada da pirâmide de base de perfil.

Cones

Passemos à determinação das sombras própria e projectada de um cone de revolução, com a base de perfil, sendo dada a direcção luminosa convencional.

Evidentemente que a primeira etapa para a resolução deste exercício, tal como em todos os outros exercícios ligados às sombras de sólidos, consiste em determinar a linha separatriz luz/sombra com o recurso aos planos tangentes luz/sombra.

Para o efeito, começa-se por se conduzir pelo vértice do cone um raio luminoso **l'** que tenha a direcção luminosa dada, ao que se segue a determinação do ponto **I** de intersecção dessa recta **l'** com o plano da base do sólido (Fig. 107).

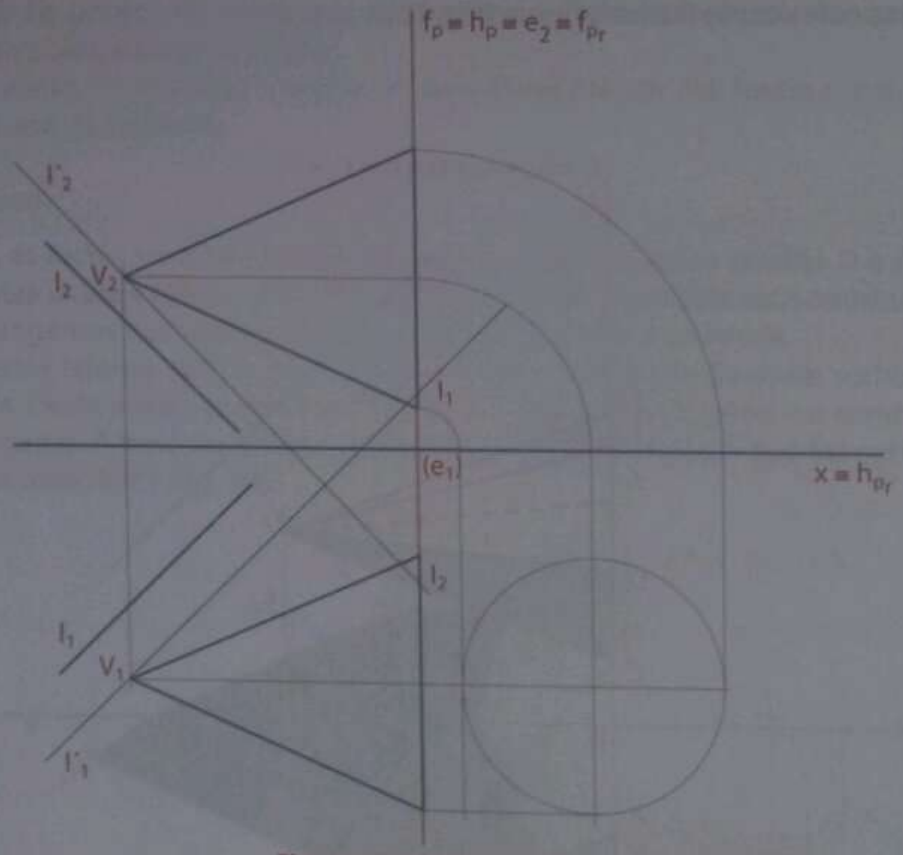


Fig. 107 Projecções do cone e do raio luminoso **l**.

Pelo ponto **I**, conduzem-se rectas **t** e **t'**, tangentes à base do cone, rectas de perfil, que naturalmente têm as suas projecções coincidentes com os traços do plano da base.

Para se verificar a situação de tangência à base do cone das rectas **t** e **t'**, por serem de perfil, recorre-se ao rebatimento. A escolha deste processo geométrico deve-se ao facto de a construção da base do cone se ter baseado nele.

Assim, efectuou-se o rebatimento do ponto **I**, I_r, sobre o mesmo plano e lado onde foi construída a base do cone. Note que o ponto **I** situa-se no terceiro diedro.

Por I_r, utilizando a construção rigorosa para o traçado de tangências, conduzem-se t_r e t'_r, tangentes à base rebatida em A_r e B_r, e determinam-se as projecções desses dois pontos.

Assim sendo, os segmentos [**AV**] e [**BV**], pertencentes respectivamente às geratrizes **g** e **g'**, integram a linha separatriz luz/sombra, ou seja, são geratrizes ao longo das quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes ao cone.

Os segmentos [**AV**] e [**BV**] separam a parte da superfície lateral do cone que está iluminada da que está em sombra. A parte da superfície lateral, que está iluminada, corresponde ao arco maior $\overline{AB}$ enquanto a parte da superfície lateral do sólido que está em sombra corresponde ao arco menor $\overline{AB}$. Dada a posição da base e a direcção luminosa, a base do cone está em sombra, pelo que a linha separatriz luz/sombra é [**BV**$\overline{AB}$].

Antes de se determinar a sombra projectada do cone é necessário averiguar a existência de pontos de quebra na sombra que o arco maior $\overline{AB}$ produz nos planos de projecção. Para o efeito recorreu-se ao método do plano luz/sombra passante.

Assim, traçou-se a recta **l''**, passante, que tem a direcção luminosa dada, e determinou-se o ponto **I'** da sua intersecção com o plano da base do cone, π.

A recta i, resultante da intersecção do plano passante com o plano π da base do cone, é uma recta de perfil definida pelo ponto I e pelo ponto onde os dois traços do plano da base se cruzam (Fig. 108).

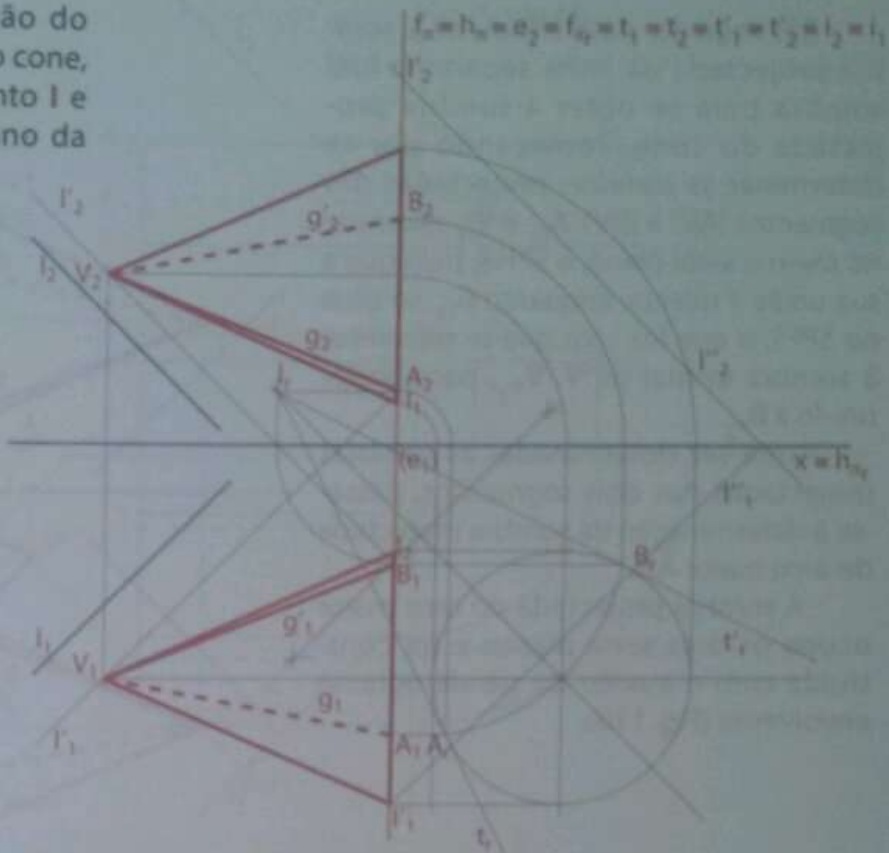
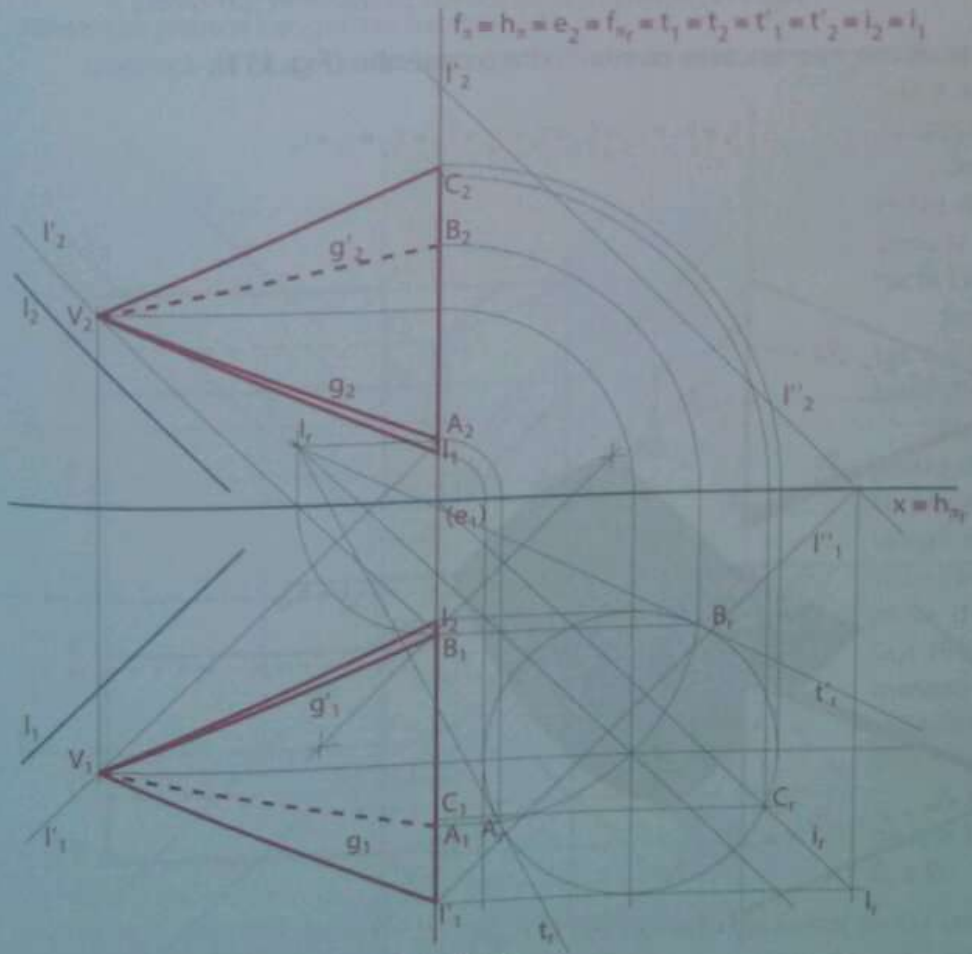


Fig. 108 Determinação da separatriz luz/sombra



Tal como aconteceu com as rectas tangentes à base do cone, para analisar a relação entre a recta i com a base do cone é necessário rebater a recta sobre o mesmo plano e lado onde foi construída a base do cone. Efectua-se o rebatimento do ponto I', I'_r, e une-se-lhe ao ponto onde se cruzam os dois traços do plano da base dando origem a i_r. i_r intersecta o arco rebatido da linha separatriz luz/sombra, no ponto **C**. Portanto, o ponto **C** é o ponto de quebra do arco que faz parte da linha separatriz luz/sombra (Fig. 109).

Fig. 109 Determinação do ponto **C** de quebra

Em seguida, determinou-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra para se obter a sombra projectada do cone, começando por se determinar as sombras projectadas dos segmentos [AV] e [BV]. A_{s_1} e V_{s_1} situam-se no mesmo semi-plano, o SPHA, pelo que a sua união é directa, enquanto B_{s_2}, se situa no SPFS, o que fez com que se recorresse à sombra virtual de V, V_{v_2}, para poder uni-lo a B_{s_2}.

Uma vez determinadas as sombras projectadas dos dois segmentos, passa-se à determinação da sombra projectada do arco maior $\overline{AB}$.

A sombra projectada do arco maior ocupa os dois semi-planos e foi construída com o auxílio do paralelogramo envolvente (Fig. 110).

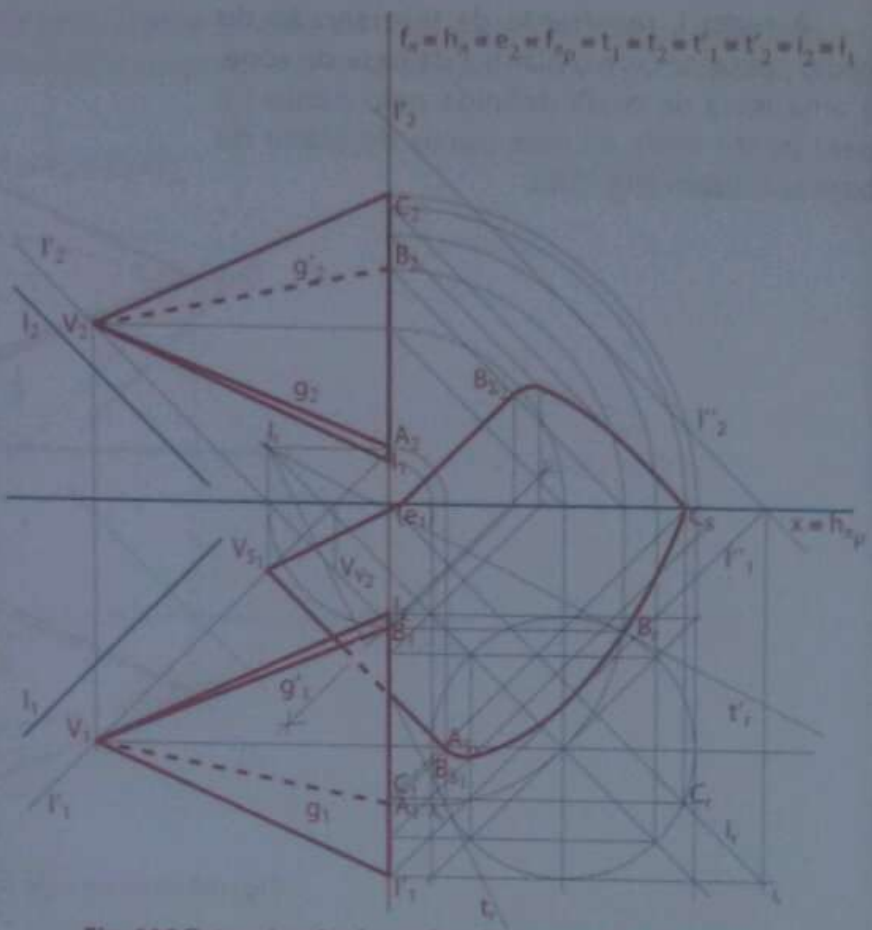


Fig. 110 Determinação da sombra da separatriz luz/sombra

Por fim, aplicam-se devidamente os traços e as cores como ilustra o desenho (Fig. 111).

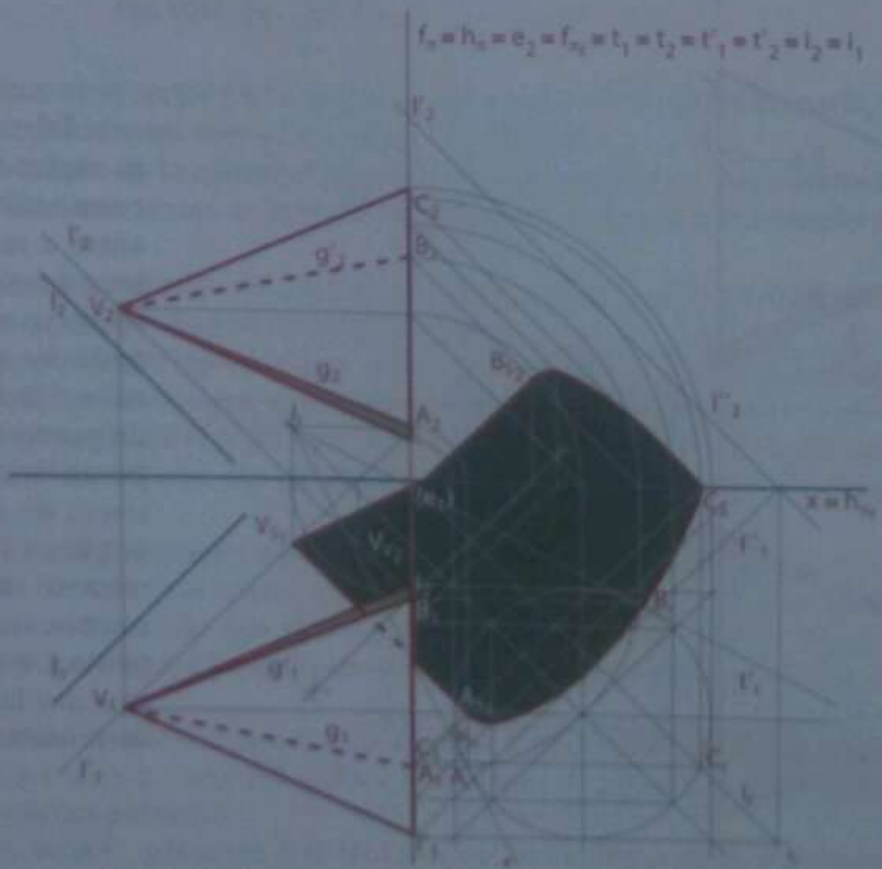


Fig. 111 Sombras própria e projectada do cone de base de perfil.

Prismas

Determinemos agora a sombra própria e a sombra projectada, nos planos de projecção de um prisma pentagonal regular, de base de perfil. A direcção luminosa é a convencional (Fig. 112).

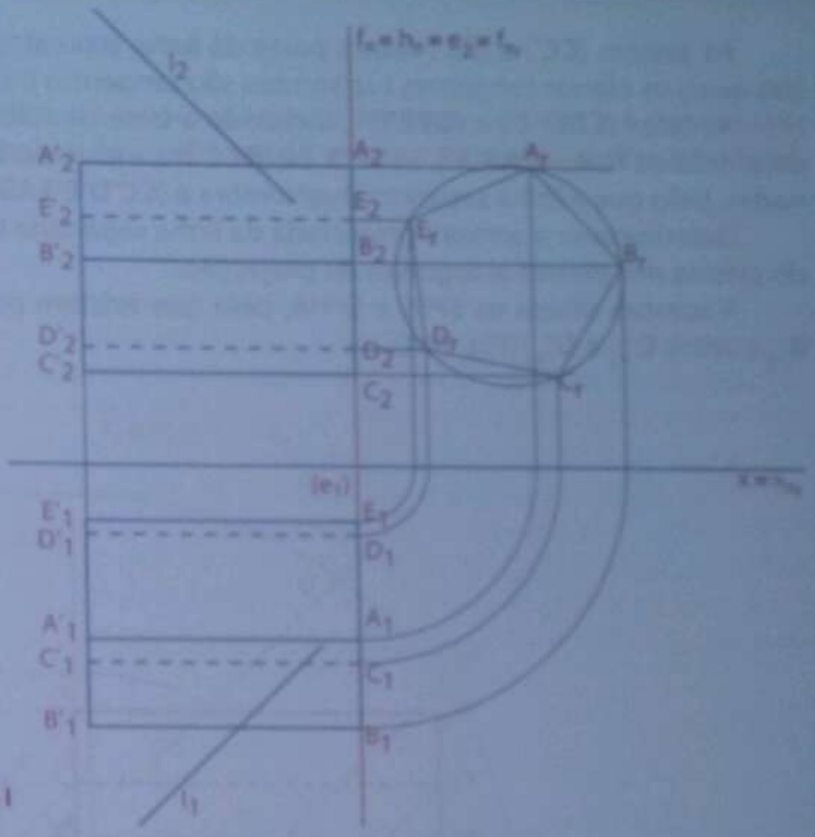


Fig. 112 Projecções do prisma e do raio **l**

A primeira etapa consiste em determinar a linha separatriz luz/sombra para o que é necessário recorrer-se aos planos tangentes luz/sombra.

Começa-se por marcar um ponto **P** qualquer, e por ele conduzir duas rectas, das quais uma **l'**, paralela à direcção luminosa, e outra **a**, paralela às arestas laterais do prisma.

Determina-se a recta **i** de intersecção entre o plano definido pelas rectas **l'** e **a**, com o plano π da base de referência. A recta **i** resulta da união dos pontos **I** e **I'**.

Seguidamente, conduzem-se as rectas **t** e **t'**, paralelas à recta **i** e tangentes à base de referência do prisma.

No entanto, devido à posição que o plano da base de referência e, consequentemente, o plano que contém as rectas tangentes tomam, não é fácil analisar a situação da tangência das rectas **t** e **t'** à base de referência do sólido, pelo que um rebatimento das tangentes sobre o mesmo plano e lado da base de referência rebatida, ajuda a efectuar a referida análise (Fig. 113).

A recta **i** rebatida i_r resulta da união de I_r e I'_r. t_r e t'_r são tangentes à base por C_r e E_r.

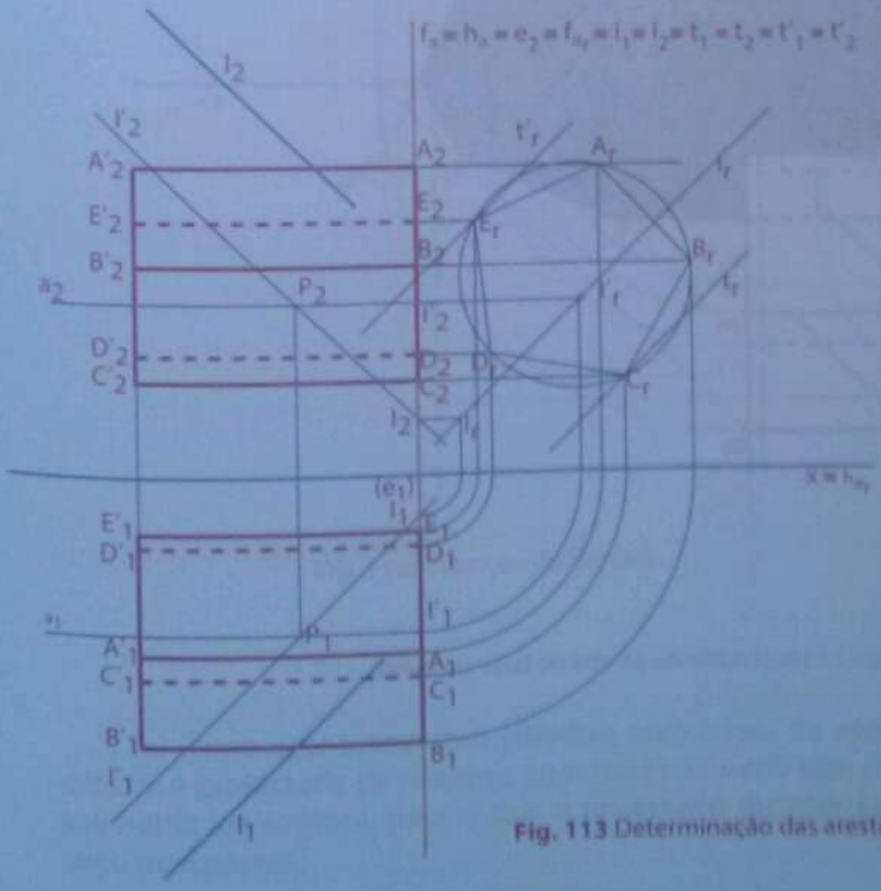


Fig. 113 Determinação das arestas laterais separatrizes.

As arestas [CC'] e [EE'] fazem parte da linha separatriz luz/sombra; são as arestas laterais ao longo das quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes (rasantes) ao prisma.

As faces [CDD'C'] e [DEE'D'], incluindo a base de referência do prisma [ABCDE], estão em sombra, enquanto as faces [EAA'E'], [ABB'A'] e [BCC'B'], incluindo a base de menor abcissa, encontram-se iluminadas, pelo que a linha separatriz luz/sombra é [CC'D'E'EAB].

Determina-se a sombra projectada da linha separatriz luz/sombra para se obter a sombra projectada do prisma nos planos ortogonais de projecção.

A sombra ocupa os SPFS e SPHA, pelo que existem pontos de quebra, nomeadamente entre A_{s_2} e B_{s_1} e entre C'_{s_1} e D'_{s_2} (Fig. 114).

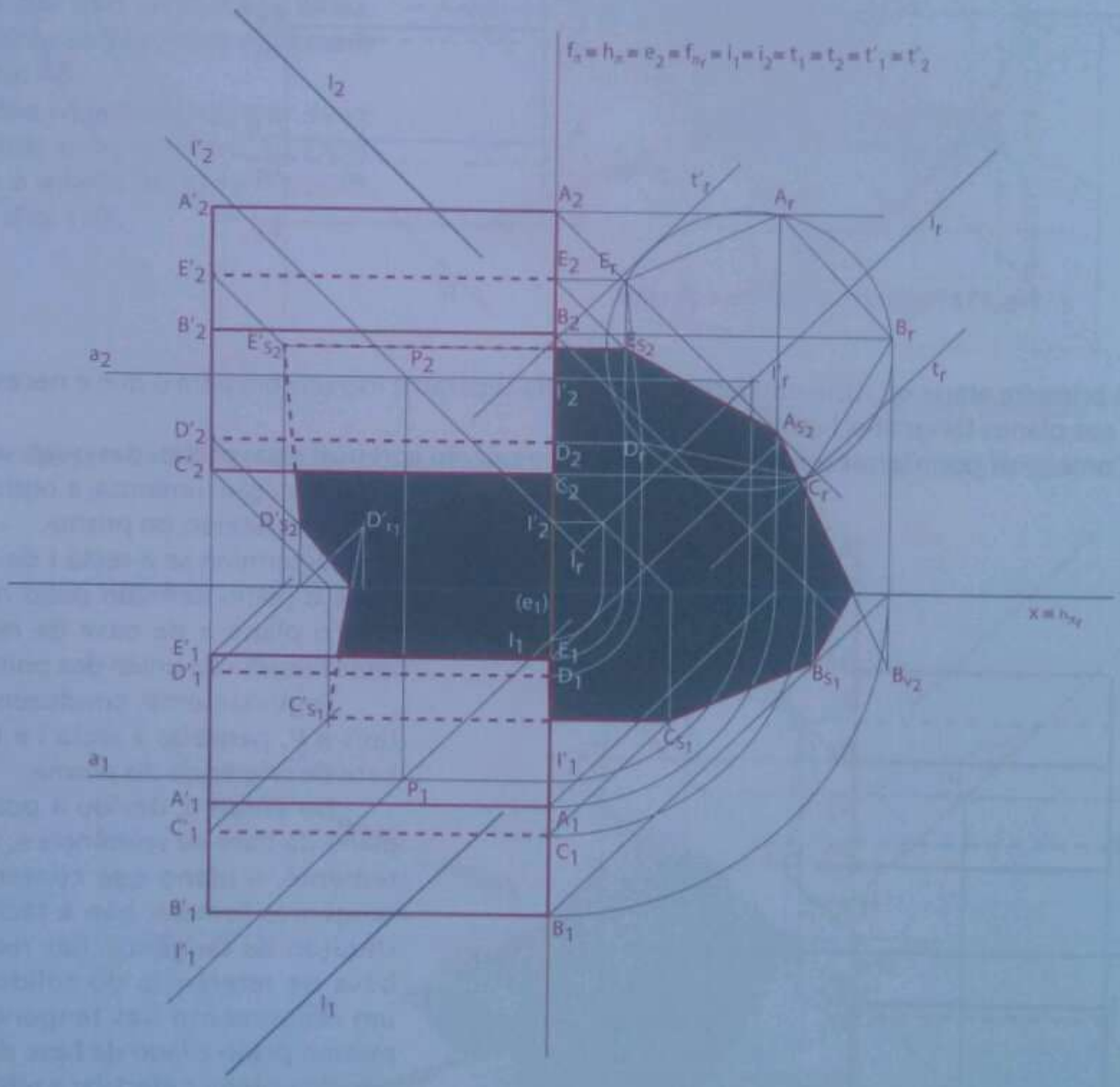


Fig. 114 Sombras própria e projectada do prisma de base de perfil.

Cilindros

O último exercício que vamos resolver, relativo à determinação de sombras, consiste em **determinar as sombras dum cilindro de revolução de bases de perfil, tendo em consideração a direcção luminosa convencional (Fig. 115).**

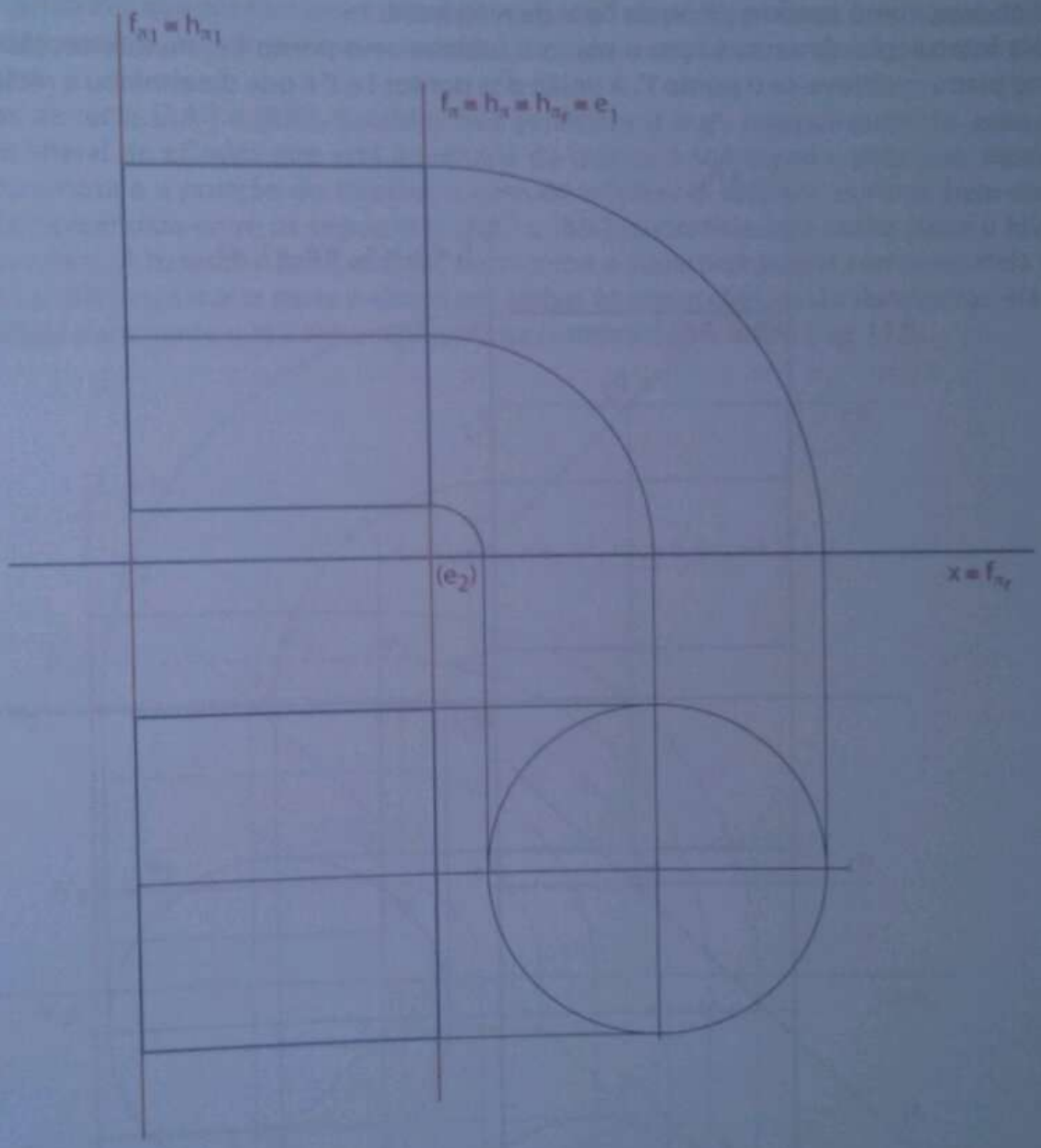


Fig. 115 Projecção do cilindro

Tal como aconteceu com cilindros com bases de nível ou de frente, a determinação das sombras própria e projectada de cilindros com bases de perfil tem como a primeira etapa a determinação da linha separatriz luz/sombra, para o que é necessário recorrer aos planos tangentes luz/sombra, seguindo os seguintes passos:

1.º passo

Por um ponto **P** qualquer conduzir duas rectas concorrentes, sendo uma a recta **a**, paralela às geratrizes do cilindro, e outra, a recta **l**, paralela à direcção luminosa dada, direcção luminosa convencional.

2.º passo

Determinar a recta **i** de intersecção do plano definido pelas rectas **a** e **l**, concorrentes no ponto **P**, com o plano da base de referência do cilindro. Neste exercício foi escolhido o plano π, plano da base com maior abcissa, como sendo o plano da base de referência.

Na intersecção da recta **l** com o plano π, obteve-se o ponto **I** e, na intersecção da recta **a** com o mesmo plano π, obteve-se o ponto **I'**. A união dos pontos **I** e **I'** é que determinou a recta **i** (Fig. 116).

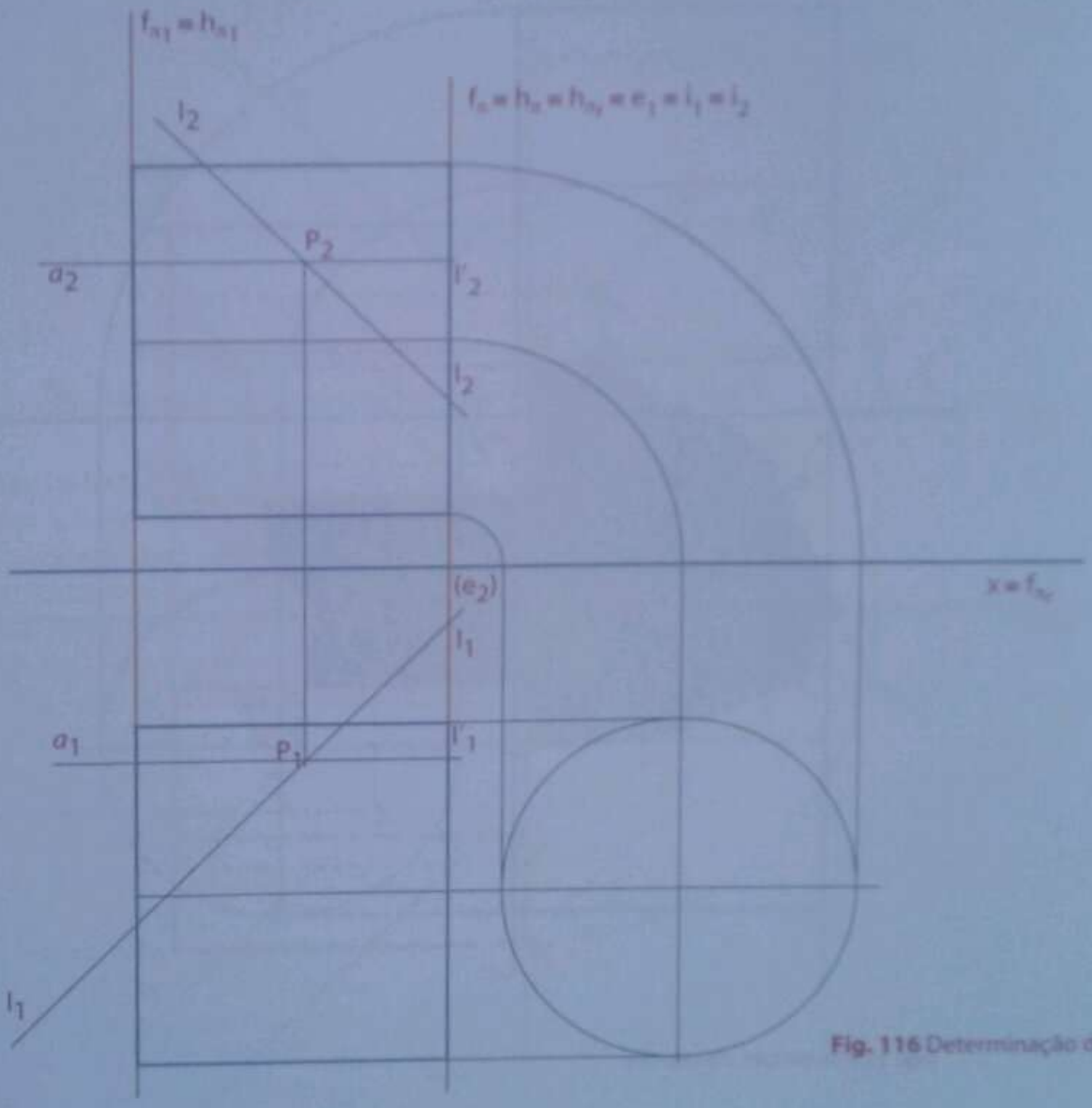


Fig. 116 Determinação da recta **i**

3.º passo

Traçar as rectas **t** e **t'**, tangentes à base de referência do cilindro e paralelas à recta **i**. As rectas **t** e **t'** são as rectas de intersecção dos planos tangentes luz/sombra com o plano π, da base de referência do cilindro.

Tendo em conta que as rectas **t** e **t'** situam-se no mesmo plano de perfil que a base a que são tangentes, torna-se necessário o recurso a um método geométrico auxiliar para analisar a situação de

tangência. Deste modo foi efectuado o rebatimento das rectas **t** e **t'** sobre o mesmo plano e lado onde foi construída a base do cilindro.

Assim, no plano rebatido visualiza-se claramente que t_r é tangente à base rebatida em A_r e t'_r é tangente à mesma base em B_r.

4.º passo

Como se disse no passo anterior, as rectas **t** e **t'** são tangentes à base de referência do cilndro em **A** e **B**. Sendo assim, as geratrizes que contêm esses dois pontos, **g** e **g'**, respectivamente, fazem parte da linha separatriz luz/sombra, ou seja, são as geratrizes ao longo das quais os planos tangentes luz/sombra são tangentes ao cilindro.

Os segmentos de recta [**AA'**] e [**BB'**], contidos nas geratrizes **g** e **g'**, respectivamente, separam a parte da superfície lateral do cilindro que está iluminada da que está sombreada, pelo que, tendo em conta a direcção luminosa e a posição do cilindro, a base de referência está em sombra, bem como a superfície lateral compreendida entre os segmentos [**AA'**] e [**BB'**] (superfície cuja maior parte é invisível em ambas as projecções). A base de menor abcissa, bem como a superfície lateral compreendida entre os segmentos [**AA'**] e [**BB'**] cuja maior parte é visível em ambas as projecções, estão iluminadas. Na base disso, pode-se verificar claramente que a linha separatriz luz/sombra é [$\widetilde{AA'B'BA}$] (Fig. 117).

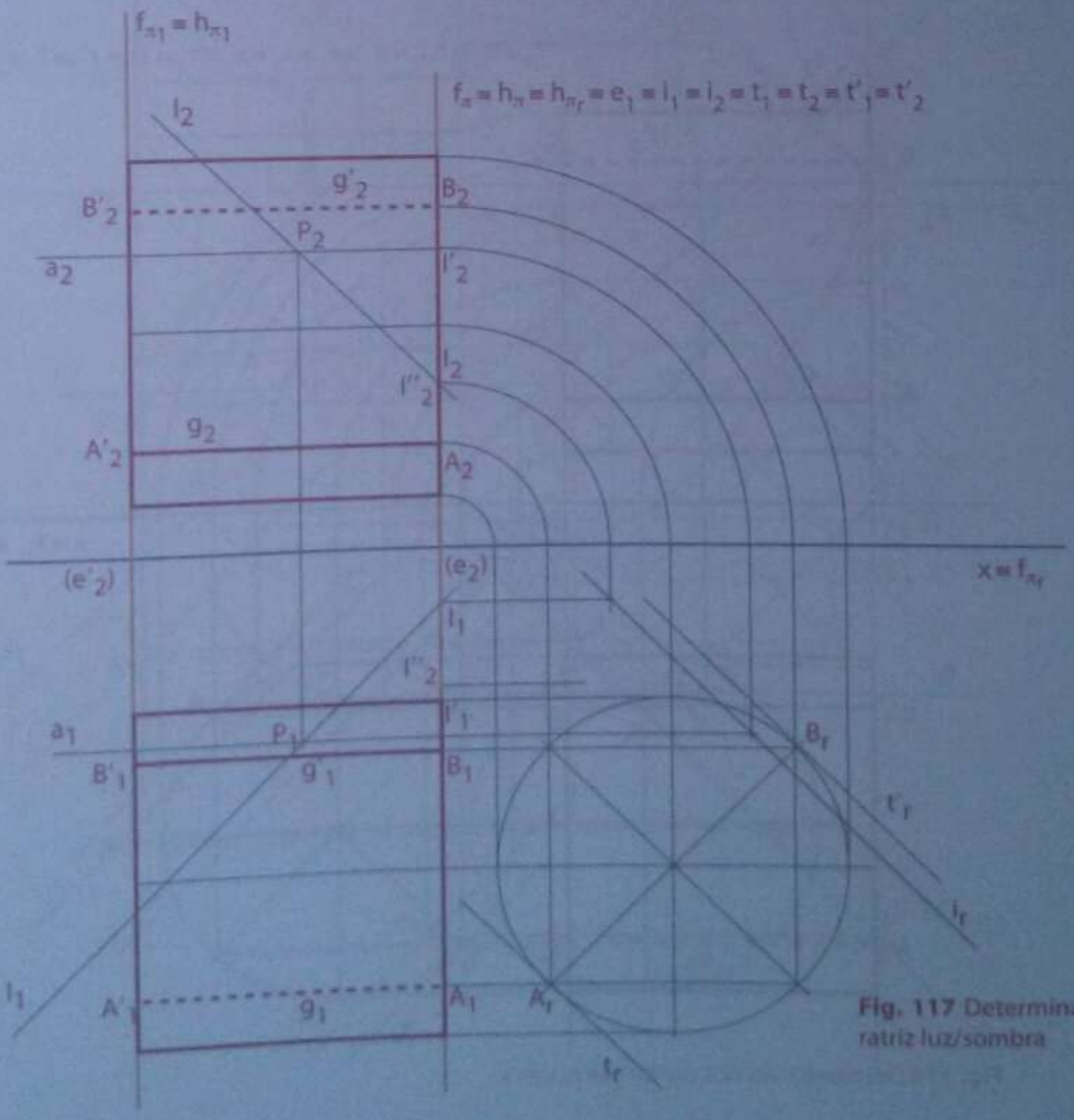


Fig. 117 Determinação da separatriz luz/sombra

No exercício anterior, o da determinação das sombras do prisma, após os quatros passos atrás expostos, passou-se imediatamente à determinação da sombra projectada.

Neste exercício, por se tratar de cilindro, a determinação da sombra projectada é antecedida pela averiguação da existência de pontos de quebra nas sombras dos dois arcos que integram a linha separatriz luz/sombra. Para o efeito, é necessário recorrer-se ao método do plano luz/sombra passante, que consiste, como já deve saber, no seguinte:

- Representar o plano luz/sombra passante, definido pela recta **l'**, passante, e o eixo **x**.
- Determinar a recta **i'**, de intersecção do plano luz/sombra passante com o plano π, da base de referência do cilindro. Na intersecção de **l'** com o plano π, obtém-se o ponto **l''** e, na intersecção do eixo ***x*** com o plano π, obtém-se o ponto **l'''**, cuja união origina a recta **i'**.
- Para analisar a situação da recta em relação à base de referência efectuou-se o rebatimento da recta **i'** sobre o mesmo plano e lado que a base de referência onde se constata que, efectivamente, a recta **i'** intersecta o arco da base de maior abcissa que integra a separatriz luz/sombra no ponto **C**.
- O mesmo foi efectuado em relação à base de menor abcissa, onde se pode verificar que a recta **i''** a intersecta no ponto **D'**, ponto de quebra do arco da base de menor abcissa que integra a linha separatriz luz/sombra. O ponto **D'** resulta da intersecção da recta **i''** com a circunferência que contorna a base de menor abcissa. Essa recta **i''** é resultado da intersecção do plano luz/sombra passante, definido pela recta **l'** e pelo eixo **x** com o plano π_1 da base de menor abcissa (Fig. 118).

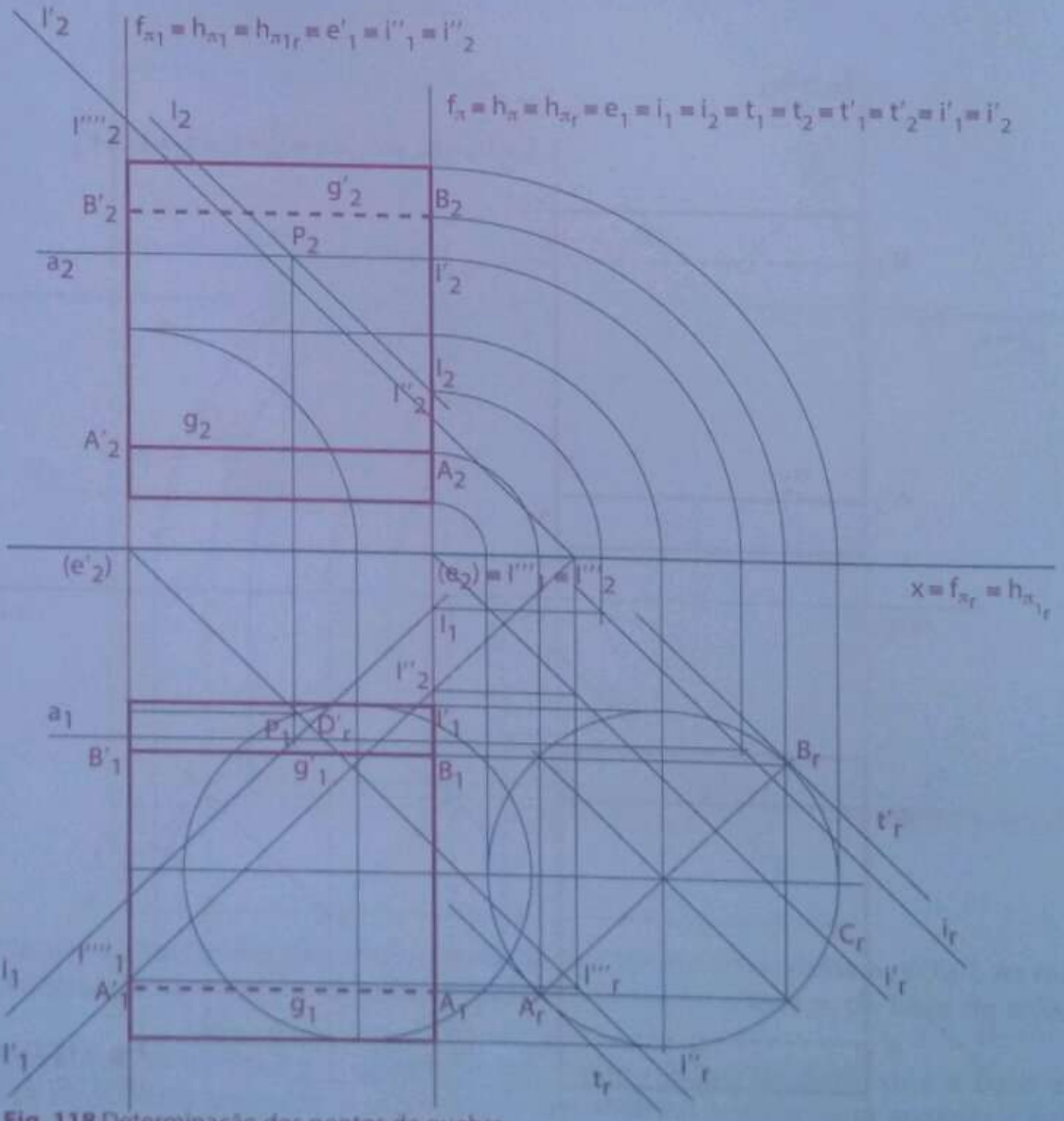


Fig. 118 Determinação dos pontos de quebra

Agora sim, já se pode determinar a sombra projectada do cilindro, através da determinação da sombra projectada da linha separatriz luz/sombra, [**AA'B'BA**].

Começa-se por determinar a sombra projectada dos segmentos [**AA'**] e [**BB'**], ao que se segue a determinação das sombras dos pontos de quebra dos arcos que integram a linha separatriz luz/sombra, nomeadamente, **C** e **D'**.

Na base da determinação das sombras projectadas de alguns pontos dos arcos que integram a linha separatriz luz/sombra, obteve-se a sombra projectada do contorno da sombra projectada do cilindro (Fig. 119).

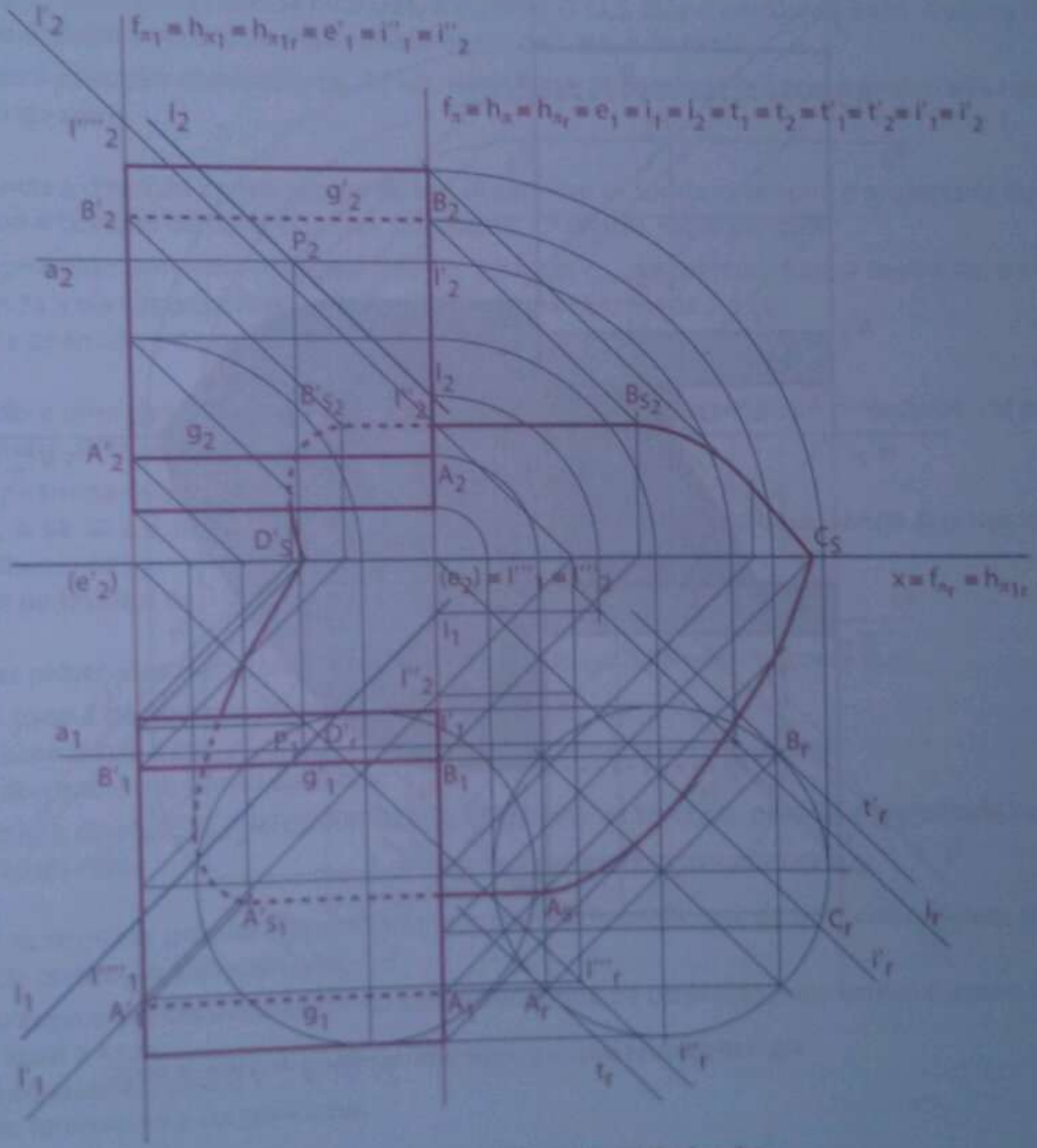


Fig. 119 Determinação da sombra da linha separatriz luz/sombra

Por fim, representa-se devidamente o contorno da sombra projectada e as cores das sombras própria e projectada do cilindro (Fig. 120).

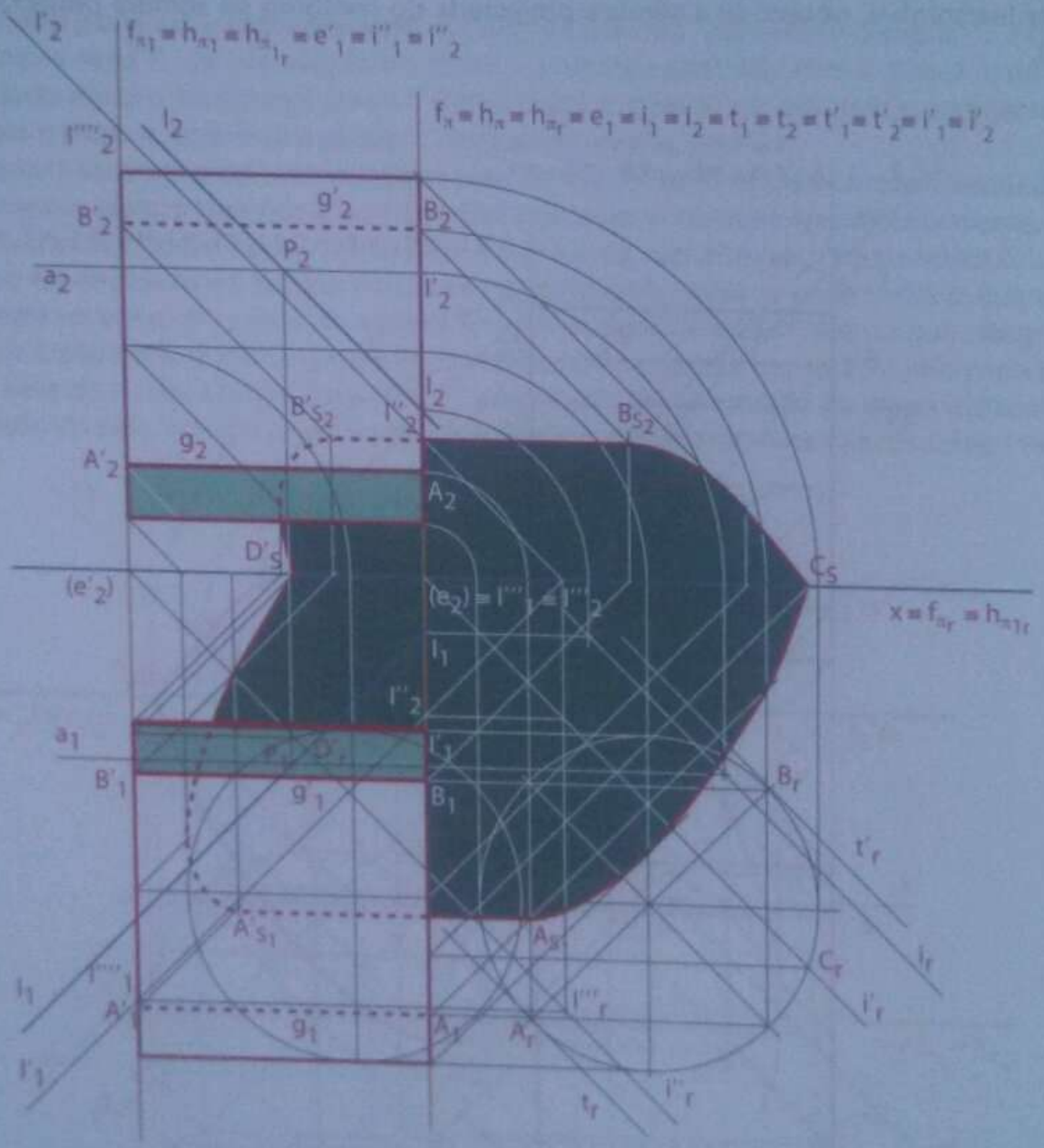


Fig. 120 Sombras própria e projectada do cilindro de bases de perfil.

Exercícios propostos

1.* Determine a sombra própria e a sombra projectada nos planos de projecção, duma pirâmide quadrangular regular, situado no ID, sabendo que:

- A pirâmide está assente, pela sua base, num plano de frente e **A** (0; 2; 7) e **B** (3; 2; 0) são vértices da base [**ABCD**].
- O vértice da pirâmide tem 8 cm de afastamento.
- A direcção luminosa é a convencional.

2. Desenhe as projecções duma pirâmide pentagonal regular, situa-se no ID, e com a base contida num plano de nível. A sua altura mede 6, cm e o seu vértice é invisível, em projecção horizontal. O centro da circunferência, circunscrita à base da pirâmide, é o ponto **O** (3,5; 6), e o raio mede 3 cm. A aresta lateral da pirâmide, que contém o vértice de maior afastamento da base, é de perfil.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do cone.

3. Tendo em conta a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada duma pirâmide hexagonal oblíqua de base, de nível, situada no 1.º diedro, sabendo que:

- A base da pirâmide tem uma diagonal que faz 20º com φ_0, de abertura para a esquerda, o centro da circunferência a ela circunscrita é o ponto **O** (0; 6; 0), e o raio mede 3,5 cm.
- O vértice da pirâmide é o ponto **V** (2; 8; 7).

4. Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombra própria e projectada nos planos de projecção duma pirâmide triangular regular, sabendo que:

- A base da pirâmide está contida num plano de perfil.
- Os pontos **A** (4; 6) e **B** (6; 1) são dois vértices do triângulo [**ABC**], da base, sendo **B** o seu vértice de maior afastamento.
- A altura da pirâmide é de 7 cm, e o seu vértice situa-se à direita da base.

5.* Construa as projecções dum cone de revolução, situado no ID, tendo em conta que:

- A base do cone é de frente, e o centro é o ponto **O** (5; 6).
- O raio da base mede 3 cm.
- O vértice do cone é um ponto do eixo *x*.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do cone.

6. Determine as sombras própria e projectada, nos planos de projecção, de um cone oblíquo, situado no 1.º diedro de projecção, sabendo que:

- A base do cone é um círculo assente no plano horizontal de projecção, cujo centro é ponto **O** (0; 6; 0), e de raio igual a 4 cm.
- O vértice do cone é o ponto **V** (- 4; 10; 7).
- A direcção luminosa é a convencional.

7. Represente, pelas suas projecções, um cone de revolução assente pela base num plano de perfil, sabendo que:

- O centro da base é o ponto **O** (4; 5), e o raio mede 3 cm.
- A altura do cone é de 6 cm, e o seu vértice situa-se à esquerda da base.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do cone.

8. Desenhe as projecções dum cone oblíquo, situado no 1.º diedro, sabendo que:

- A base pertence a ν_0, o seu raio mede 3,5 cm e o seu centro é o ponto **O**, de afastamento igual a 4 cm e abcissa 0 cm.
- O vértice do cone é o ponto **V** (6; 7; 7).

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do cone.

9. Construa as projecções de um prisma quadrangular regular, sabendo que:

- O prisma situa-se no ID, e está assente por uma das bases num plano de nível ν de cota 2 cm.
- As bases são quadrados de 4 cm de lado.
- Os lados estão igualmente inclinados em relação ao eixo **x**.
- A aresta lateral mais próxima do plano frontal de projecção tem 2 cm de afastamento e 6 cm de comprimento.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do prisma.

10.* Represente, pelas suas projecções, um prisma pentagonal oblíquo, sabendo que:

- Uma das bases do prisma esta assente no plano horizontal de projecção.
- Os centros das circunferências, circunscritas às bases, têm 5 cm de afastamento, e o raio mede 3,5 cm.
- A face mais a esquerda do prisma é de topo, e faz com ν_0 um ângulo de 75º de abertura para a direita.
- As arestas laterais são de frente.
- A altura do prisma mede 7 cm.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do prisma.

11. Desenhe as projecções dum prisma pentagonal oblíquo, situado no primeiro diedro de projecção, tendo em conta que:

- As bases do prisma são de perfil, sendo que uma delas inscreve-se numa circunferência de centro **O** (3; 5,5).
- Um dos vértices tem 1 cm de cota, e o raio mede 3 cm.
- As arestas laterais do prisma fazem 30º com ν_0, e 60º com φ_0, de abertura para a esquerda
- A outra base situa-se 4 cm à esquerda da primeira.

Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do prisma.

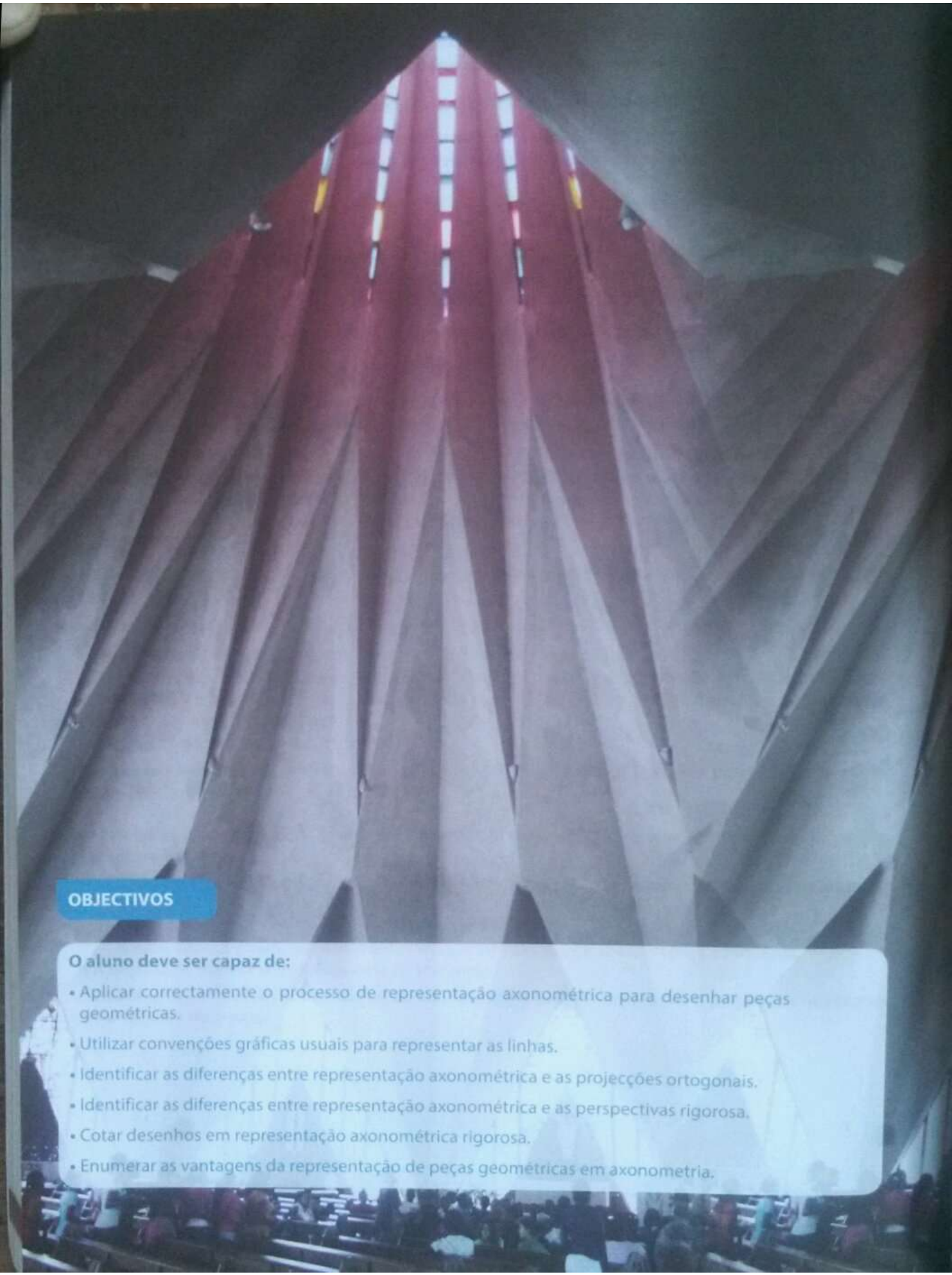


12. Determine as sombra própria e projectada dum cilindro de revolução, situado no ID, sabendo que:
    - O cilindro está assente, por uma das bases, no plano horizontal de projecção.
    - O centro de uma das bases do cilindro tem afastamento igual a 3,5 cm, o raio mede 2,5 cm, e altura do cilindro é de 6 cm.
    - A direcção luminosa é a convencional.

13. Represente, pelas suas projecções, um cilindro oblíquo, situado no ID, assente por uma das bases num plano de nível. O eixo do cilindro é oblíquo, e o centro de uma das bases é o ponto **O** (0; 4; 0,5). O raio das bases mede 3 cm, e centro da outra base é o ponto **O'** (4; 8; 6).

    Considerando a direcção convencional da luz, determine as sombras própria e projectada nos planos de projecção do prisma.

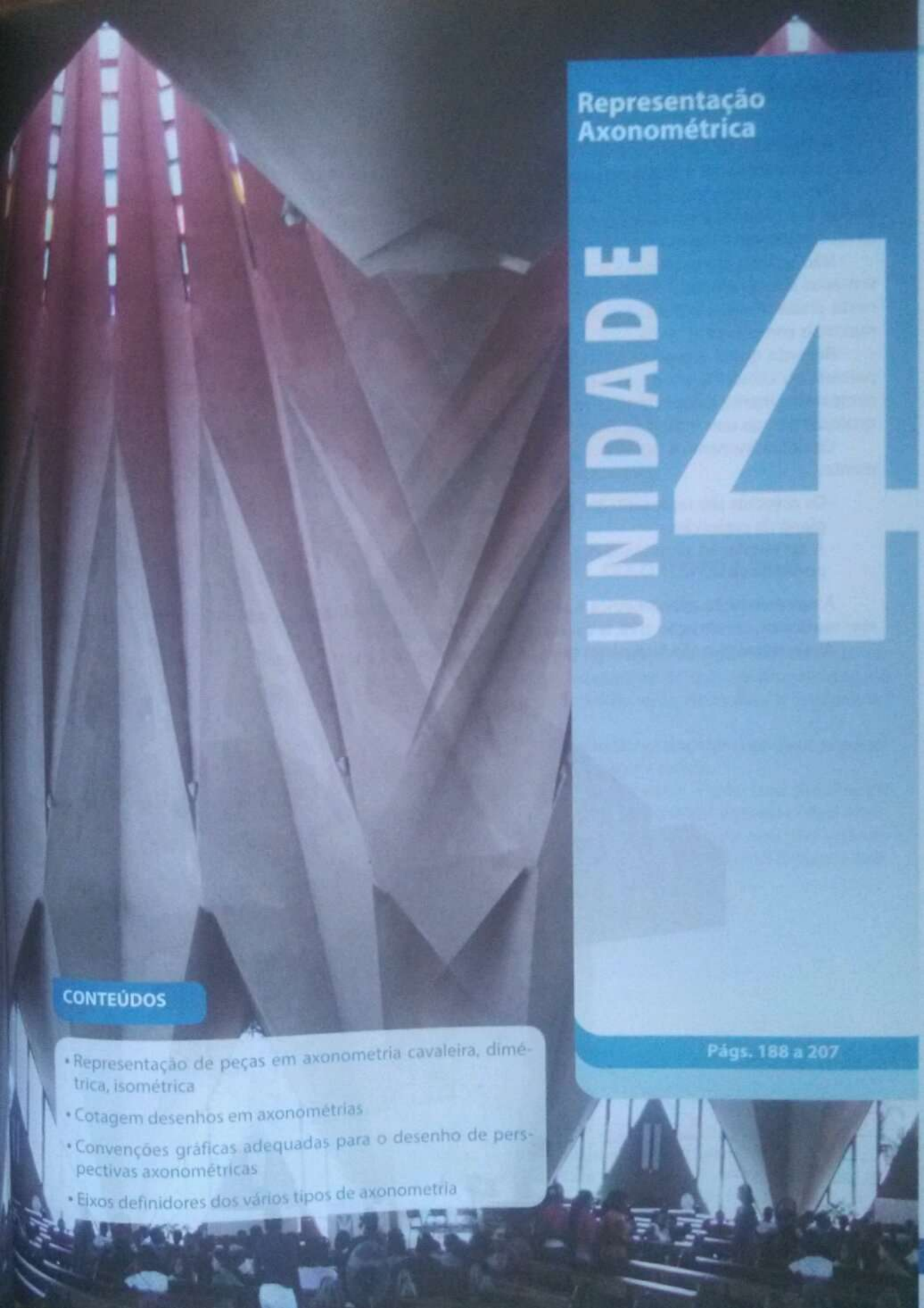
14.* Dado um cilindro oblíquo, determine as suas sombras própria e projectada nos planos de projecção, tendo em consideração que:
    - Os planos das bases são de perfil.
    - Os centros das bases são os pontos **O** (0; 4; 3,5) e **O'** (5; 5; 6,5), e o raio das bases mede 3 cm.
    - A direcção luminosa é a convencional.



OBJECTIVOS

O aluno deve ser capaz de:

- Aplicar correctamente o processo de representação axonométrica para desenhar peças geométricas.
- Utilizar convenções gráficas usuais para representar as linhas.
- Identificar as diferenças entre representação axonométrica e as projecções ortogonais.
- Identificar as diferenças entre representação axonométrica e as perspectivas rigorosa.
- Cotar desenhos em representação axonométrica rigorosa.
- Enumerar as vantagens da representação de peças geométricas em axonometria.



Representação Axonométrica

UNIDADE 4

CONTEÚDOS

- Representação de peças em axonometria cavaleira, dimétrica, isométrica
- Cotagem desenhos em axonométrias
- Convenções gráficas adequadas para o desenho de perspectivas axonométricas
- Eixos definidores dos vários tipos de axonometria

Págs. 188 a 207

Introdução

A disciplina de Desenho e Geometria Descritiva, iniciada na 11.ª Classe, desenvolveu o seu estudo exclusivamente sobre a dupla projecção ortogonal até à última unidade temática, sombras.

Nesta unidade temática far-se-á a abordagem dum outro tipo de representação bidimensional, de formas bi e tridimensionais, que existem no espaço (Fig. 1), **perspectivas axonométricas**, que, no seu conjunto, constituem a representação axonométrica.

Não se trata de conteúdos novos, pois na 9.ª Classe já se falou sobre axonometrias e foram representadas figuras planas e sólidos geométricos na unidade temática, **formas em axonometria**, pelo que nesta unidade serão aprofundados esses conhecimentos com a representação em axonometria de formas mais complexas.

Recorde que a representação de formas em axonometria está integrada no sistema de projecção paralela ou cilíndrica. Esta tem o mérito de apresentar uma imagem que se aproxima ao objecto real, comparativamente à dupla projecção ortogonal. As perpectivas permitem a compreensão da imagem por qualquer pessoa sem necessitar de treino específico para tal.

Comparativamente à representação diédrica, as **perspectivas** têm duas grandes vantagens, nomeadamente:

- Os objectos são representados por uma única projecção, o que pressupõe a existência de um único plano de projecção.
- A apresentação simultânea das três dimensões do objecto e as relações entre elas, em função do ponto de vista.

A representação axonométrica é aplicada em várias áreas profissionais, especialmente nas **engenharias mecânica, construção civil, arquitectura** (Fig. 2) e **designer industrial**.

As axonometrias são facilmente executadas com recurso à régua e esquadros.

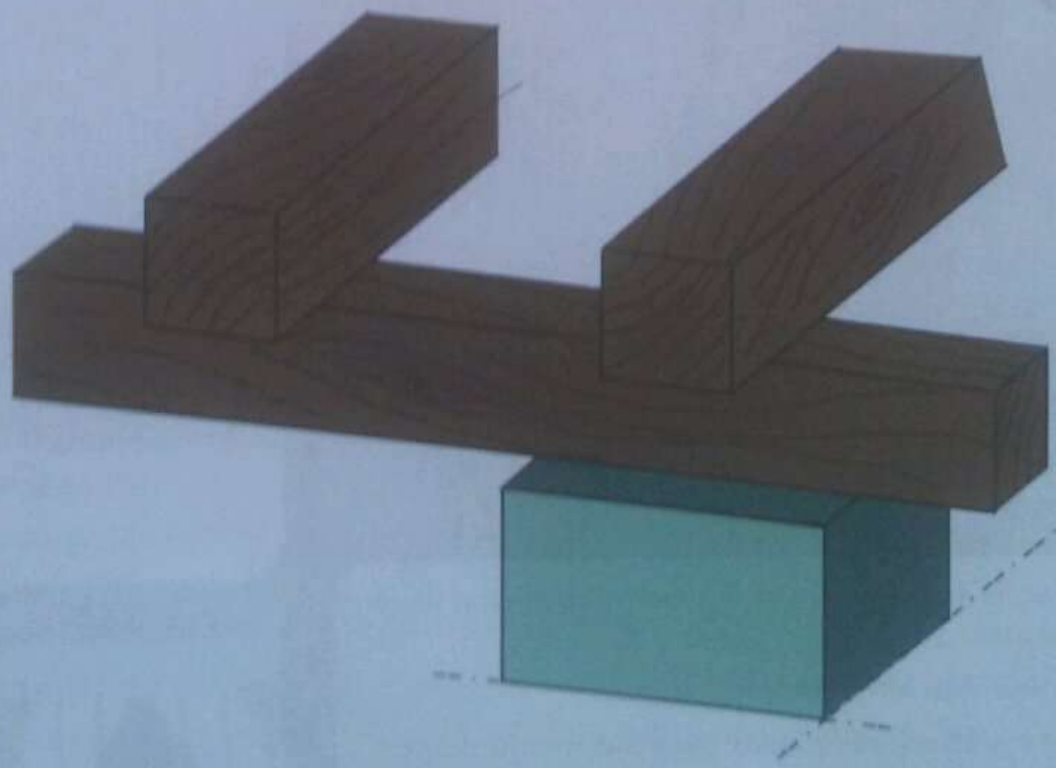


Fig. 1 Objectos representados em axonometria.

A representação de um objecto em axonometria respeita passos, normas específicas e convenções gráficas adequadas a este tipo de representação. A execução dum desenho, em axonometria, requer um bom domínio do traçado de paralelas e perpendiculares, usando régua e esquadro, e marcação de ângulos.

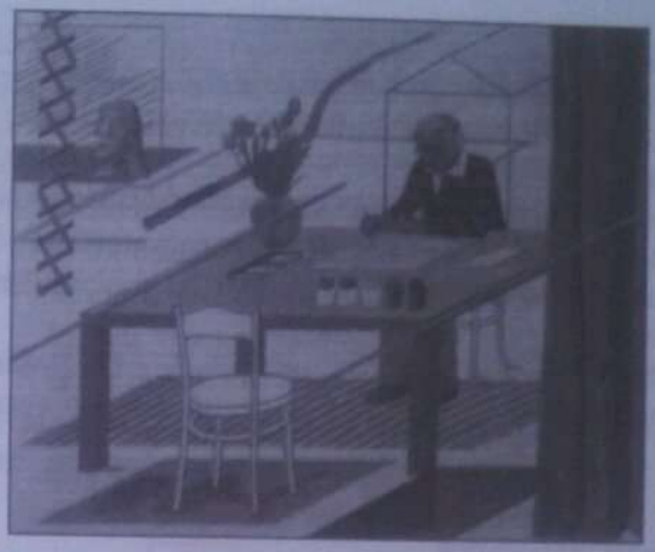


Fig. 2 Espaço representado com o recurso à perspectiva axonométrica.

Diferença entre representação em axonometria e perspectiva rigorosa

Na 10.ª Classe, na unidade temática Formas em perspectiva rigorosa, teve a oportunidade de ver e representar formas em perspectiva rigorosa e, certamente, apercebeu-se de que ela proporciona, de forma directa e imediata e sem qualquer tipo de aprendizagem prévia, uma visão clara e intuitiva do objecto.

A **perspectiva rigorosa** (Fig. 3), tal como as axonometrias, caracteriza-se por, como se disse, produzir imagens próximas do objecto real, cuja leitura não exige uma aprendizagem prévia .

A diferença entre elas é que a perspectiva rigorosa dá-nos uma imagem muito mais próxima de como a vista capta o objecto, uma imagem quase fotográfica do modelo, enquanto a axonometria introduz convenções que se destinam a simplificar a representação, o que origina imagens que, não estando próximas da realidade observada, dão-nos a ideia geral da forma do objecto, onde é possível fazer a indicação das dimensões do objecto.



Fig. 3 Imagem fotográfica, semelhante a que uma perspectiva rigorosa produz.

Diferença entre representação em axonometria e projecções ortogonais

A representação das **projecções ortogonais** é uma representação bastante rigorosa e a sua informação pode ser complementada com a indicação das dimensões do objecto. O seu defeito é mostrar pedaços que exigem um exercício de construção mental das partes para perceber a forma global do objecto representado, (Fig. 4) o que exige tempo e, muitas vezes, requer um treino específico.

Pelo contrário, a **perspectiva axonométrica** consegue, com maior simplicidade e rapidez de execução, dar uma ilusão da forma do objecto, através de uma imagem que se aproxima da imagem captada pela nossa visão. O seu resultado são imagens que podem ser descodificadas por qualquer pessoa sem necessitar de um treino específico.

A representação dum objecto em **projecções ortogonais** é geralmente utilizada pelos projectistas para apresentarem graficamente os seus projectos às autoridades para apreciação.

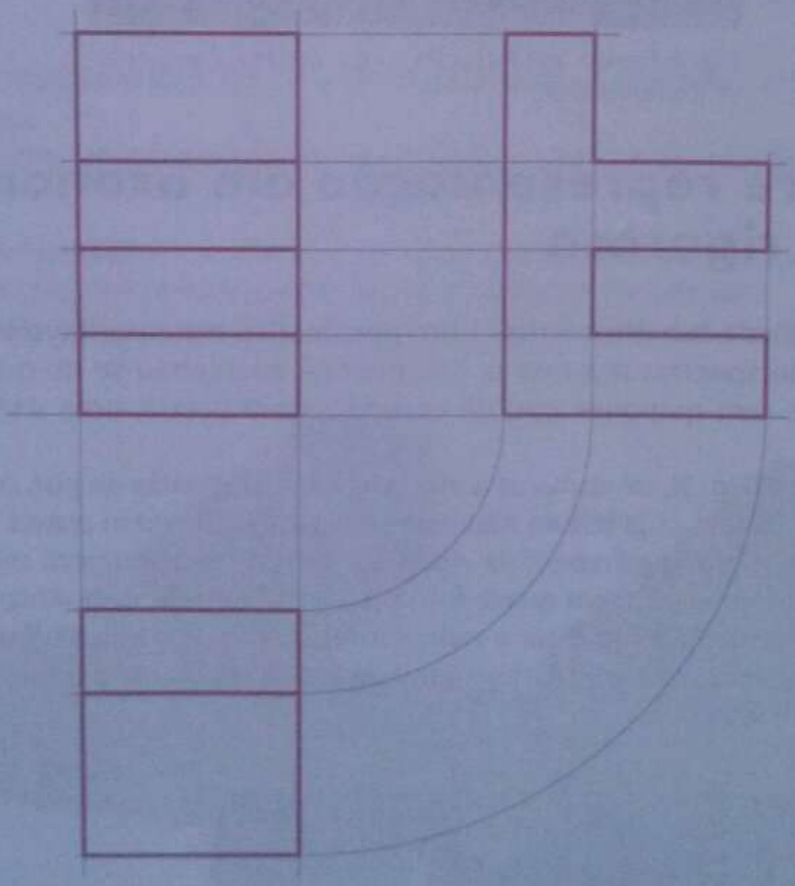


Fig. 4 Projecções ortogonais duma peça geométrica

Modalidades de perspectiva axonométrica

O desenho de formas, em axonometria, é composto por várias modalidades a saber: perspectiva cavaleira, perspectiva isométrica, perspectiva dimétrica e perspectiva trimétrica. Estas perspectivas diferenciam-se umas das outras quanto ao ângulo marcado para a definição dos vários eixos e quanto à manutenção ou redução das medidas.

Actividades que antecedem a representação duma peça em axonometria

A observação atenta, a recolha de informação, o levantamento de medidas e a exploração da peça através de desenhos feitos à mão livre devem anteceder a representação dum objecto em axonometria. Os desenhos à mão livre devem ser realizados explorando várias vistas da peça a desenhar e não devem apresentar pormenores supérfluos capazes de dificultar a leitura do desenho.

A realização destas actividades exploratórias é fundamental porque contribui de forma decisiva para melhorar a percepção da peça que vai ser representada em axonometria e consequentemente ajuda a obter uma axonometria bem executada.

Desenho de uma peça em perspectiva cavaleira

A representação de peças geométricas, em perspectiva cavaleira, é uma forma cómoda e sugestiva, (Fig. 5) e o seu domínio permite representar com rapidez vários objectos.

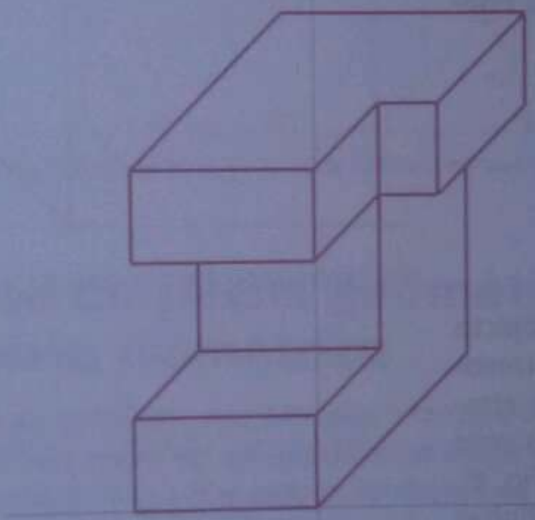
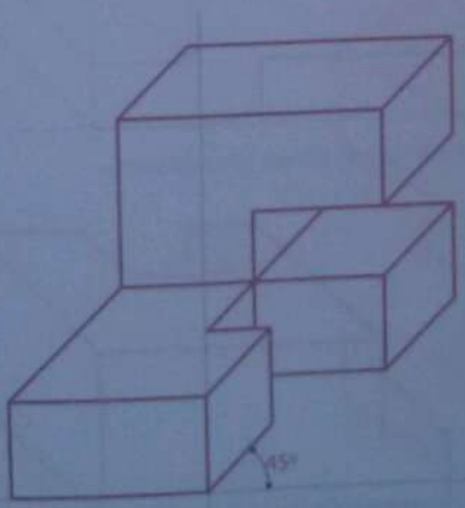


Fig. 5 Peça geométrica representada em perspectiva cavaleira.

Método de representação em perspectiva cavaleira



A perspectiva cavaleira, é um meio auxiliar precioso para clarificar pormenores construtivos ou para mostrar intenções de projectos que, com recursos a outros métodos de representação, seriam difíceis de decifrar. Explicando o comportamento de uma representação em axonometria cavaleira a partir de um cubo envolvente, notamos que uma face do cubo aparece paralela à linha de horizonte, pelo que aparece em verdadeira grandeza.

Os ângulos que as linhas de profundidade formam com a horizontal são de 45º (Fig. 6), e a medida da dimensão lateral aparece reduzida a metade da sua verdadeira dimensão.

Fig. 6 Representação duma forma em perspectiva cavaleira

Passos para a representação de uma perspectiva cavaleira

A representação dum objecto, em perspectiva cavaleira, deve ser realizada seguindo os passos abaixo:

1. Observar atentamente o objecto antes de começar a desenhar e procurar compreender as linhas que o definem.
2. Fazer desenhos à mão livre do objecto, escolhendo várias posições, a fim de se identificar a posição que melhor esclarece a forma do objecto.

Os conhecimentos que possui sobre o desenho à vista devem permitir fazer uma representação à mão livre, convencional e simplificada, com clareza e sem pormenores supérfluos que dificultem a leitura do desenho.

3. Representar os três eixos que definem a perspectiva da axonometria cavaleira, sendo um vertical, um horizontal e outro fazendo 45° com a linha horizontal.

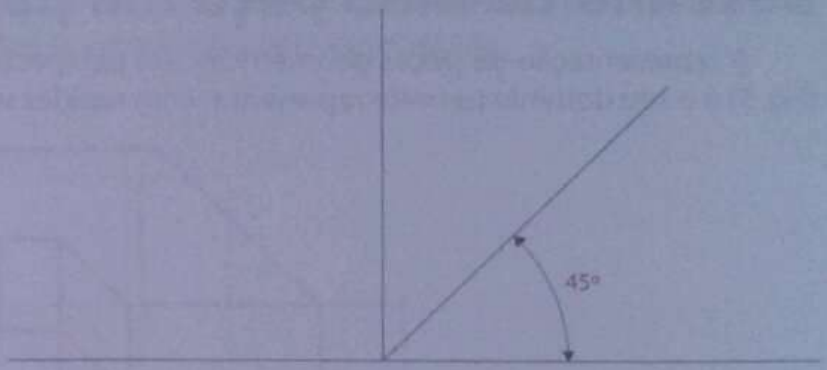


Fig. 7 Eixos da perspectiva cavaleira.

4. Enquadrar as várias faces do objecto nos três eixos definidos anteriormente (Fig. 7), desenhar o objecto através de linhas paralelas traçadas com a ajuda da régua e esquadro (Fig. 8), mantendo nesta fase todas as linhas a traço fino, tendo em conta que as dimensões das linhas que estão no eixo oblíquo sofrem uma redução para a metade, ou seja, essas dimensões devem ser divididas por dois.

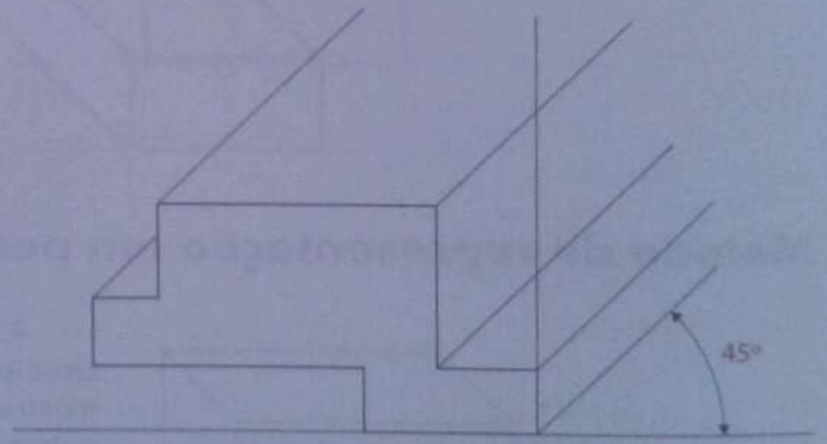


Fig. 8 Construção duma perspectiva cavaleira

5. Apagar as linhas desnecessárias e utilizar as convenções gráficas usuais adoptadas para definir o tipo de linha, a sua espessura e a qualidade expressiva (Fig. 9).

Todas as linhas devem ser legíveis, as linhas que definem o contorno visível do objecto devem estar a traço grosso contínuo, e as linhas auxiliares devem estar a traço fino contínuo.

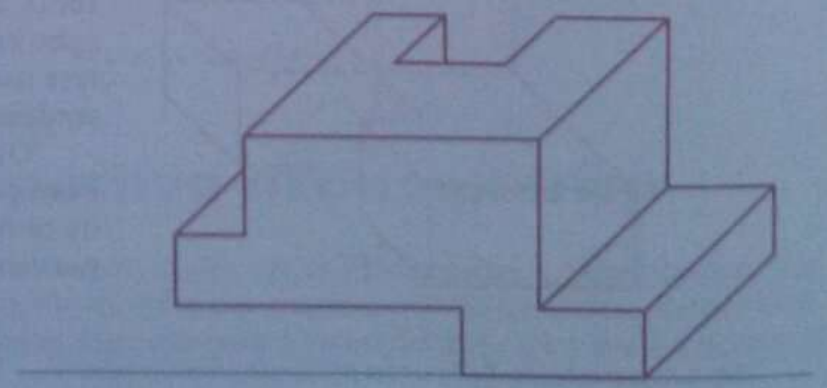


Fig. 9 Peça representada em axonometria cavaleira.

Representação da circunferência em perspectiva cavaleira

Alguns objectos a serem desenhados, em perspectiva cavaleira, apresentam contornos circulares, sofrem deformações quando estão contidos nas faces que contêm o eixo que está na linha obliqua que faz 45º. O desenho destes contornos circulares pode ser executado enquadrando as circunferências em vários quadrados representados em axonometria cavaleira, conforme os eixos que definem o quadrado (Fig. 10).

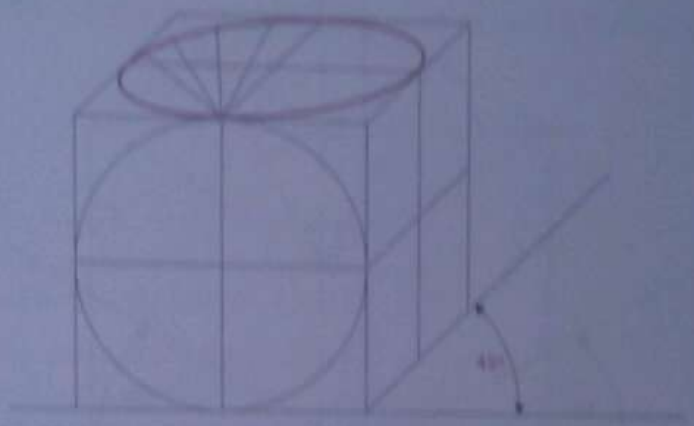


Fig. 10 Representação da circunferência em axonometria cavaleira

Representação de peças geométricas em axonometria isométrica

Quando precisamos de descrever, com precisão, a forma e o tamanho de um objecto podemos usar uma axonometria isométrica, porque ela vai-nos dar uma imagem próxima do que a visão nos proporciona ao olharmos para o objecto (Fig. 11), e porque também nos permite dar indicações sobre as dimensões reais do objecto.

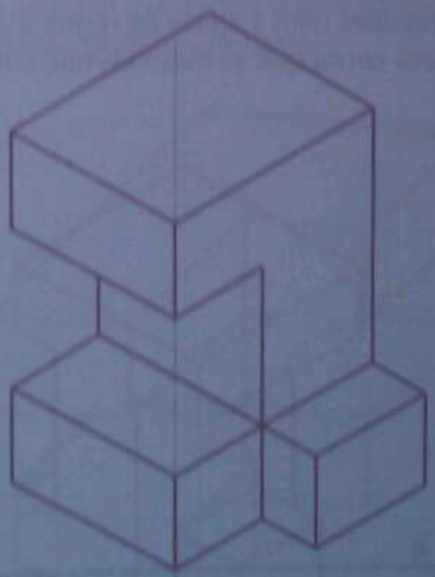


Fig. 11 Representação duma forma geométrica em axonometria isométrica

Método de representação de uma perspectiva isométrica

A referência que foi dada anteriormente é de que uma axonometria isométrica é uma ferramenta gráfica adequada para indicar com precisão a forma e o tamanho de um objecto. A axonometria isométrica assenta numa estrutura com três linhas fundamentais, nomeadamente uma linha vertical e duas linhas obliquas, que formam ângulos de 30º com a posição horizontal (Fig. 12). Neste código de representação não há nenhuma dimensão que sofre redução como acontece na axonometria cavaleira.

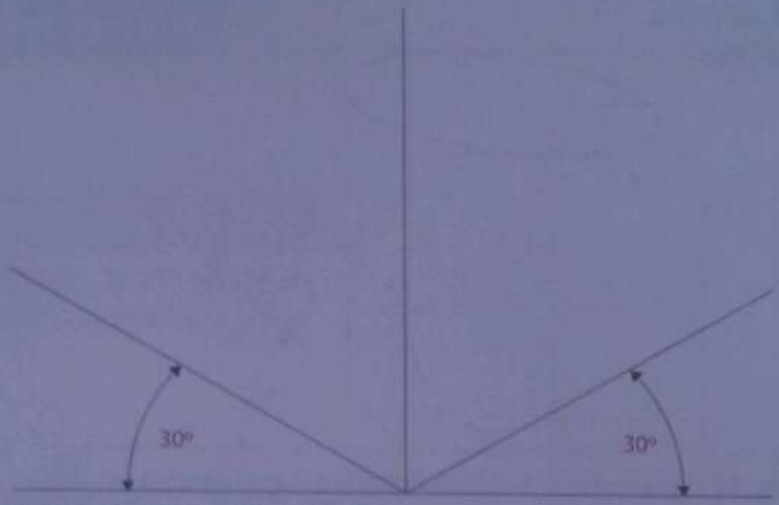


Fig. 12 Eixos da perspectiva isométrica

Passos para a representação de uma perspectiva isométrica

A representação dum objecto, em perspectiva isométrica deve ser realizada seguindo os mesmos passos arrolados na perspectiva cavaleira, excepto dois passos que dizem respeito às amplitudes dos ângulos que os eixos fazem e as dimensões de alguns eixos, nomeadamente os pontos 3 e 4.

3. Representar os três eixos que definem a estrutura da perspectiva axonométrica isométrica, sendo um vertical e outros dois fazendo 30º com a linha horizontal.
4. Enquadrar as várias faces do objecto nos três eixos definidos anteriormente, e desenhar o objecto através de linhas paralelas traçadas com a ajuda de régua e esquadro, mantendo nesta fase todas as linhas a traço fino, tendo em conta que as medidas não sofrem nenhuma redução (Fig. 13).

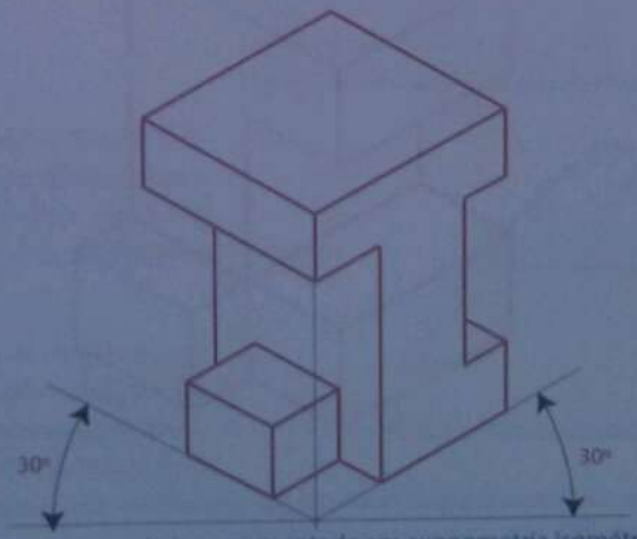


Fig. 13 Forma geométrica representada em axonometria isométrica.

Representação da circunferência numa perspectiva isométrica

Os contornos circulares, quando desenhados em axonometria isométrica, transformam-se em elipses, mas por comodidade e simplificação as elipses podem dar lugar a ovais de quatro centros, que apresentam um resultado gráfico próximo daquele que as elipses nos dão.

A construção de ovais requer o enquadramento da circunferência num quadrado, em axonometria isométrica, seguida da construção da oval a partir deste quadrado (Fig. 14).

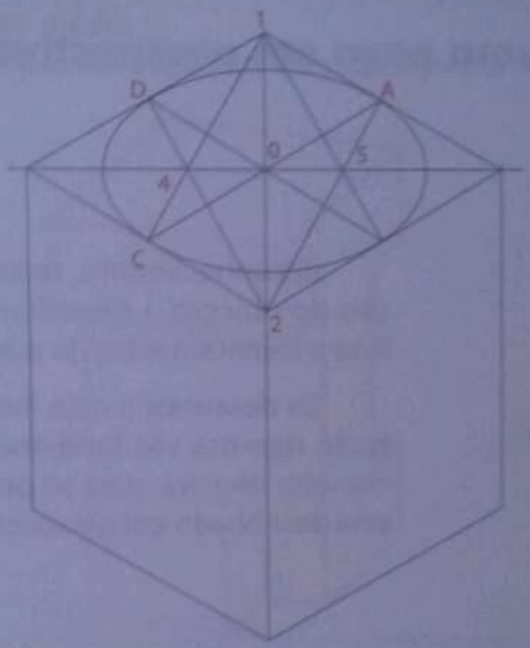


Fig. 14 Enquadramento e desenho de uma circunferência em axometria isométrica

Representação da peça numa perspectiva dimétrica

A representação, em perspectiva dimétrica, possibilita ter uma visão intuitiva do objecto, com forte grau de proximidade do real, e permite perceber através de uma única imagem a forma do objecto (Fig. 15), não sendo necessário que quem observa o desenho tenha passado por treino específico, como acontece com certos códigos de representação gráfica rigorosa.

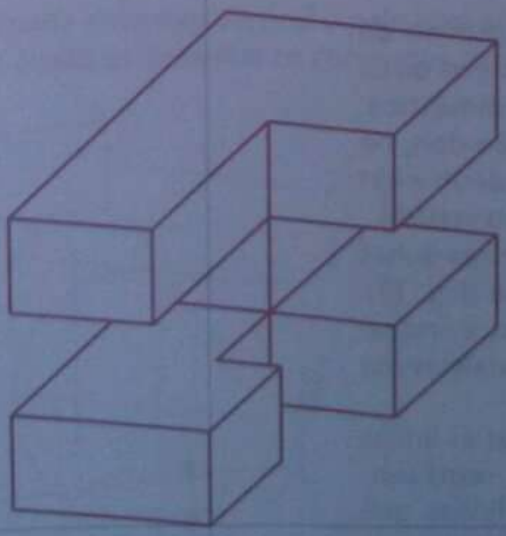


Fig. 15 Forma geométrica representada em axonometria dimétrica.

Método de representação de uma perspectiva dimétrica

A **axonometria dimétrica** assenta em três eixos, nomeadamente um vertical e dois oblíquos que formam com a posição horizontal ângulos iguais a 7º e 42º.

As medidas pertencentes ao eixo que faz 42º sofrem redução de dimensões para metade pelo que na execução estas medidas devem ser divididas por dois, ganhando-se com esta redução uma visão mais próxima do real e mais agradável à vista.

Execução do desenho duma peça em perspectiva dimétrica

Esboço à mão livre da peça

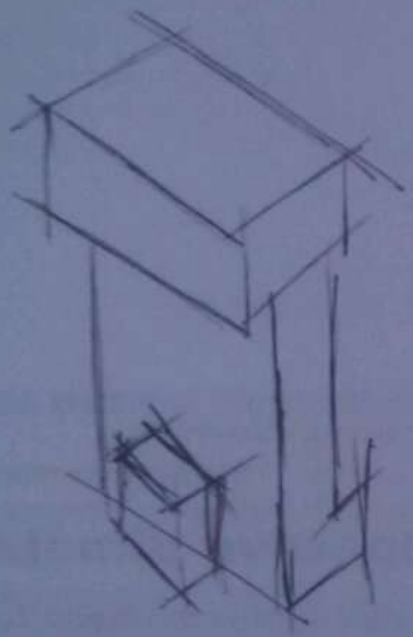


Fig. 16 Esboços que antecedem o desenho rigoroso.

Reconhecimento, recolha de informação e exploração do objecto a desenhar, através de desenhos à mão livre e levantamentos de medidas.

Os desenhos à mão livre que antecedem a representação rigorosa são fundamentais, porque contribuem, de maneira decisiva, para se perceber a configuração do que será desenhado em perspectiva dimétrica (Fig. 16).

Desenho rigoroso da peça

Começamos o desenho rigoroso da peça indicando os três eixos sobre os quais se estrutura a representação dimétrica. Recordamos que os três eixos são dois, na posição oblíqua a fazer ângulos de 7º e 42º com a horizontal, e um na posição vertical.

Seguidamente, desenhamos as linhas que definem a peça a traço fino (Fig. 17), com a ajuda da régua e esquadro, e enquadrados nos eixos ou em linhas paralelas aos eixos.

No final, é necessário apagar as linhas de construção desnecessárias, representar a traço contínuo grosso as linhas que definem o contorno visível do objecto, e as linhas auxiliares a traço fino.

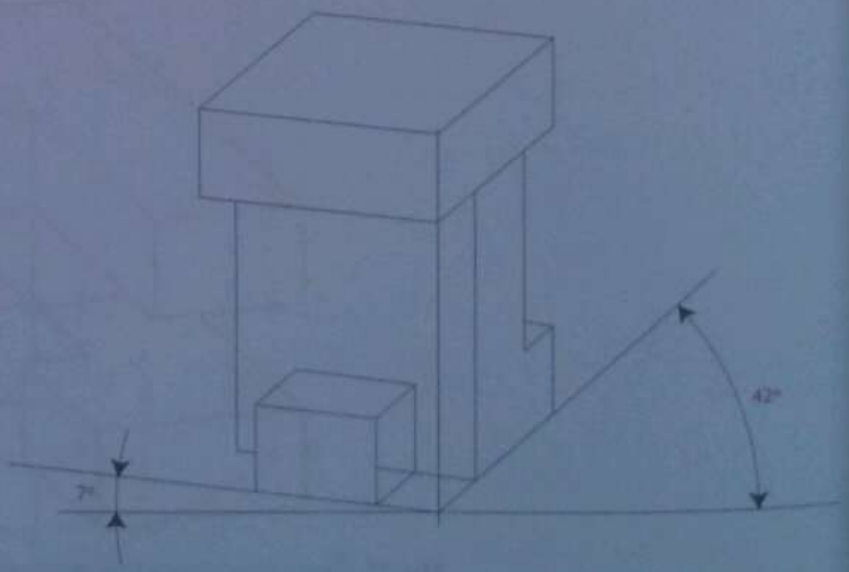


Fig. 17. Desenho da forma com linhas a traço fino

Definição da espessura das linhas

A definição da espessura das linhas e tipos de traço a utilizar destina-se a distinguir as linhas com maior significado das linhas com menor significado para facilitar a leitura e compreensão do desenho (Fig. 18).

As linhas que definem o contorno do objecto e que se encontram na parte visível devem ser representadas utilizando um traço grosso contínuo.

As linhas que representam as arestas não visíveis do objecto devem ser desenhadas utilizando um traço interrompido de espessura média.

No caso em que haja interesse em indicar os eixos de simetria deve-se utilizar traço-ponto fino.

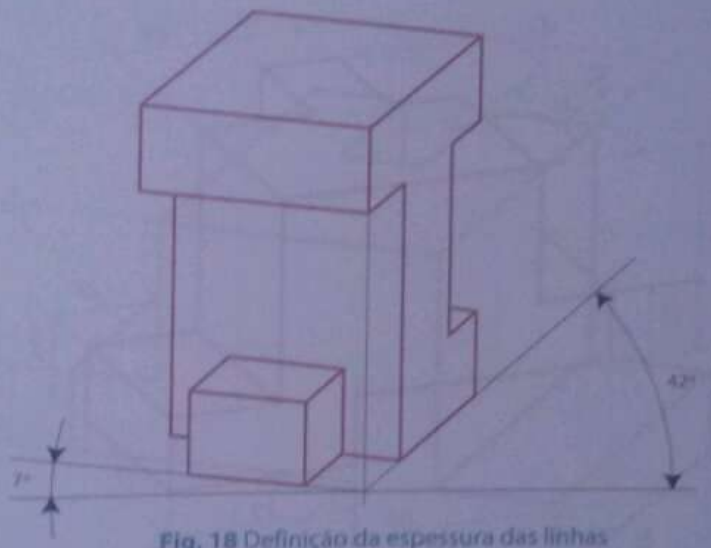


Fig. 18 Definição da espessura das linhas

Desenho da circunferência em perspectiva dimétrica

Para representar circunferências ou arcos de circunferências durante a execução de desenhos, em axonometria dimétrica, é necessário obedecer a certas normas.

O desenho de circunferências ou seus arcos depende do seu enquadramento em quadrados, desenhados em dimétrica, que variam tendo em conta o grau de deformação sofrida por cada face da axonometria dimétrica (Fig. 19).

Tendo em conta que a face formada pelo eixo vertical e pelo eixo oblíquo, que faz 7° com a horizontal, sofre uma pequena deformação aceita-se desenhar os contornos circulares nela existentes mantendo a sua forma.

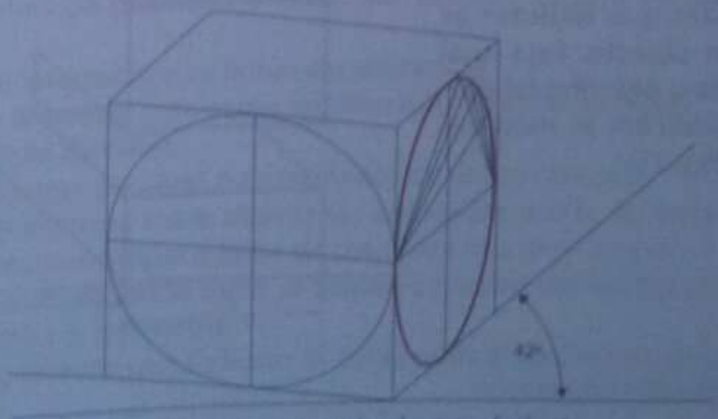


Fig. 19 Enquadramento e desenho da circunferência

Cotagem de peças em axonometria

A **cotagem** é um processo que consiste em indicar as medidas dum determinado objecto, (Fig. 20), com vista à compreensão da sua dimensão ou para permitir o fabrico dum objecto a partir do seu desenho.

Existe um conjunto de regras ou normas que devem ser seguidas para indicar as dimensões num desenho; tais regras têm como finalidade uniformizar a colocação de dimensões num desenho de uma peça, executado em projecções ortogonais. Elas facilitam o trabalho de quem vai ler, interpretar ou utilizar o desenho, evitando-se assim a existência de ambiguidades no trabalho.

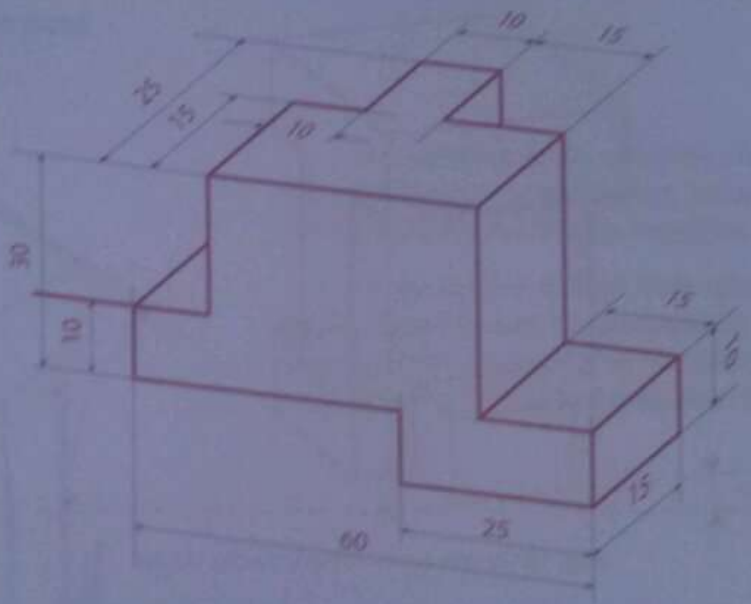


Fig. 20 Forma desenhada em axonometria e cotada.

Elementos da cotagem

- **Linhas de cota**: são linhas contínuas onde se inscrevem as medidas, indicam onde começa e onde termina a medida indicada pelos algarismos.
- **Linhas de referência ou de chamada**: são linhas que indicam os limites das linhas de cota.
- **Setas**: são os elementos que delimitam as linhas de cota.
- **Cotas**: são medidas que indicam as dimensões de um objecto. Seja qual for a escala em que o desenho foi executado as cotas indicam as medidas reais do objecto (Fig. 21).

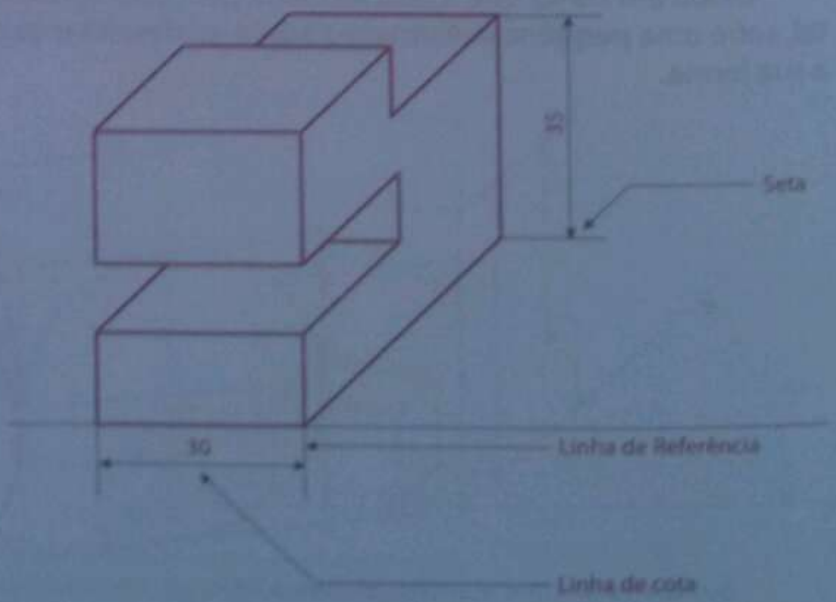


Fig. 21 Elementos de cotagem

Princípios básicos para cotagem de peças em axonometria

Ao fazer-se a cotagem dum desenho (Fig. 22) em axonometria, deve-se garantir que a informação das dimensões do desenho seja rigorosa e completa.

Deve-se manter a clareza e o rigor do desenho para facilitar a comunicação, não dificultando a sua leitura e compreensão.

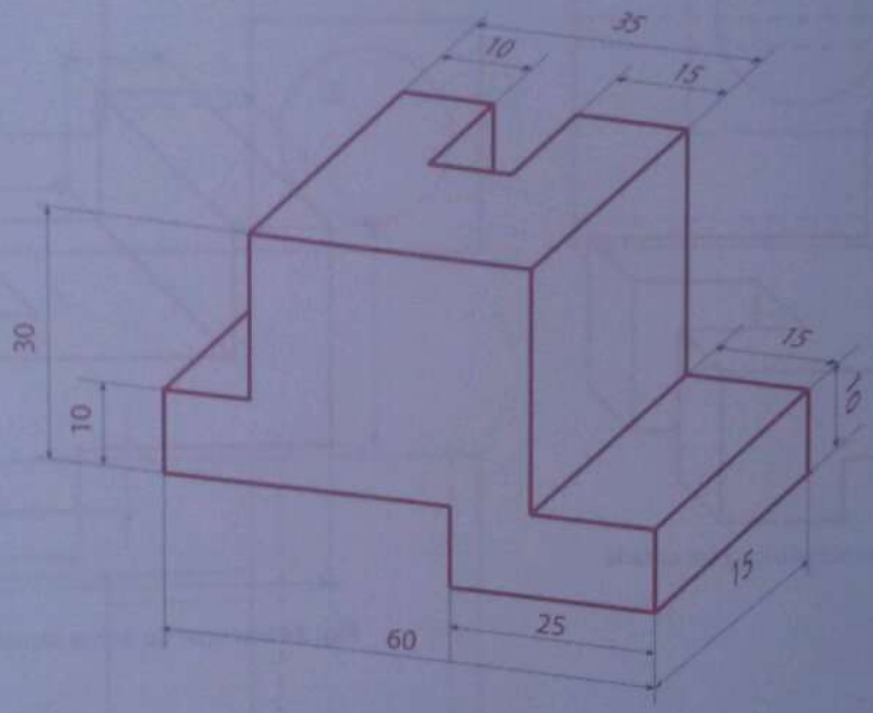


Fig. 22 Forma desenhada, em axonometria, com indicação das cotas

Princípios básicos

1. As linhas de cotas paralelas a uma direcção principal devem ter o mesmo espaço de separação, ser limitadas por linhas de chamada e estas, por sua vez, devem ser paralelas a outra direcção principal.
2. As linhas de cota não intersectam as linhas de referência.
3. Não se devem traçar linhas de cota como continuação da linha da figura.
4. Deve-se evitar repetição de cotas.
5. Deve evitar-se sempre que possível, o cruzamento de linhas de cota.
6. Os algarismos que indicam as cotas devem ser colocados acima da linha de cota. Noutros casos, pode ser conveniente interromper a linha de cota para inscrever a cota.
7. Para indicar as cotas num desenho deve-se utilizar a mesma unidade de medida. As medidas mais frequentes são o metro e o milímetro.
8. As dimensões dos algarismos que indicam as cotas num desenho devem ser do mesmo tamanho.

Execução da cotagem

A capacidade de executar correctamente uma cotagem desenvolve-se pela prática, por isso é importante praticar os princípios teóricos da cotagem que foram atrás enunciados.

1. Realizar o desenho da peça em perspectiva axonométrica (Fig. 23).
2. Marcar de seguida todas as linhas de cota suficientes e as linhas de chamada necessárias para a indicação de todas as medidas do objecto (Fig. 24).
3. Depois da marcação de linhas suficientes para as medidas, indicar as várias dimensões do objecto (Fig. 25).

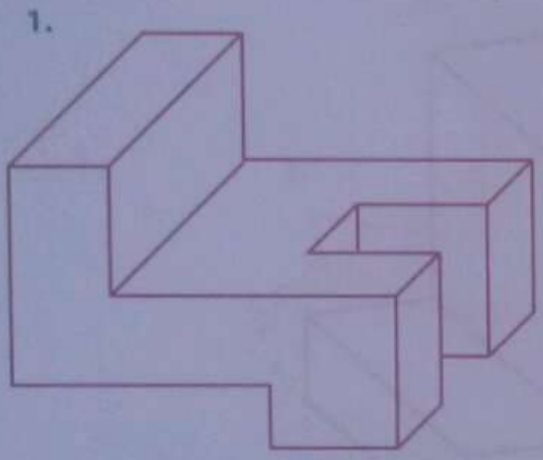


Fig. 23 Forma axonométrica a ser cotada.

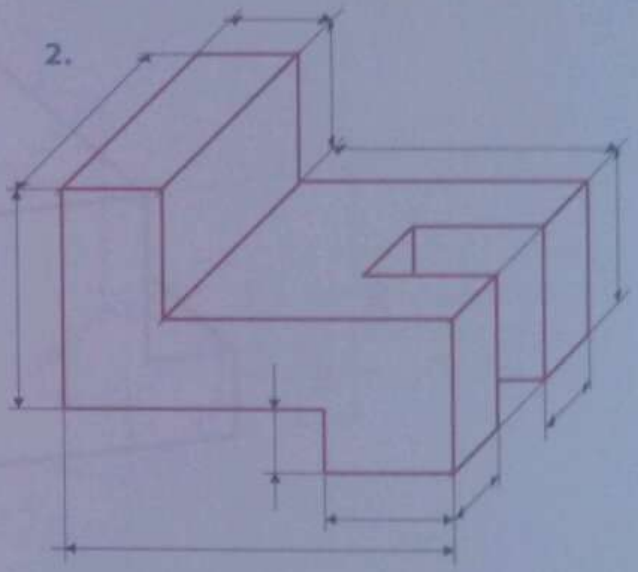


Fig. 24 Inscrição de linhas de cota e linhas de cota

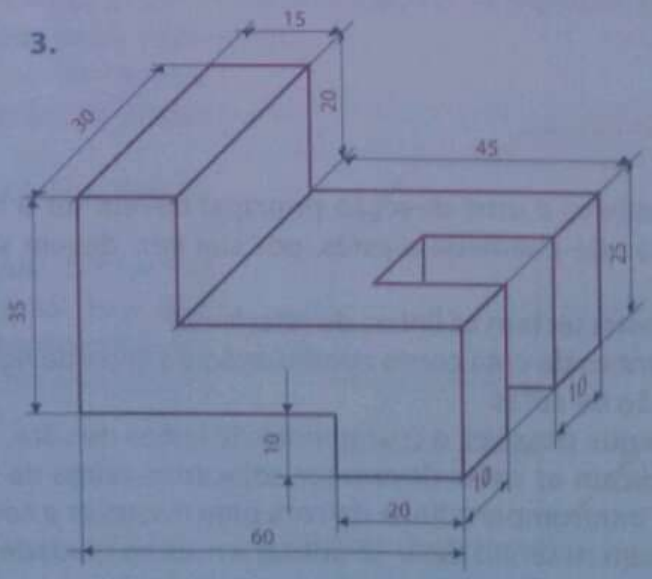
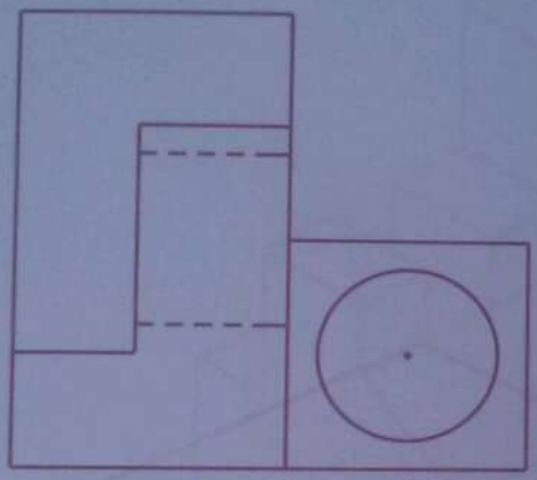
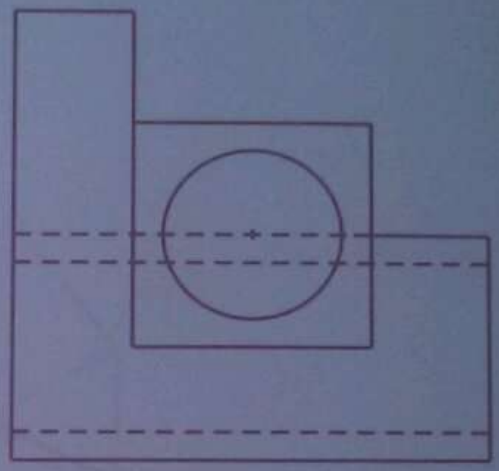
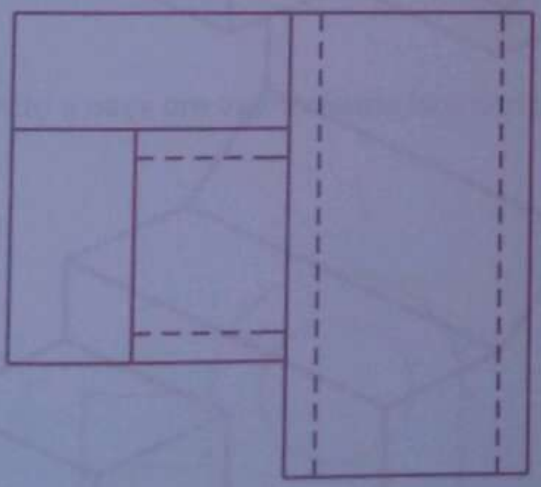


Fig. 25 Forma desenhada em axonometria e cotada.

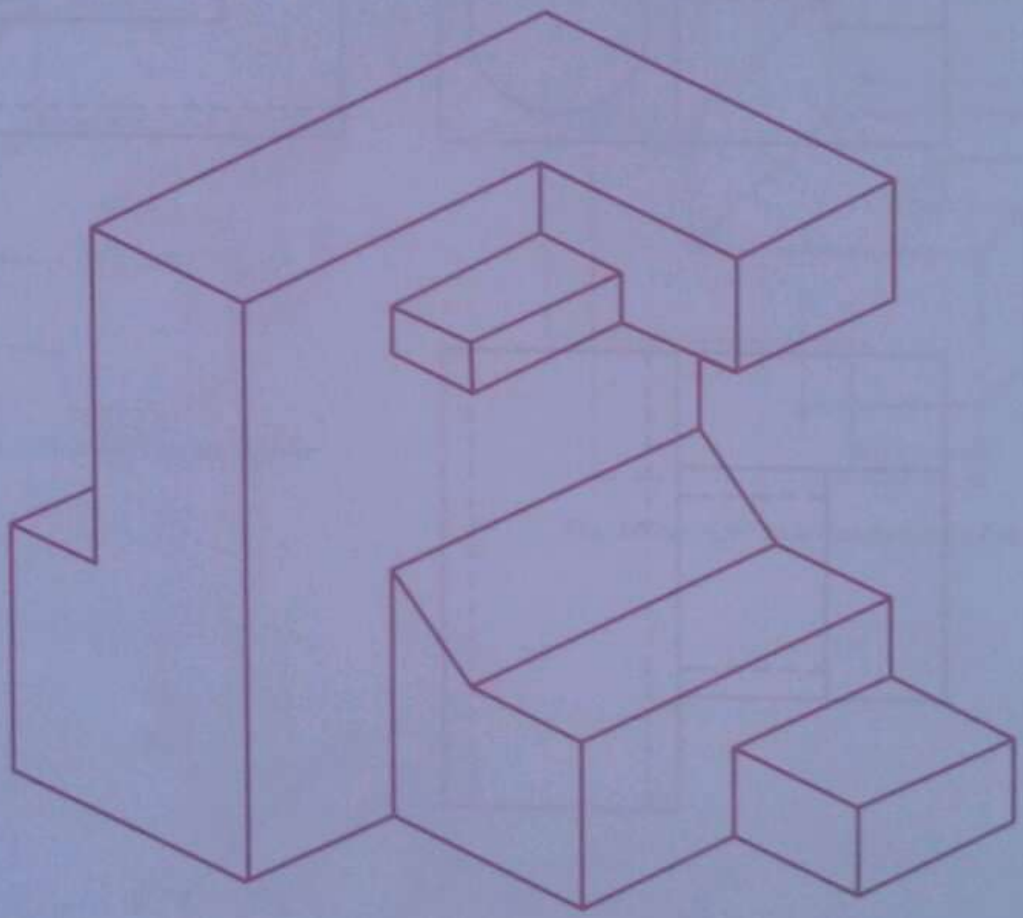
1. Represente a peça em axonometria isométrica.



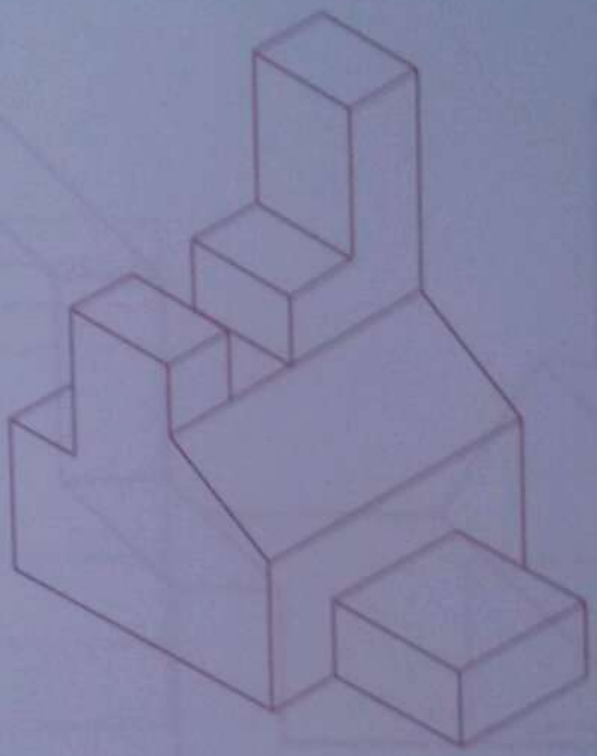




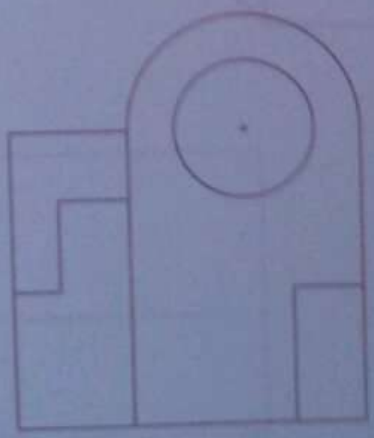
2.* Represente as vistas da peça.

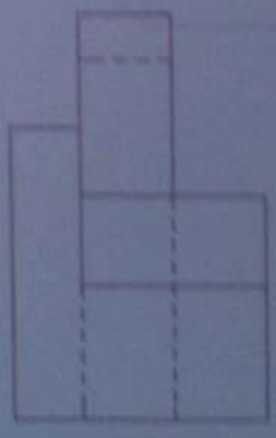


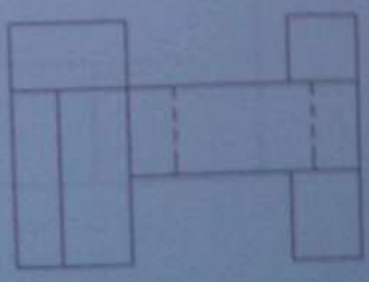
3. Faça a cotagem da peça representada.



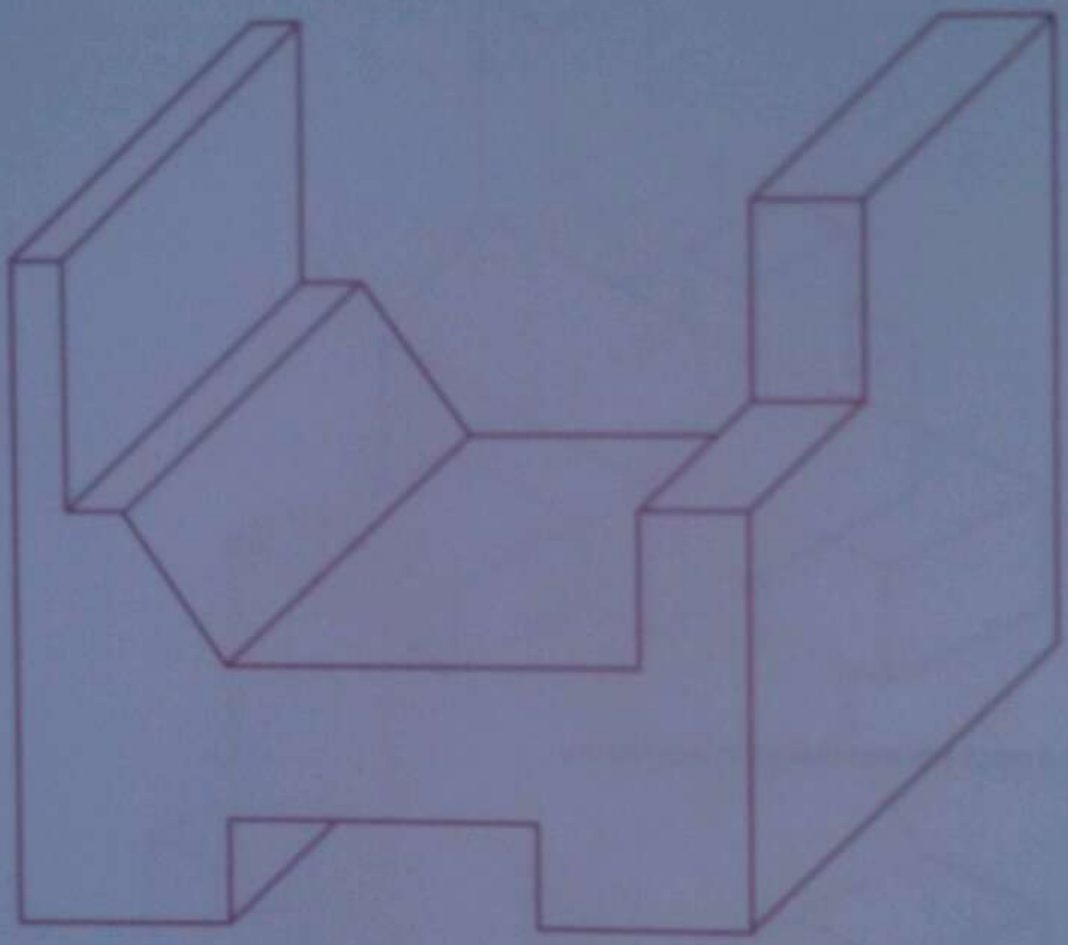
4. Represente a peça em axonometria isométrica.



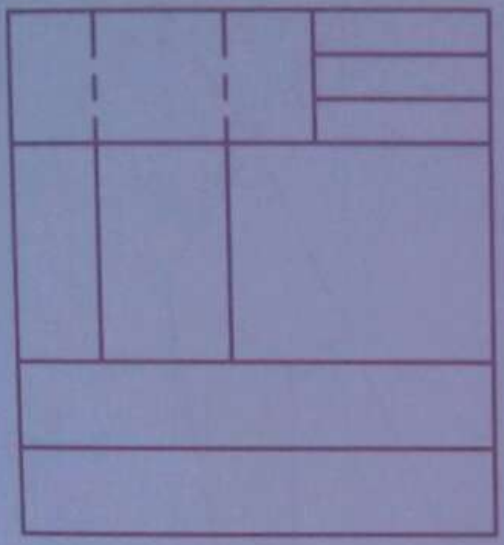


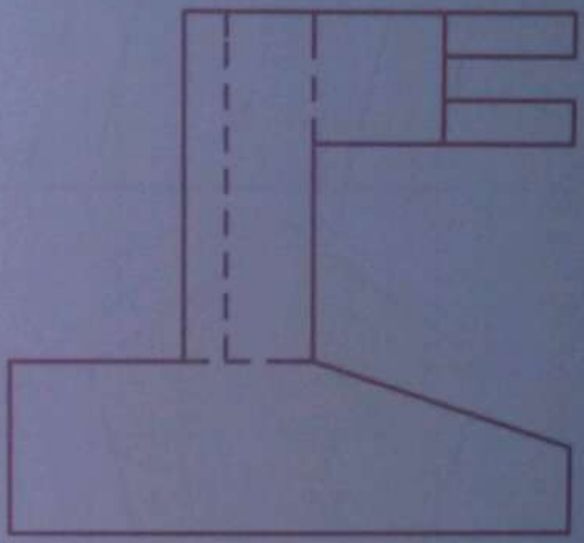


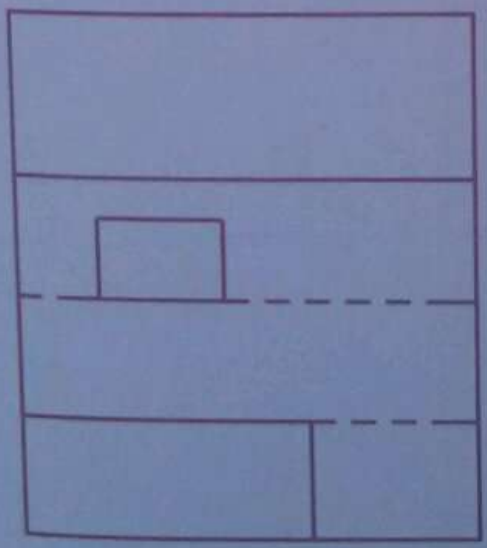
5.º Faça a cotagem da peça.



6. Represente a peça em axonometria isométrica.

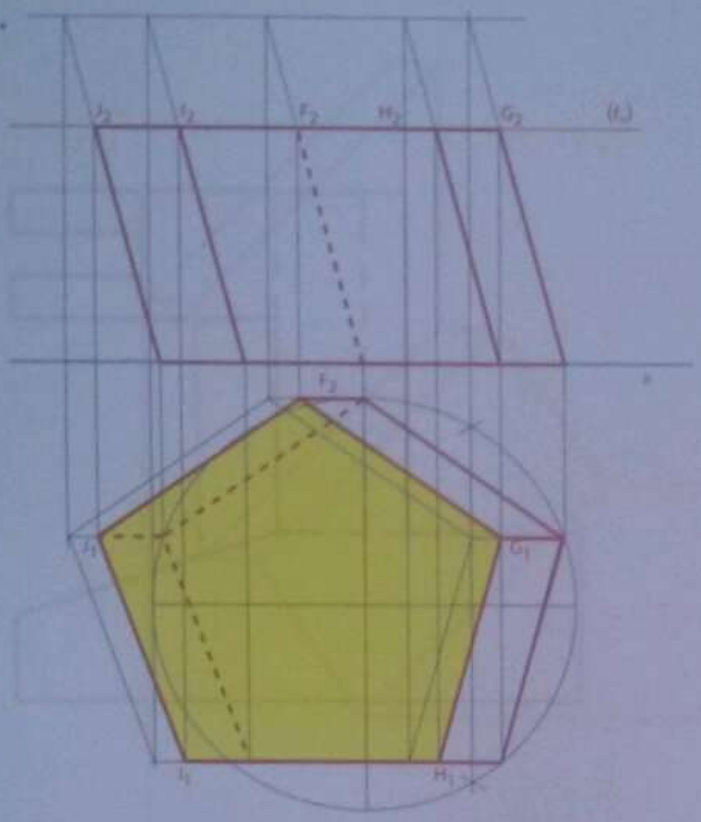




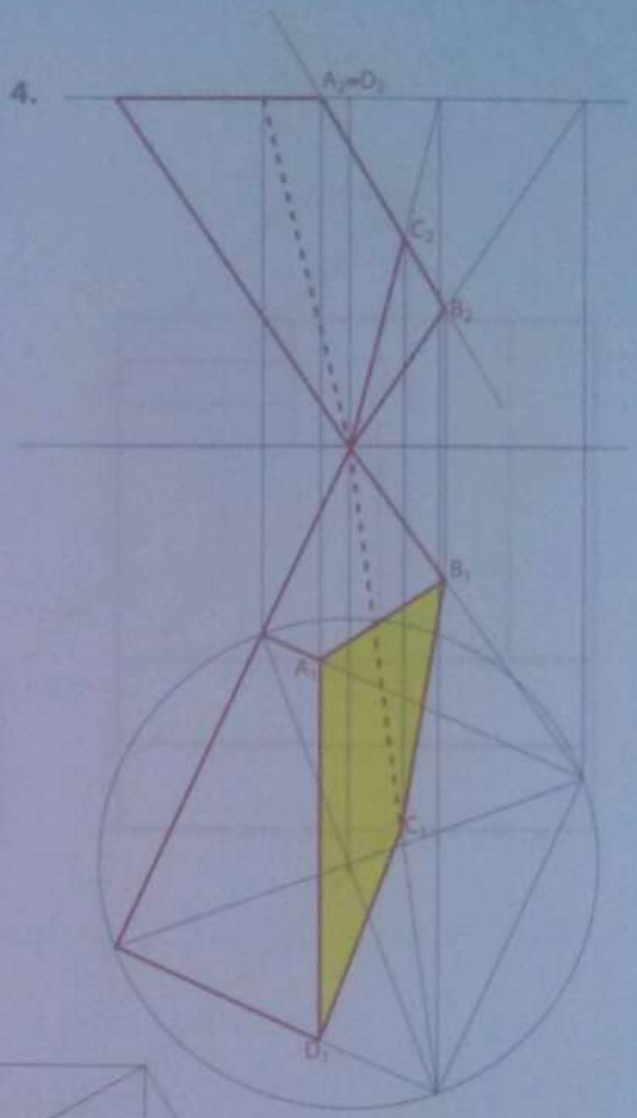


Unidade 1 – Secções em sólidos
Exercícios propostos pp. 67 a 69

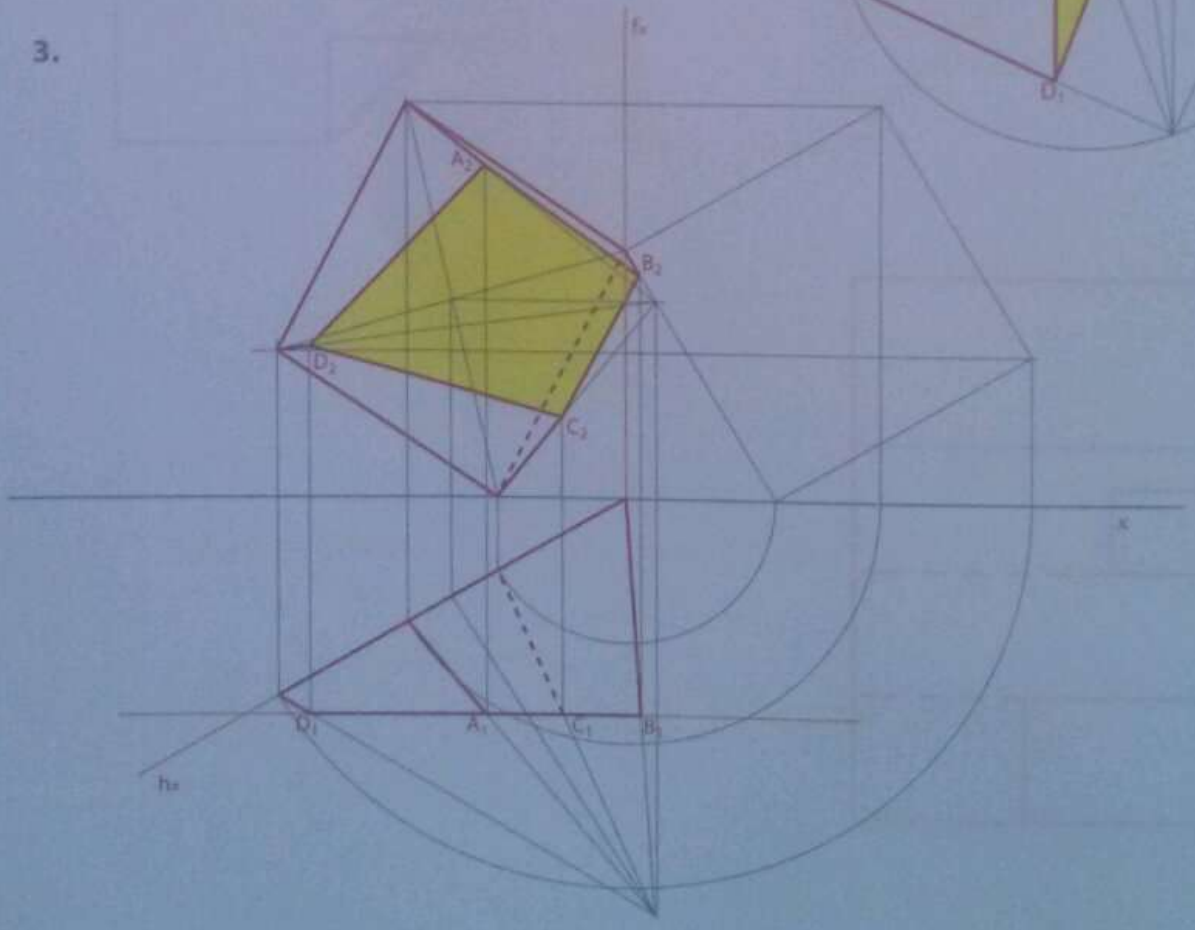
2.



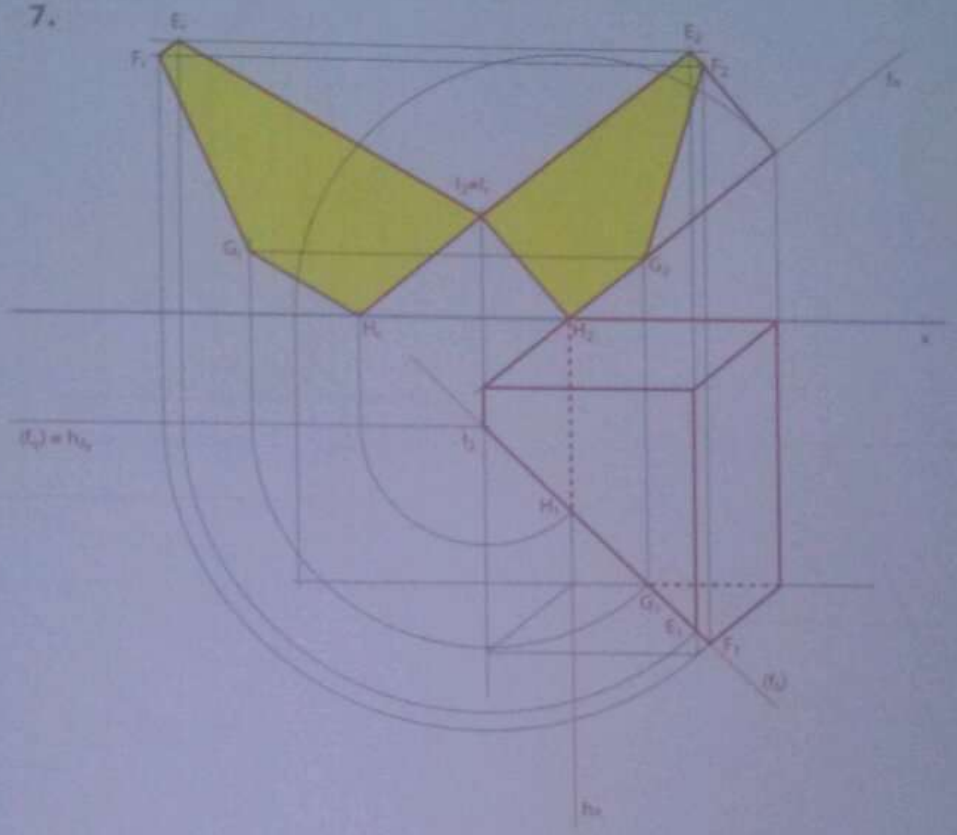
4.



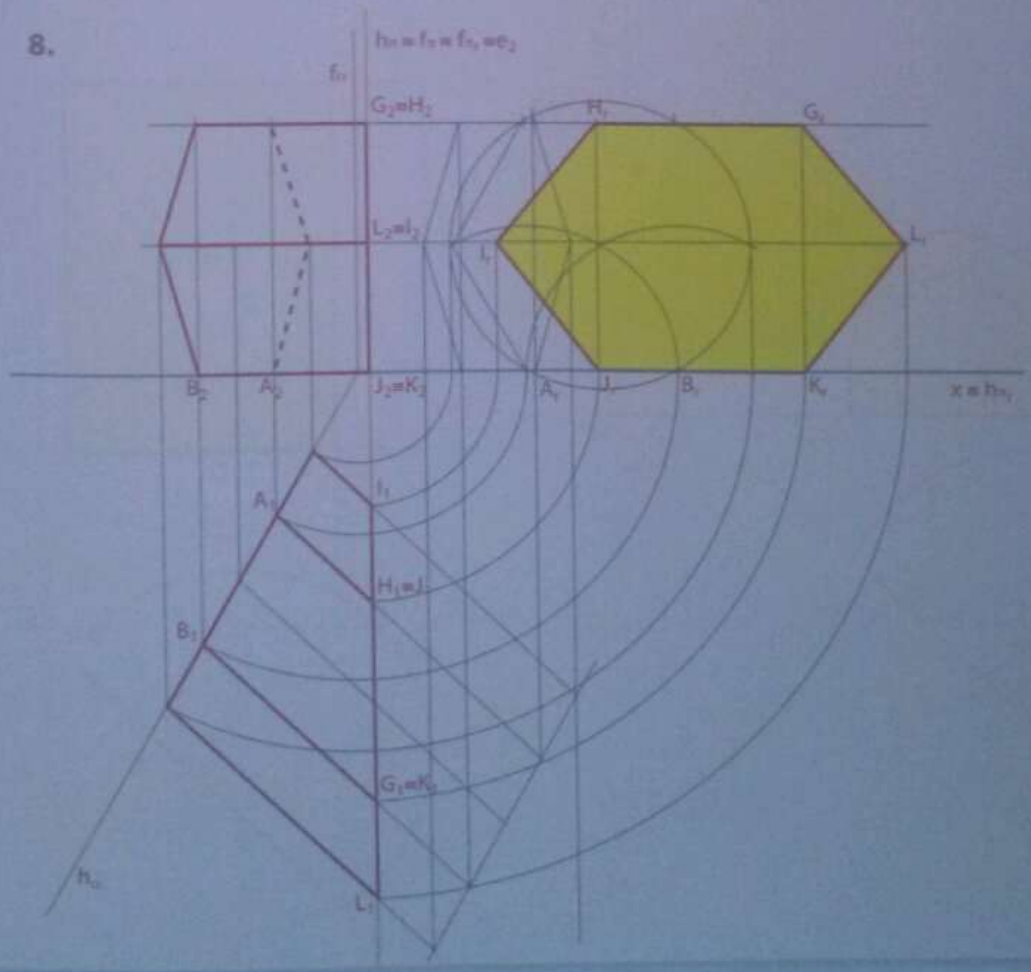
3.



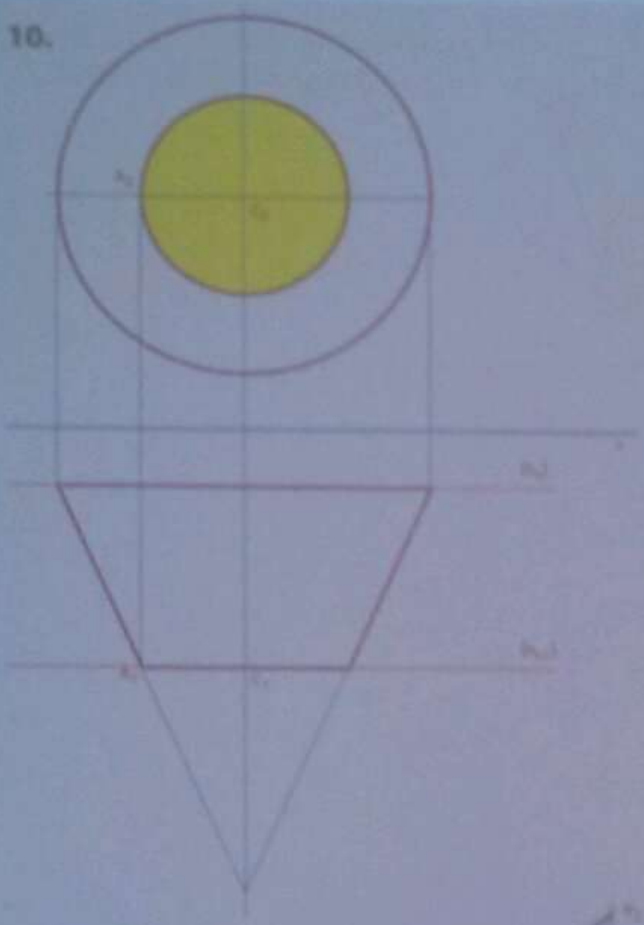
7.



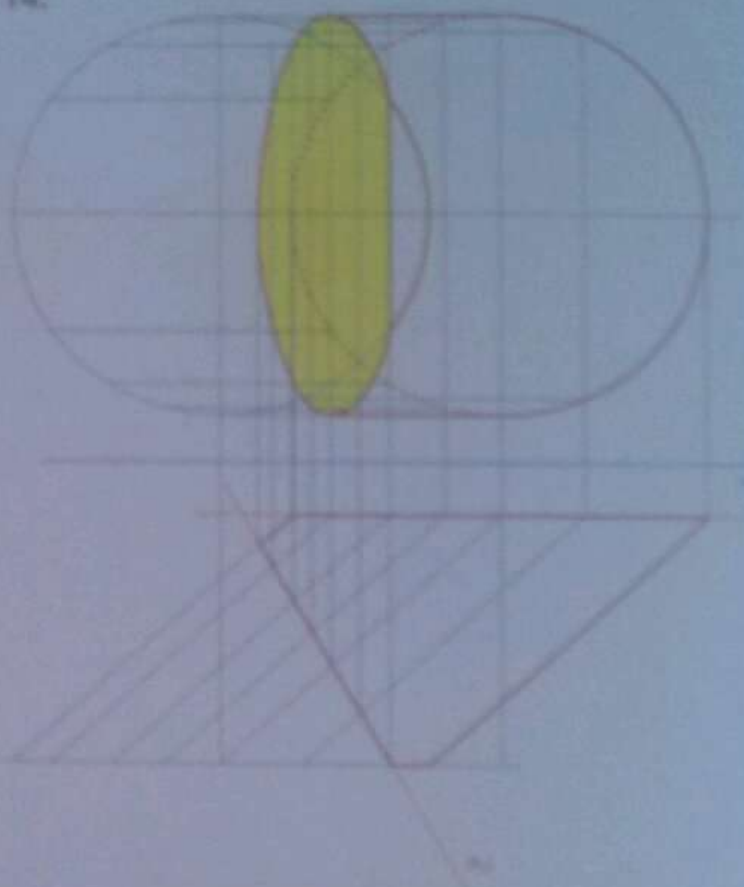
8.



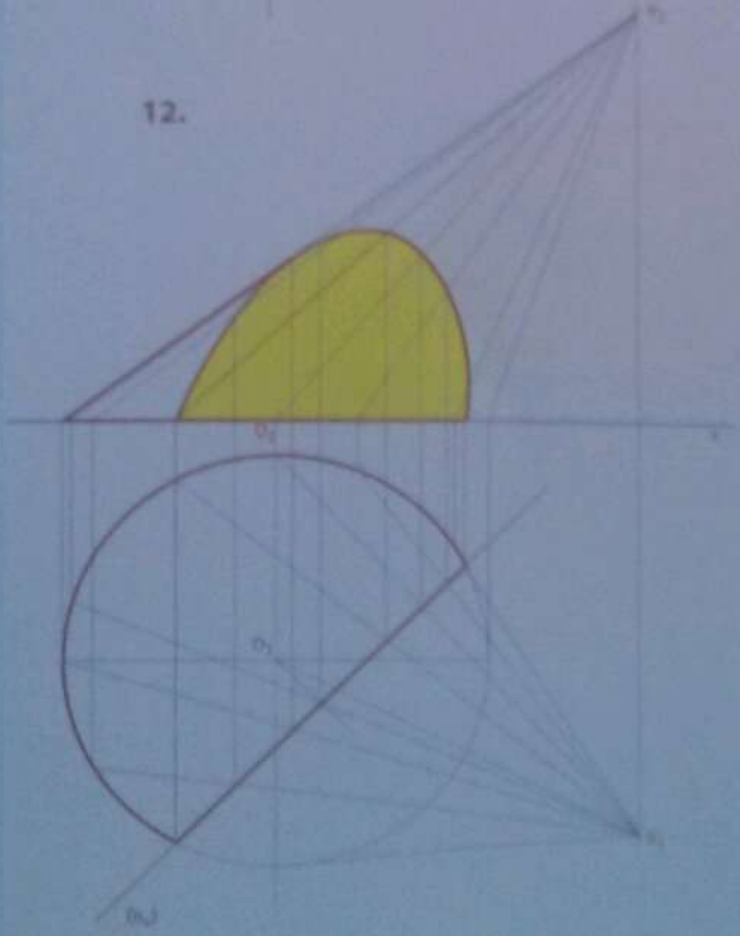
10.



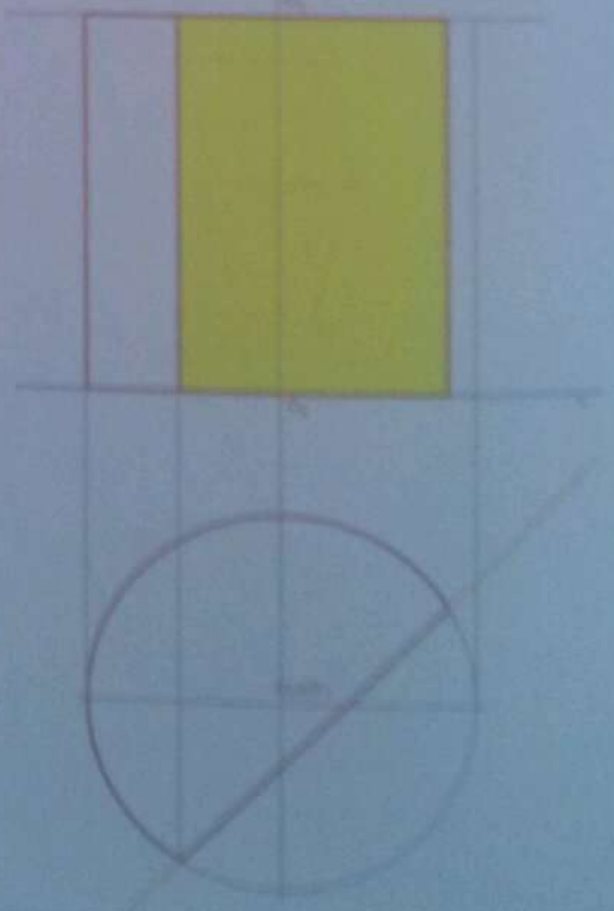
14.



12.

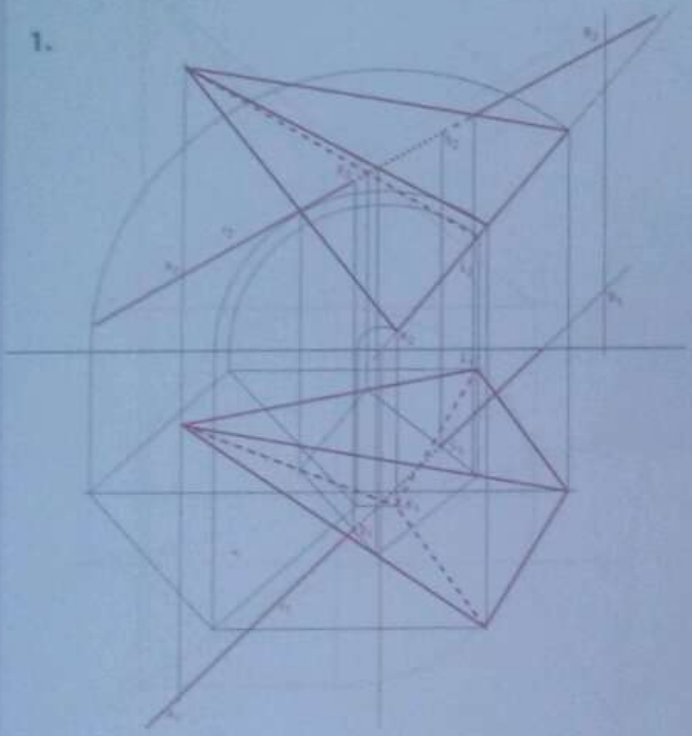


15.

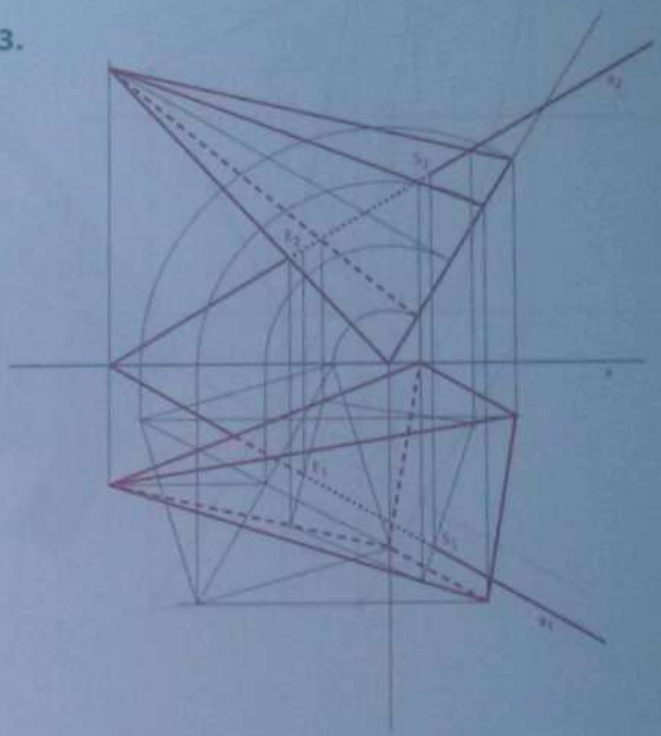


Unidade 2 – Intersecção de rectas com sólidos
Exercícios propostos pp. 108 a 111

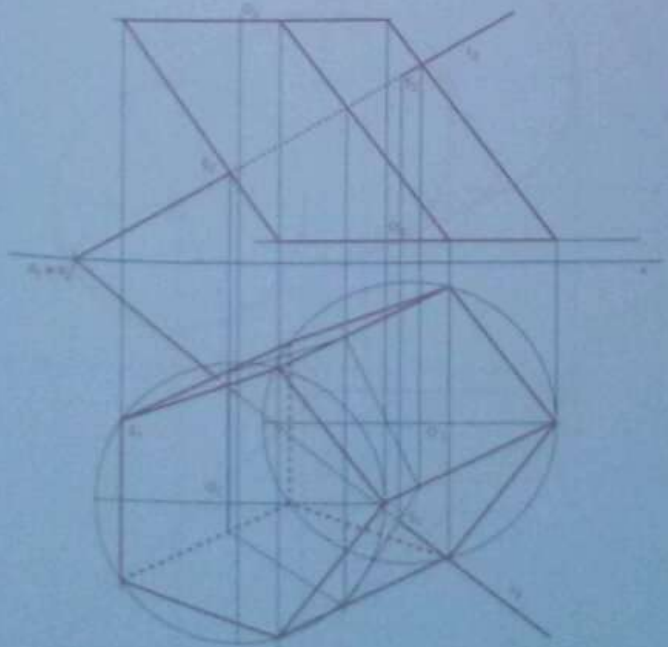
1.



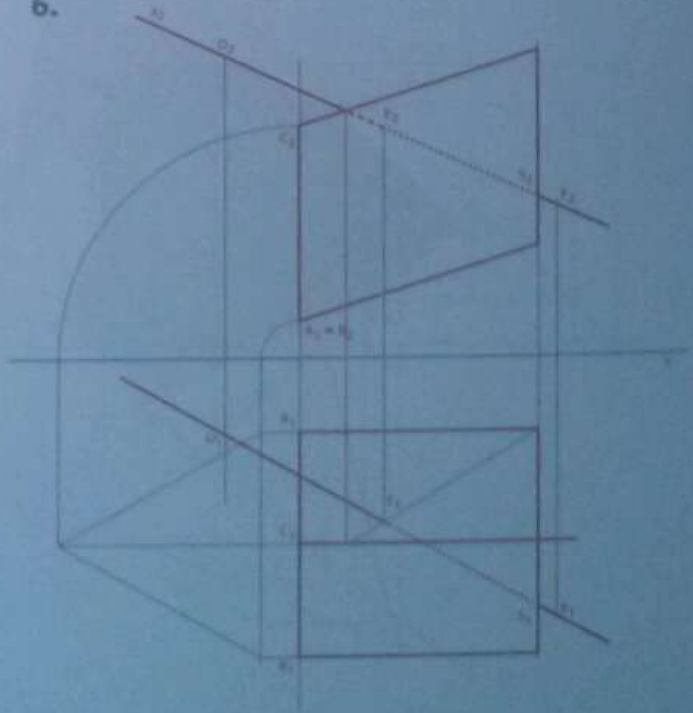
3.



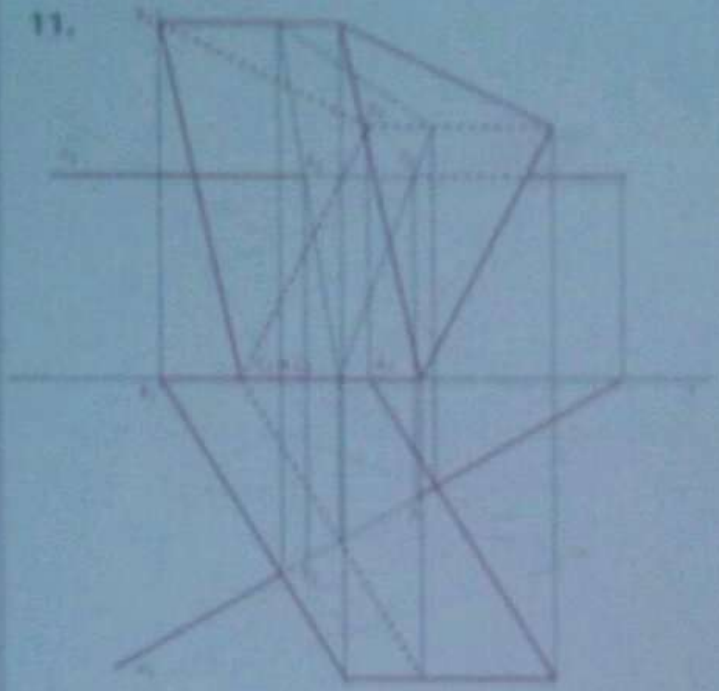
5.



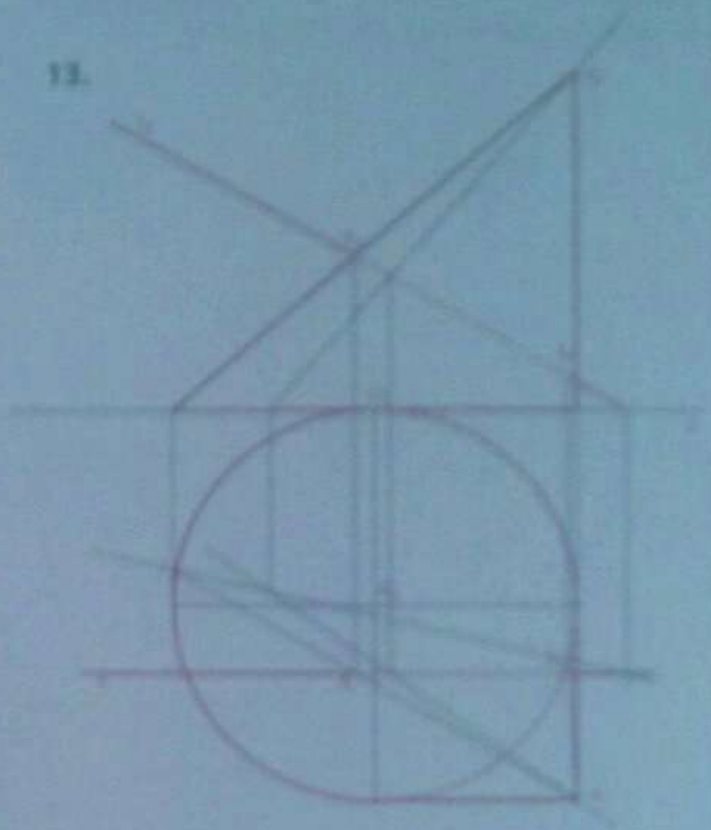
6.



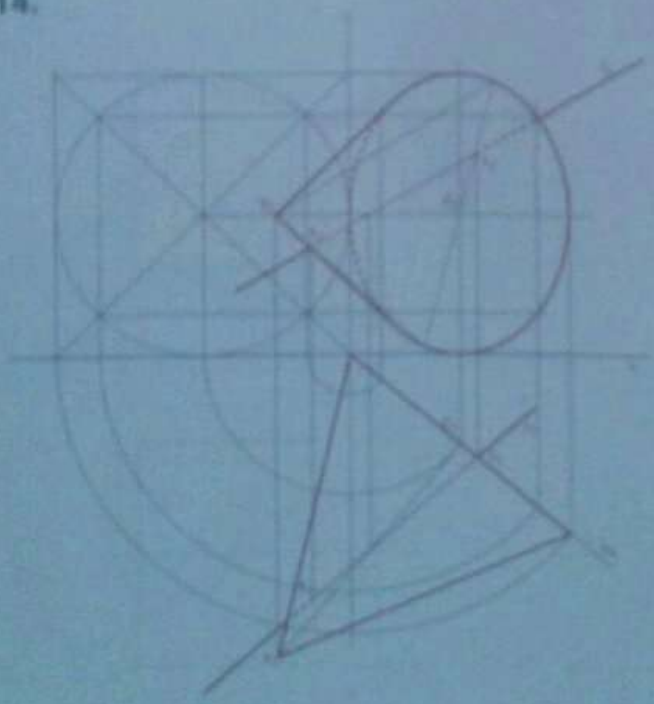
11.



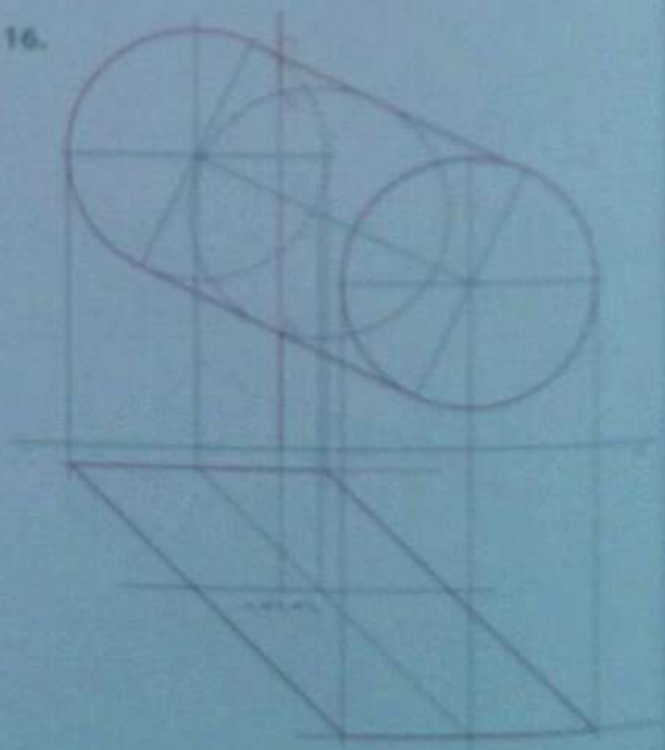
13.



14.

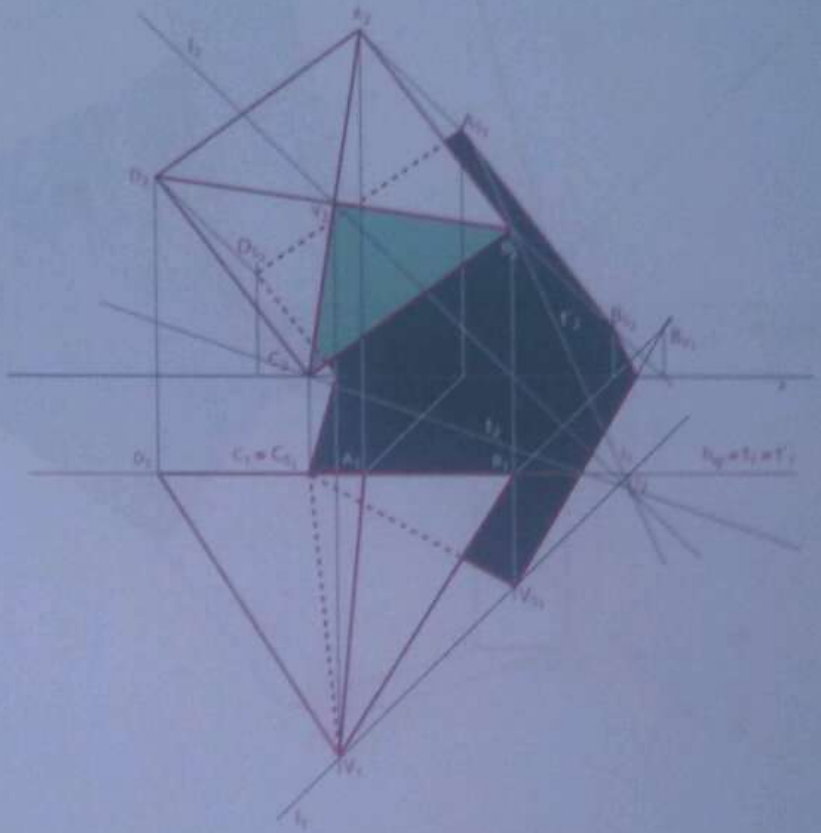


16.

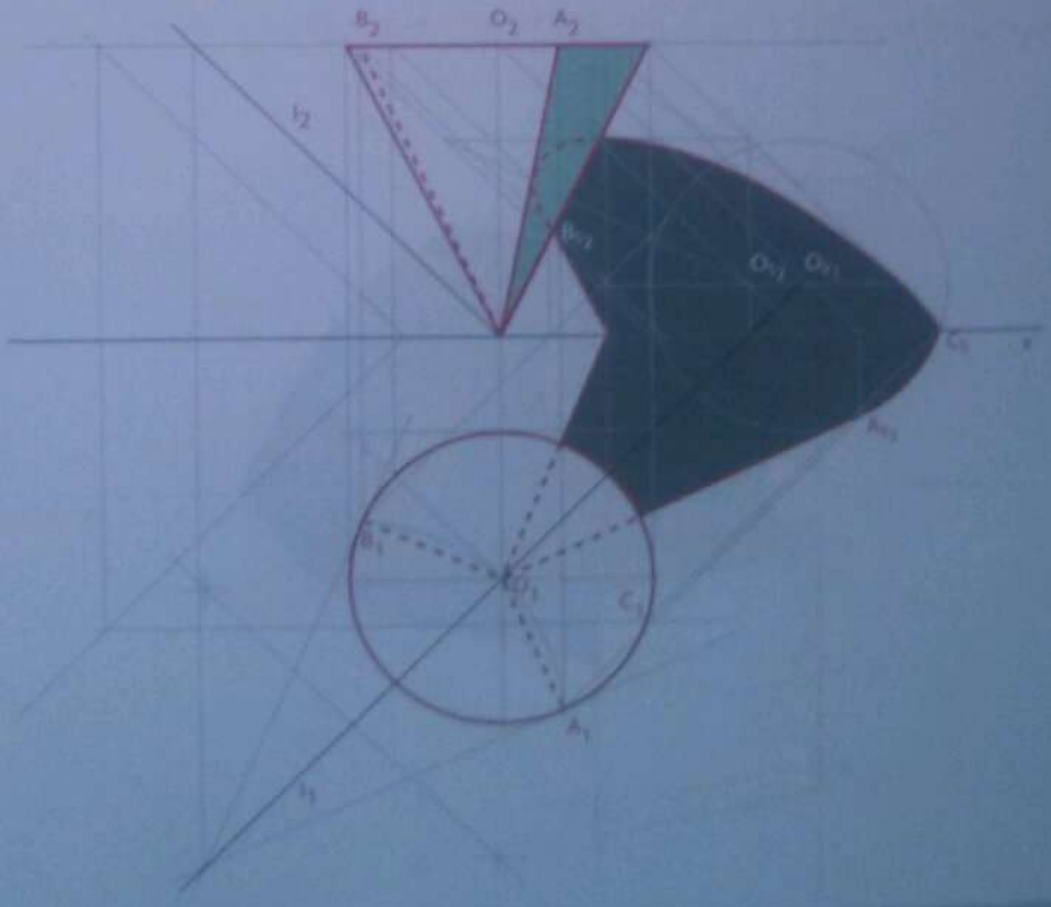


Unidade 3 – Sombras
Exercícios propostos pp. 185 a 187

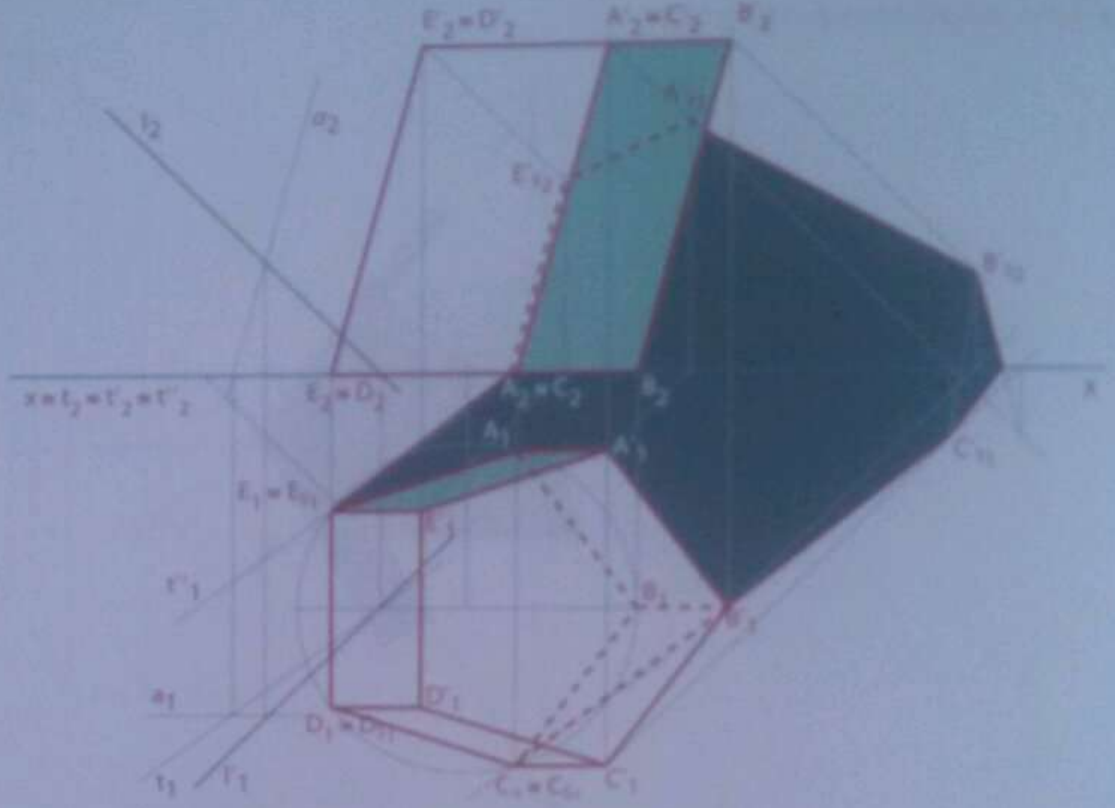
1.



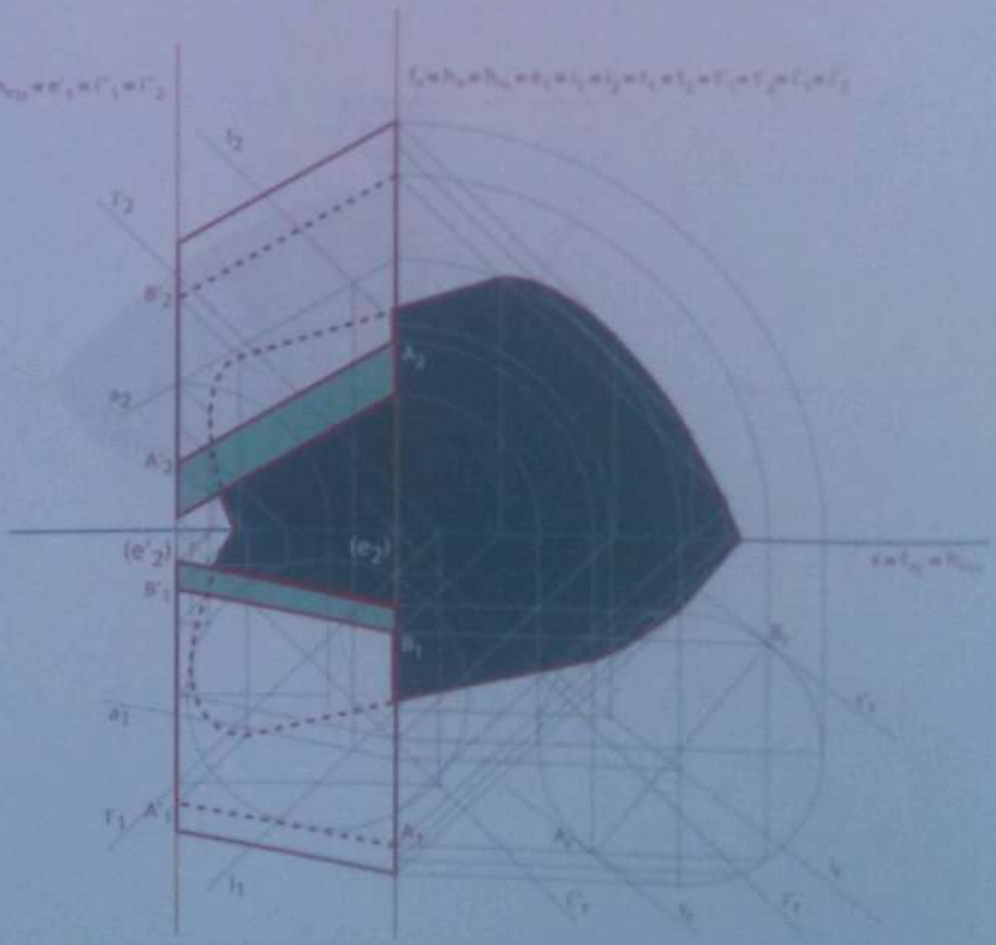
5.



10.

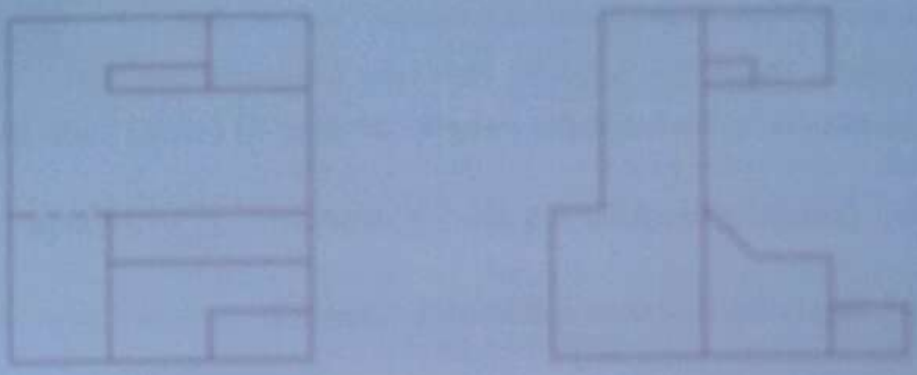


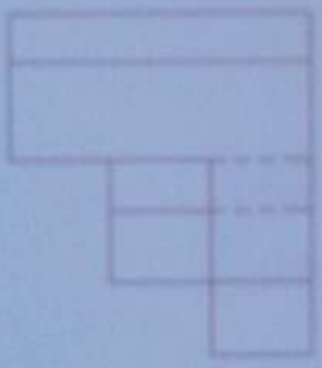
14.



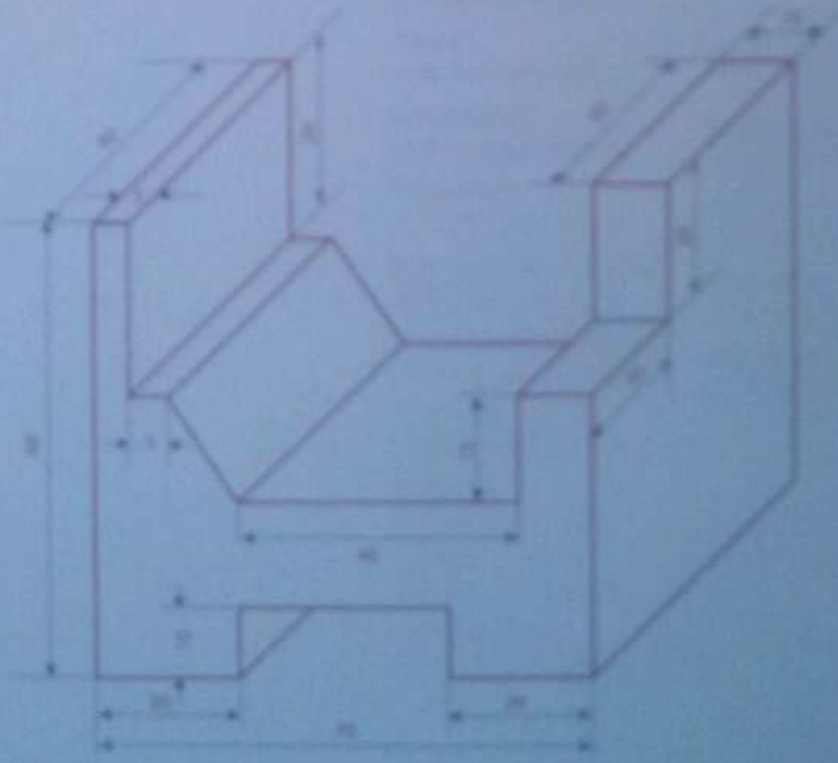
Unidade 4 – Representação axonométrica
Exercícios propostos pp. 203 a 207

2.





3.



Bibliografia

Carreira, António Ribeiro, *Compêndio de Desenho* (para o 3.º Ciclo do Ensino Liceal), 2.ª Edição, Livraria Sá da Costa, Lisboa, 1972.

Camundimo, Vasco Filipe, *Desenho e Geometria Descritiva, 11.ª Classe*, 1.ª Edição, Texto Editores, 2009.

Mesa, Agostinho, e Camundimo, Vasco Filipe, *Desenho, 8.ª Classe*, DINAME 1995.

Mesa, Agostinho, e Camundimo, Vasco Filipe, *Desenho, 10.ª Classe*, Editora Escolar, 1995.

Santa-Rita, José Fernando, *Desenho e Geometria Descritiva A*, 12.º Ano, 1.ª Edição, Texto Editora, Lda, 1998.

Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 2*, volume 1 – 11.º/12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2005.

Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 2*, volume 2 – 11.º/12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2005.

Santa-Rita, José Fernando, *Geometria Descritiva A/B Bloco 1* – 11.º /12.º Anos, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 2007.

Soares, Óscar, e Carvalho, Luís Filipe, *Desenho e Geometria Descritiva A, 10.º Ano*, 1.ª Edição, Texto Editores, Lda, 1999.

EduSkills MOÇAMBIQUE

BIBLIOTECA EDUSKILLS

Acesse mais conteúdos agora

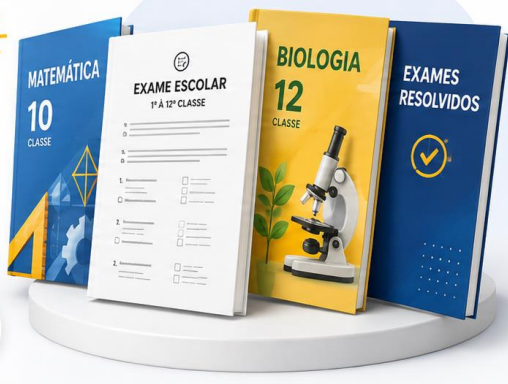
Encontre Aqui:

- Livros Escolares (1ª à 12ª Classe)
- Exames Escolares (1ª à 12ª Classe)
- Exames de Admissão (Todas Universidades)
- Exames Resolvidos
- Trabalhos Feitos

www.eduskills.co.mz

CLIQUE AQUI

Qual livro ou exame procuras? | 861003535





Vasco Filipe Jonissene Lambete Camundimo

Mestre em Educação/Educação Visual pela Escola Superior Técnica da Universidade Pedagógica de Moçambique em convênio com a Universidade de Minho, Portugal, Licenciado em Planificação, Administração e Gestão da Educação, pela Universidade Pedagógica e Bacharel em Desenho e Tecnologias Educativas, pela Universidade Eduardo Mondlane.

Possui larga experiência na elaboração de livros, bem como no ensino das disciplinas de Educação Visual e Desenho e Geometria Descritiva.

Tem feito trabalhos de consultoria para as Organizações das Nações Unidas em projectos de Combate ao Desemprego dos Jovens Através das Indústrias Culturais.

Investigador Principal na Rede de Investigação Educacional para África Central e Ocidental (ERNWACA) no âmbito da Agenda Pan-Africana de Investigação sobre a Integração Pedagógica das Tecnologias de Informação e Comunicação.

Técnico Pedagógico no Instituto Nacional do Desenvolvimento da Educação (INDE) onde é Coordenador de vários grupos de disciplinas e várias actividades com destaque para a revisão dos programas do Ensino Primário e avaliação da implementação do currículo do Ensino Secundário Geral.

11.ª Classe

Agro-Pecuária[1]
978-902-47-5500 4

Biologia[1]
978-902-47-5475 5

Desenho e Geometria Descritiva[1]
978-902-47-5484 7

Educação Visual[1]
978-902-47-5502 8

Geografia[1]
978-902-47-5477 9

História[1]
978-902-47-5476 2

Filosofia[1]
978-902-47-5483 0

Matemática – Letras[1]
978-902-47-5481 6

Física[2]
978-902-47-5479 3

Inglês[2]
978-902-47-5482 3

Matemática[2]
978-902-47-5480 9

Português[2]
978-902-47-5474 8

Química[2]
978-902-47-5478 6

TIC[2]
978-902-47-5422 9

12.ª Classe

Agro-Pecuária[1]
978-902-47-5498 4

Biologia[1]
978-902-47-5489 2

Desenho e Geometria Descritiva[1]
978-902-47-5495 3

Física[1]
978-902-47-5501 1

Geografia[1]
978-902-47-5493 9

Filosofia[1]
978-902-47-5491 5

Matemática – Letras[1]
978-902-47-5487 8

Empreendedorismo[1]
978-902-47-5462 5

Química[1]
978-902-47-5499 1

História[1]
978-902-47-5488 5

Inglês[1]
978-902-47-5490 8

Matemática[1]
978-902-47-5486 1

Português[1]
978-902-47-5485 4

TIC[1]
978-902-47-5494 6

Acesso ao Ensino Superior

Matemática
978-902-47-6101 2

Física
978-902-47-6102 9

Química
978-902-47-6103 6

Biologia
978-902-47-6104 3

[1] Livros no sistema de ensino
[2] Livros de apoio e consulta







HINO NACIONAL

Pátria Amada

Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro

Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela Paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando do chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios, pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique
Nenhum tirano nos irá escravizar.



978-902-47-5405-3
LeYa
Texto Editores
Ensino Secundário