NOVO CURRÍCULO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA 12

PRÉ-UNIVERSITÁRIO

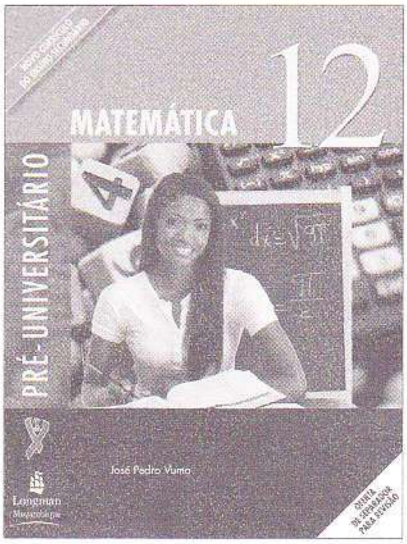
AMO A VIDA

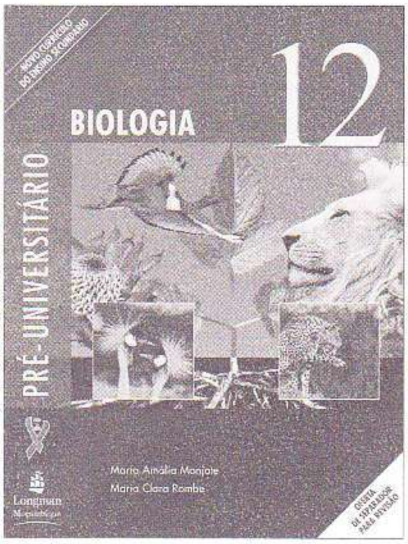
José Pedro Vuma

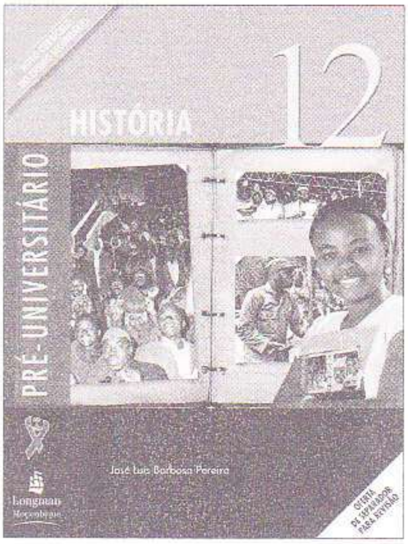
Longman
Moçambique

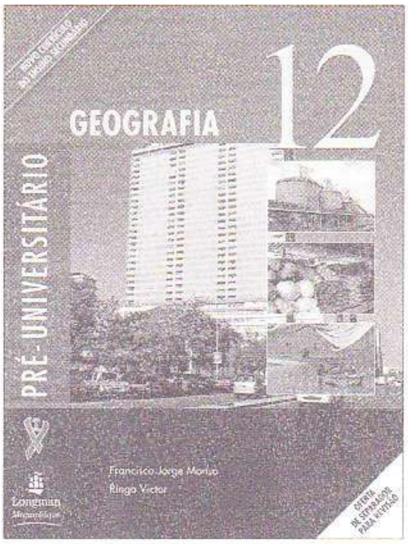
OFERTA DE SEPARADOR PARA REVISÃO

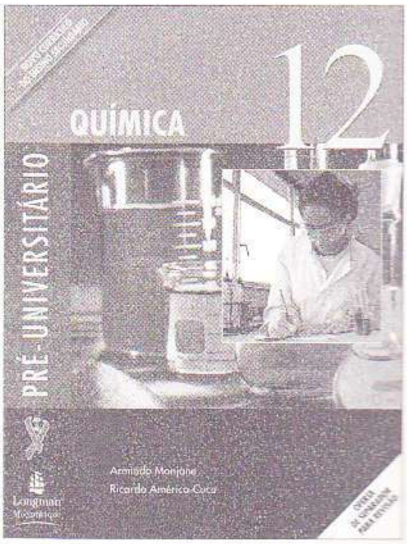
Títulos disponíveis para a 12.ª Classe

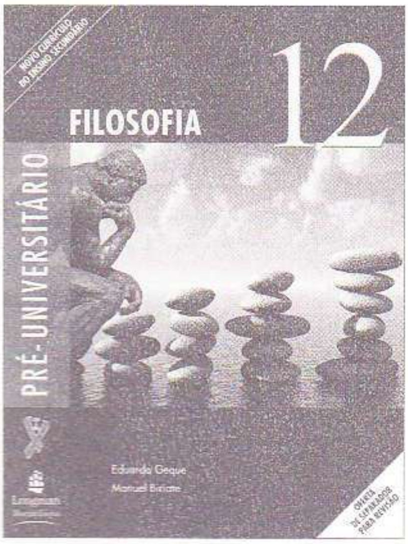


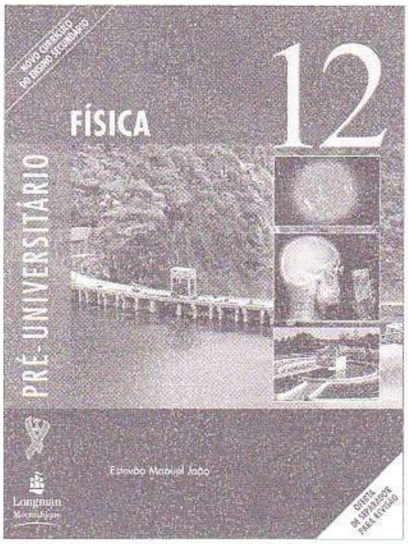


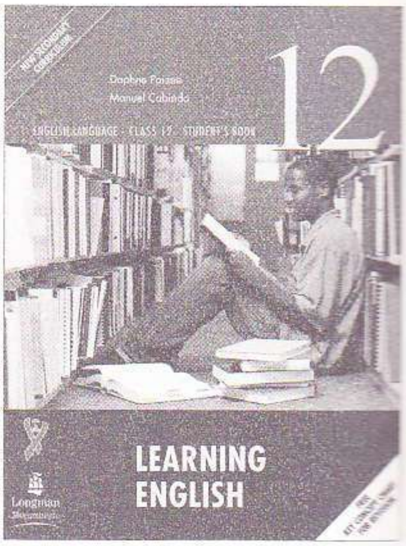






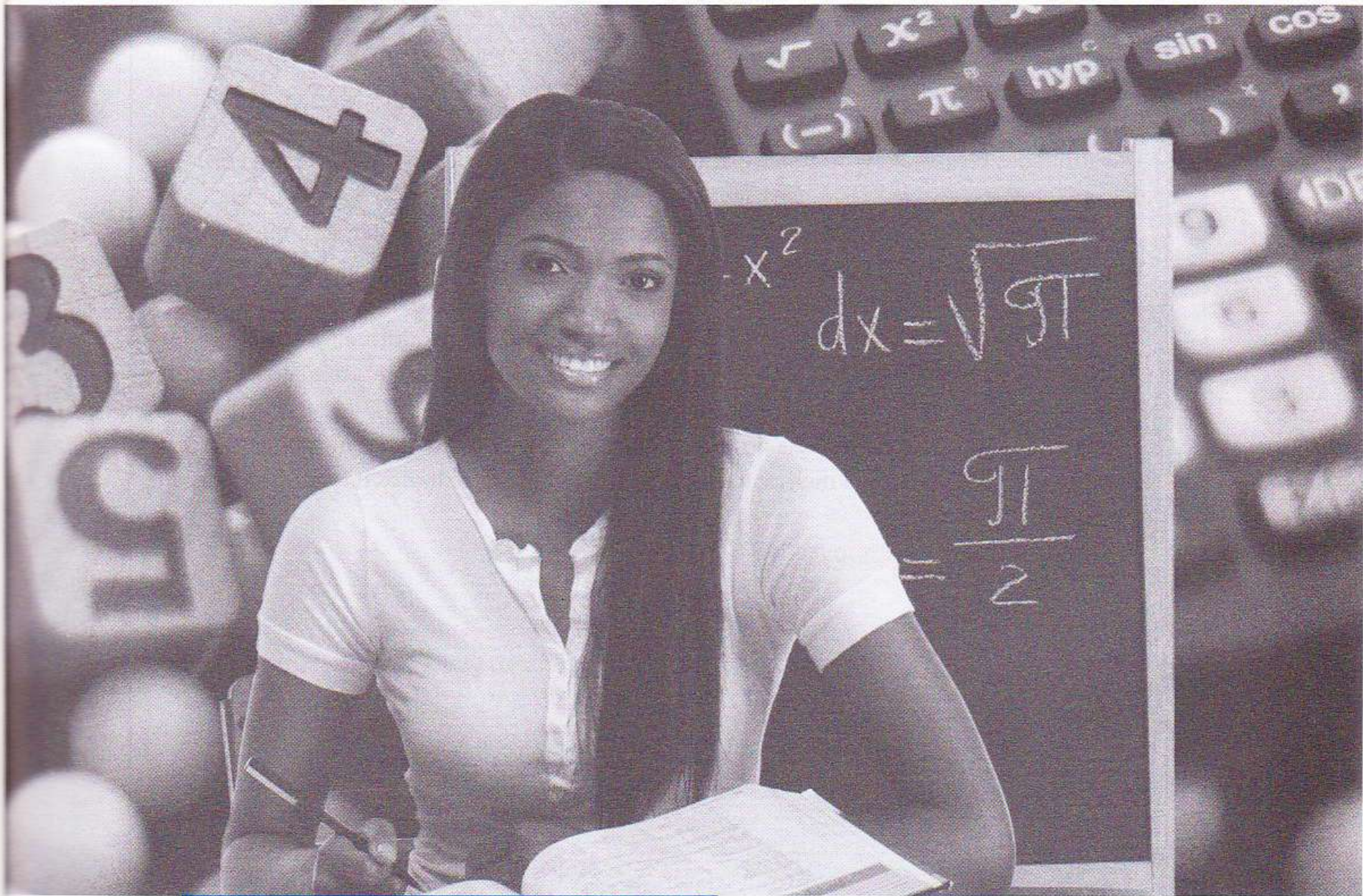






José Pedro Vuma

MATEMÁTICA 12



PRÉ-UNIVERSITÁRIO

Longman
Moçambique

Introdução

É com grande satisfação que aqui se apresenta o livro *Pré-Universitário Matemática 12* para a 12.ª Classe.

Elaborado na sequência do projecto desenvolvido para a 11.ª Classe, procuram os autores, com o presente livro, contribuir para a melhoria do ensino da Matemática no nosso País, cientes, porém, de que o livro não pode substituir o Professor, mas pode e deve servir de apoio e complemento às lições do Professor.

Foi preocupação dos autores o esclarecimento minucioso das questões, bem como a inserção das matérias no quadro de uma cultura construtiva que possa temperar e atenuar, de algum modo, a abstracção inerente à Matemática.

O livro encontra-se organizado em oito unidades de matérias para a 12.ª Classe, de acordo com as exigências do Programa em vigor para a disciplina.

As unidades iniciam-se com a indicação dos objectivos específicos, de modo a que o Aluno tenha um ponto de referência e de orientação para o seu trabalho académico e possa estar consciente dos resultados que se pretende atingir.

As unidades terminam com uma relação de exercícios resolvidos seguida de um conjunto de exercícios propostos.

Não se pretende que o Aluno se limite a ler um exercício resolvido, mas sim que o resolva com a calma e a reflexão necessárias para que entenda a sua estrutura e saiba interpretar os resultados obtidos, de modo a que se torne capaz de resolver, com êxito, outros exercícios.

Deseja-se que o trabalho ao longo do ano lectivo possa ser produtivo e recompensador e que este livro possa ser, tanto para o Aluno, como para o Professor, um bom companheiro e um ponto de apoio no ano lectivo que agora se inicia.

Todas as críticas e sugestões, seja de alunos, seja de professores, serão bem-vindas, pois este é um projecto que só poderá melhorar e evoluir através dos contributos de todos aqueles que o utilizam.

Votos de um excelente ano lectivo.

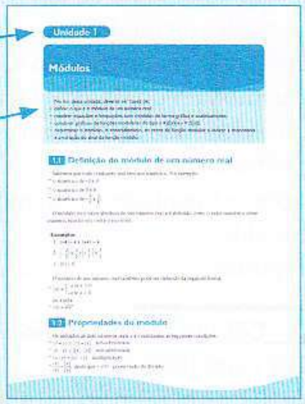
Os autores

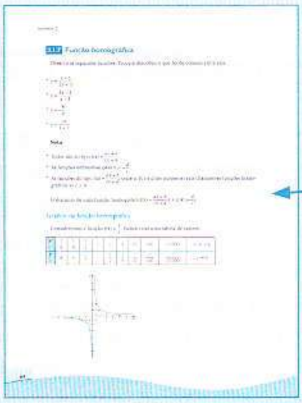
Estrutura do Livro

Apresentamos agora as principais características deste livro, para que seja mais fácil utilizá-lo no trabalho diário, quer na escola, quer no estudo feito em casa.

Indicação da unidade e do tema

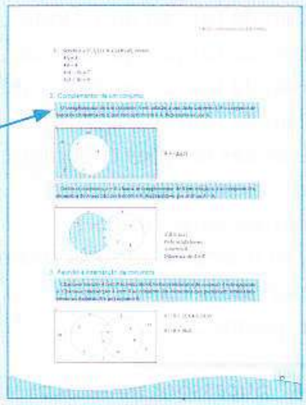
Indicação dos objectivos da unidade, para ajudar a definir os resultados que se deseja atingir com o trabalho realizado em cada unidade e a avaliar o sucesso do trabalho desenvolvido.

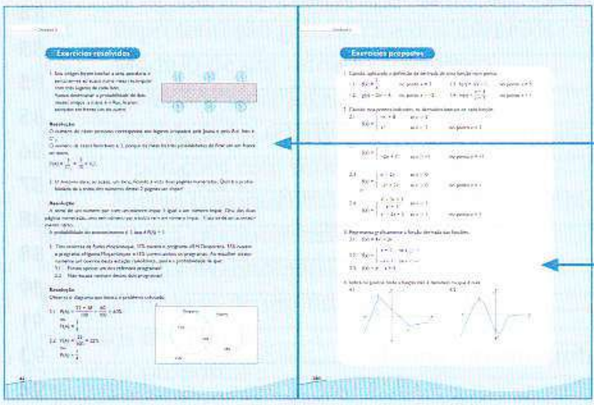




Textos explicativos, complementados por exemplos, imagens, desenhos, tabelas.

Conceitos destacados com um fundo de cor, para ajudar à compreensão da matéria.





No final das unidades, encontra-se um conjunto de exercícios resolvidos, que permitem fazer uma revisão da matéria dada, seguido de um conjunto de exercícios propostos, que se destinam a permitir pôr em prática os conhecimentos adquiridos

Este livro é acompanhado por um prático separador para revisão, com informação muito útil.

Índice

Pág.

Unidade 1

Módulos

No fim desta unidade, deverás ser capaz de:

- definir o que é o módulo de um número real;
- resolver equações e inequações com módulos de forma gráfica e analiticamente;
- construir gráficos de funções modulares do tipo $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$;
- determinar o domínio, o contradomínio, os zeros da função modular e indicar a monotonia e a variação do sinal da função módulo.

1.1 Definição do módulo de um número real

Sabemos que todo o número real tem um simétrico. Por exemplo:

- o simétrico de -3 é 3
- o simétrico de 0 é 0
- o simétrico de $-\frac{3}{5}$ é $\frac{3}{5}$.

O módulo ou o valor absoluto de um número real a é definido como o valor numérico desse número, sem ter em conta o seu sinal.

Exemplos

1. $|-4| = 4$ e $|+4| = 4$
2. $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ e $\left|+\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$
3. $|0| = 0$

O módulo de um número real também pode ser definido da seguinte forma:

- $|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0 \end{cases}$

ou ainda:

- $|a| = \sqrt{a^2}$

1.2 Propriedades do módulo

Os módulos de dois números reais x e y satisfazem as seguintes condições:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ sub-aditividade
- $|x - y| \geq ||x| - |y||$ sub-aditividade
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ multiplicação
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, desde que $y \neq 0$ preservação da divisão

- Se $|x|^2 = a^2$, então $|x| = \sqrt{a^2}$
- Se $a > 0$, então $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- Se a > 0, então $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

Vamos construir um quadro para verificar a primeira propriedade.

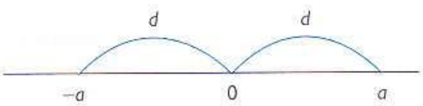
x	y	$x+y$	$\|x+y\|$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x\|+\|y\|$
5	–3	2	2	5	3	8
–3	–2	–5	5	3	2	5
2	–9	–7	7	2	9	11
0	4	4	4	0	4	4

Comparando as colunas 4 e 7, verifica-se que, de facto, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

1.3 Interpretação geométrica do módulo

O módulo de um número real a representa, num eixo real, a distância entre o ponto a e a origem do sistema coordenado.

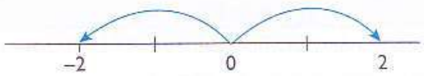
Vamos representar a distância por d. Assim:
$|a| = d(0, a)$



Os números que distam a unidades da origem são $-a$ e $+a$.

Exemplo

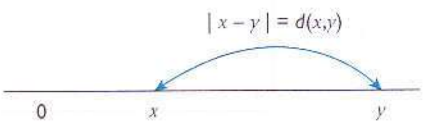
1. $|2| = d(0, 2)$



Os números que distam 2 unidades de 0 são –2 e +2. Por isso $|-2| = 2$ e $|+2| = 2$.

O módulo $|x - y|$ representa a distância entre os pontos x e y situados no eixo das abcissas. Isto é:

$$\boxed{|x - y| = d(x, y)}$$

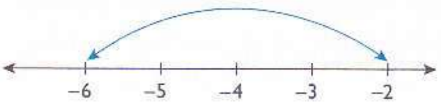


Exemplos

1. $|3 + 5| = d(3\ ,\ -5)$

$|3 + 5| = 8$

2. $|-2 + 6| = d(-2\ ,\ -6)$



$|-2+6| = 4$

Para calcular analiticamente o módulo $|x - y|$, podemos fazer:

$|x - y| = x - y$ ou $|x - y| = y - x$

tendo em atenção que o módulo de um número real é sempre um valor não negativo.

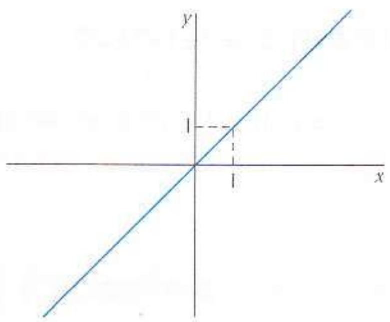
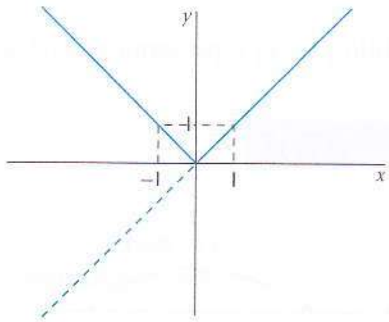
Exemplos

1. $|-5 + 4| = -4 - (-5) = -4 + 5 = 1$
2. $|3 - 5| = 5 - 3 = 2$
3. $|8 - 4| = 8 - 4 = 4$

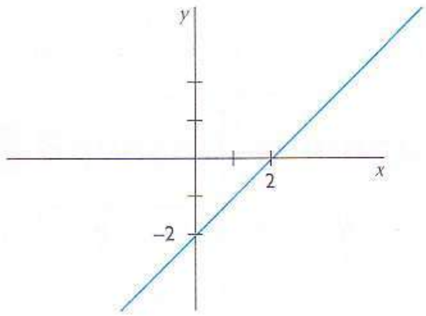
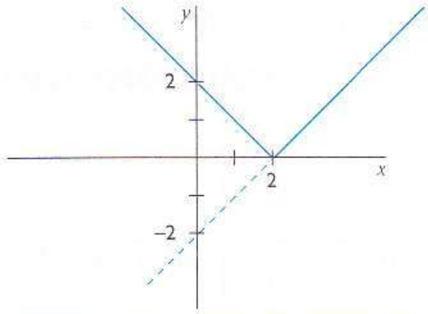
1.4 Função módulo do tipo $y = |f(x)|$ e $y = f(|x|)$

Função módulo do tipo $y = |f(x)|$

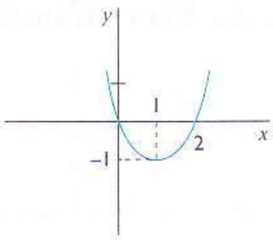
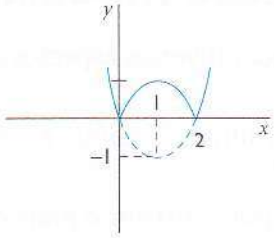
Vamos estudar o gráfico da função $f(x) = |x|$.

$f(x) = x$	$f(x) = \|x\|$
1.º passo: Traça o gráfico da função $f(x) = x$. 	**2.º passo:** Constrói o gráfico de $f(x) = \|x\|$ através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas para os pontos de ordenada negativa. 

Vamos estudar o gráfico da função $f(x) = |x - 2|$.

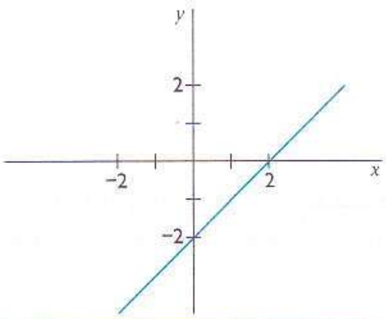
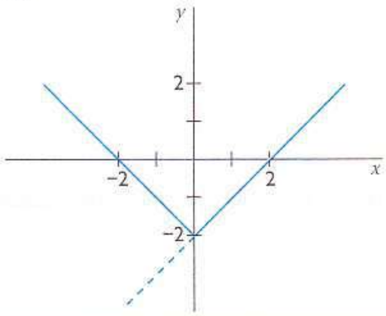
$f(x) = x - 2$	$f(x) = \|x - 2\|$
1.º passo: Traça o gráfico da função $f(x) = x - 2$. 	**2.º passo:** Constrói o gráfico de $f(x) = \|x - 2\|$ através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas para os pontos de ordenadas negativas. 

Vamos estudar o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2|$.

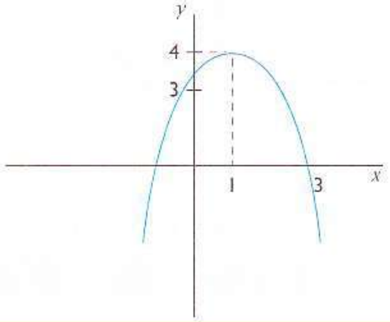
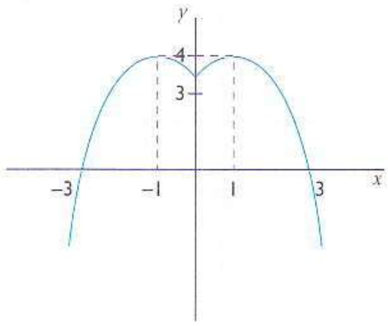
$f(x) = x^2 - 2$	$f(x) = \|x^2 - 2\|$
1.º passo: Começamos por representar o gráfico $f(x) = x^2 - 2$. **2.º passo:** Vamos estudar os zeros da função. Zeros: $x^2 - 2 = 0$ se $x = 0$ ou $x = 2$. **3.º passo:** Vamos determinar o vértice. Vértice: (1, -1). 	**4.º passo:** Constrói o grafico de $f(x) = \|x^2 - 2\|$ através de uma simetria em relação ao eixo das abcissas. 

Função módulo do tipo $y = f(|x|)$

Vamos estudar o gráfico da função $f(x) = |x| - 2$.

$f(x) = x - 2$	$f(x) = \|x\| - 2$
1.º passo: Começamos por representar o gráfico de $f(x) = x - 2$. 	**2.º passo:** Constrói o gráfico de $f(x) = \|x\| - 2$ através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas. 

Vamos estudar o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 2|x| + 3$.

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$	$f(x) = -x^2 + 2\|x\| + 3$
1.º passo: Começamos por representar o gráfico $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. **2.º passo:** Vamos estudar os zeros da função. Zeros: $x = -1$ e $x = 3$. **3.º passo:** Vamos determinar o vértice. Vértice: (1 , 4). 	**4.º passo**: Constrói o gráfico de $f(x) = -x^2 + 2\|x\| + 3$ através de uma simetria em relação ao eixo das ordenadas. 

1.5. Domínio, contradomínio, zeros da função, monotonia e variação do sinal de uma função modular

Vamos estudar diversos aspectos de funções envolvendo módulos, através da análise dos seus gráficos.

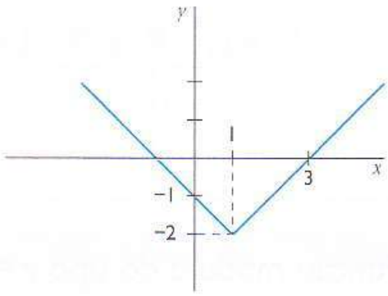
Vamos determinar o domínio e o contradomínio da função $f(x) = |x - 1| - 2$.

Começa-se por construir o gráfico da função dada.

Em seguida, faz-se a leitura do gráfico.

Domínio: $x \in \mathbb{R}$

Contradomínio: $y \in [-2, +\infty]$

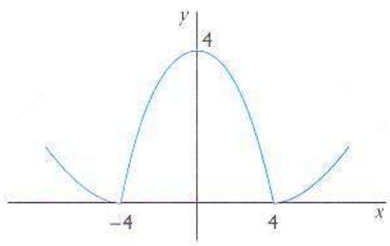


Dada a função $f(x) = |x^2 - 16|$, vamos responder às seguintes perguntas.

Para que valores de x é que $f(x) < 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) = 0$?

Para que valores de x é que f é crescente e decrescente?

Começamos por construir o gráfico da função f.



$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R}: x \neq -4 \wedge x \neq 4\}$.
$f(x) < 0$ para $x \in \varnothing$, ou seja, a função nunca é negativa.
$f(x) = 0$ para $x = -4$ ou $x = 4$, $\vee$ seja, os zeros da função são -4 e 4.

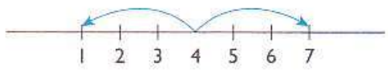
$f(x)$ é crescente para $-4 < x < 0$ e para $x > 4$.
$f(x)$ é descrescente para $x < -4$ e para $0 < x < 4$.

1.6 Equações e inequações com módulos

Equações modulares do tipo $|f(x)| = a$

Vamos resolver a equação $|x - 4| = 3$.

Vamos determinar, geometricamente, os números reais x que distam 3 unidades do número 4.



Os números que distam 3 unidades do número 4 são o 1 e o 7. Isto é, $|x - 4| = 3$ se $x = 1$ ou $x = 7$.

Podemos também resolver uma equação modular usando a definição do módulo. Neste caso:

$x - 4 = 3$ ou $x - 4 = -3$
$x = 4 + 3$ ou $x = 4 - 3$
$x = 7$ ou $x = 1$

Podemos, ainda, resolver uma equação modular considerando que se $|x| = a$, então $x^2 = a^2$.
$(x - 4)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$
Como $\Delta = 36$, então $x = 1$ ou $x = 7$.

Exemplo

1. Vamos resolver a equação $|x^2 - x + 1| = 2x - 1$.
   Para que seja possível esta igualdade, é necessário que $2x - 1 \geq 0$ porque, como sabemos, o módulo de um número real é sempre um valor não negativo.
   $2x - 1 \geq 0$
   Isto é: $x \geq 0{,}5$

   Resolvendo a equação $|x^2 - x + 1| = 2x - 1$:
   $x^2 - x + 1 = 2x - 1$ ou $x^2 - x + 1 = -(2x - 1)$
   $x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $x^2 + x = 0$
   $x = 1 \vee x = 2$ ou $x = 0 \vee x = -1$

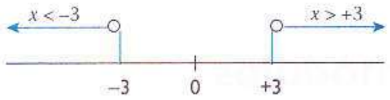
   Pela condição acima, $x = -1$ e $x = 0$ não pertencem ao conjunto-solução por serem menores que 0,5. Logo, a solução procurada é $x = 1 \vee x = 2$.

Inequações modulares do tipo $|f(x)| > a$ ou $|f(x)| < a$

Inequações do tipo $|f(x)| > a$

Vamos resolver a inequação $|x| > 3$.

A resolução consiste na determinação do conjunto de números reais que se localizam a uma distância superior a 3 unidades em relação a zero.



O conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R}: x < -3 \vee x > 3\}$.

Em geral, a solução das inequações do tipo $|x| > a$, sendo $a > 0$, é $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -a \vee x > a\}$.

Exemplo

1. Vamos resolver a inequação $|2x - 3| > 2$.

   $2x - 3 < -2$ ou $2x - 3 > 2$

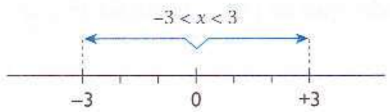
   $2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$.

   $S = \{x \in \mathbb{R}: x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{5}{2}\}$.

Inequações do tipo $|f(x)| < a$

Vamos resolver a inequação $|x| < 3$.

A resolução consiste na determinação do conjunto de números reais que se localizam a uma distância inferior a 3 unidades em relação a zero.



O conjunto solução é $\{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 3\}$.

Em geral, a solução das inequações do tipo $|x| < a$, sendo $a > 0$, é $S = \{x \in \mathbb{R}: -a < x < a\}$.

Exemplos

1. Vamos resolver a inequação $|2x - 3| < 2$.

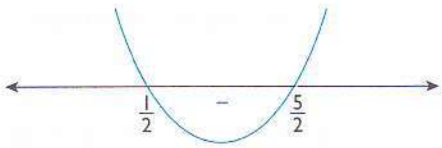
   $2x - 3 > -2$ ou $2x - 3 < 2$

   $2x > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$

   $S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}\}$.

Também podemos resolver inequações modulares usando a propriedade:
Se $|x| < a$, então $(x)^2 < a^2$.

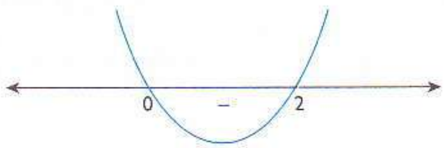
Aplicando esta propriedade:
$|2x - 3| < 2 \Leftrightarrow$
$(2x - 3)^2 < 2^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 < 4$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 5 < 0.$
Como $\Delta = 64$, então:
$x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$



$S = \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}\}.$

2. Vamos resolver a inequação $|x - 3| < |2x - 3|$.

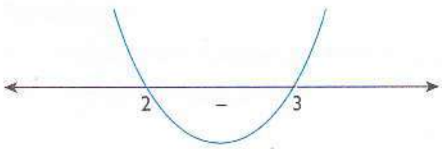
Usando a propriedade em cima referida:
$(x - 3)^2 < (2x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 < 4x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.



$S = \{x \in \mathbb{R}: x < 0 \vee x > 2\}.$

Inequações do tipo $a|x|^2 + b|x| + c > 0$ ou $a|x|^2 + b|x| + c < 0$

Vamos resolver a inequação $|x|^2 - 5|x| + 6 \leq 0$.
Começamos por fazer $|x| = t$, e temos $t^2 - 5t + 6 \leq 0$.
Em seguida, resolvemos a inequação $t^2 - 5x + 6 \leq 0$.
Zeros: $t = 2$ e $t = 3$



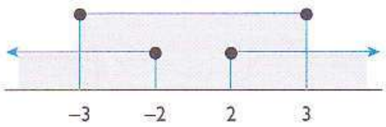
A solução é $2 \leq t \leq 3$, isto é $2 \leq |x| \leq 3$.

Resolvendo a inequação $2 \leq |x| \leq 3$, obtemos:

$|x| \geq 2$ e $|x| \leq 3$

$x \leq -2$ ou $x \geq 2$ (i) e $-3 \leq x \leq +3$ (ii)

Determinamos a intersecção de (i) e (ii):



$S = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 3\}$.

Lembra-te que:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos

1. $|+5| = 5$
2. $|-5| = -(-5) = 5$

E também:

$$|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{se } ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{se } ax + b < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Exemplo

1. $|3x - 4| = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } x \geq \frac{4}{3} \\ 4 - 3x & \text{se } x < \frac{4}{3} \end{cases}$

Exercícios resolvidos

1. Resolve a equação $\frac{10}{3} < |x| + \frac{1}{|x|} < \frac{26}{5}$.

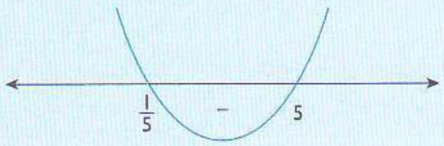
Resolução

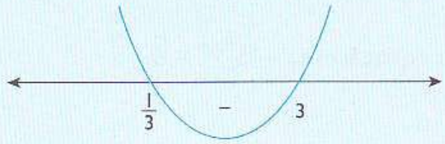
Seja $|x| = t$, então $\frac{10}{3} < t + \frac{1}{t} < \frac{26}{5}$.

O mmc dos denominadores é $15t$, logo: $50t < 15t^2 + 15 < 78t$

Vamos separar as inequações:

$15t^2 - 78t + 15 < 0$	e	$15t^2 - 50t + 15 > 0$
$5t^2 - 26t + 5 < 0$	e	$3t^2 - 10t + 3 > 0$
$\Delta = 576$	e	$\Delta = 64$
$5(t-5)(t-\frac{1}{5}) < 0$	e	$3(t-3)(t-\frac{1}{3}) > 0$

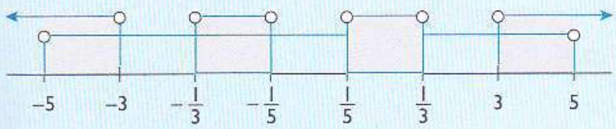




$t < 5 \Leftrightarrow |x| < 5$ e $t < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -5 < x < 5$

$t > \frac{1}{5} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{5} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5} \vee x > \frac{1}{5}$ e $t > 3 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$

A intersecção de todas as soluções é:



$S = \{x \in \mathbb{R}: -5 < x < -3 \vee -\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{5} \vee \frac{1}{5} < x < \frac{1}{3} \vee 3 < x < 5\}$.

2. Resolve a equação $|3x - 6| = x - 2$.

Resolução

A condição para que seja possível a igualdade é: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Resolvendo a equação:

$$|3x - 6| = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 = x - 2 \\ 3x - 6 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Logo, $S = \{2\}$.

Exercícios resolvidos

3. Resolve a equação $|x^2 - x + 1| = 1 - 2x$.

Resolução

Condição de existência: $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Resolvendo a equação:

$x^2 - x + 1 = 1 - 2x \quad \vee \quad x^2 - x + 1 = 2x - 1$

$x^2 + x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 0 \vee x = -1 \quad \vee \quad x = 1 \vee x = 2$

As raízes $x = 2$ e $x = 1$ não pertencem ao conjunto-solução da equação dada por serem maiores que $\frac{1}{2}$.

$S = \{-1, 0\}$.

4. Resolve a equação $|x|^2 - 5|x| = 6$.

Resolução

Vamos fazer $|x| = t$ e teremos a nova equação:

$t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \quad \vee \quad t = 6$

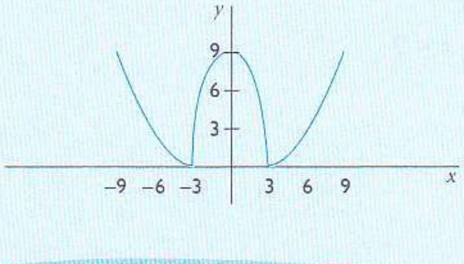
Isto é:

$\lvert x\rvert = -1$	$\vee$	$\lvert x\rvert = 6$
Condição impossível		$x = \pm 6$
porque o módulo é		não negativo.
		$S = \{-6, 6\}$.

5. Considera a função $f(x) = |x^2 - 9|$.
   - 5.1 Para que valores de x é que $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) = 0$?
   - 5.2 Para que valores de x é que $f(x)$ é crescente?
   - 5.3 $f(x)$ é par ou ímpar?
   - 5.4 $f(x)$ é injectiva?

Resolução

Vamos, em primeiro lugar, construir o gráfico de $f(x)$.



Exercícios resolvidos

5.1 $f(x) > 0$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$
$f(x) < 0$ se $x \in \varnothing$
$f(x) = 0$ se $x = -3 \vee x = 3$

5.2 $f(x)$ decresce se $\{x \in \mathbb{R}: x < -3 \vee 0 < x < 3\}$

5.3 $f(x)$ é par porque $f(-x) = f(x)$. $f(x)$ é par porque o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

5.4 $f(x)$ não é injectiva porque para certos valores de x existe mais do que uma imagem.

6. Efectua a operação $|x + 2| + |x - 1|$ para $-2 < x < 1$.

Resolução

$$|x+2| = \begin{cases} x + 2 \text{ se } x \geq -2 \\ -x - 2 \text{ se } x < -2 \end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases} x - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

Vamos construir uma tabela de resultados:

	-2	1	
$\|x + 2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$-x + 1$	$x - 1$
$\|x + 2\| + \|x - 1\|$	$-2x - 1$	3	$2x + 1$

$S = |x + 2| + |x - 1| = 3$ se $-2 < x < 1$.

7. Resolve as seguintes equações modulares:

7.1 $|x| = 17$

7.2 $\left|\frac{x}{2}\right| = 13$

7.3 $|4x| = -2$

7.4 $|3x + 4| = 11$

7.5 $|5x - 7| - 4 = 8$

7.6 $|x + 2| = 3x - 4$

7.7 $|2x - 3| - x = 2x + 1$

7.8 $\left|x - \frac{1}{3}\right| - 1 = x$

7.9 $|x - 3| = |2x + 4|$

7.10 $|3x - 5| = |3 + 4x|$

7.11 $|x^2 - 3x + 1| = 1$

7.12 $|x^2 - x + 1| + 1 = 2x$

7.13 $x^2 + 2|x| - 15$

Resolução

7.1 $|x| = 17$
$x = 17 \vee x = -17$

7.2 $\left|\frac{x}{2}\right| = 13$
$x = 26 \vee x = -26$

7.3 $|4x| = -2$
Resolução impossível. O módulo de um número é não negativo.

Exercícios resolvidos

7.4 $|3x + 4| = 11 \Leftrightarrow 3x + 4 = 11 \vee 3x + 4 = -11$

$$x = \frac{7}{3} \vee x = -5$$

7.5 $|5x - 7| - 4 = 8 \Leftrightarrow |5x - 7| = 12$

$$\Leftrightarrow 5x - 7 = 12 \vee 5x - 7 = -12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{19}{5} \vee x = -1$$

7.6 $|x + 2| = 3x - 4$

A condição é que o módulo de um número é não negativo.

Logo: $3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$

$|x + 2| = 3x - 4 \Leftrightarrow x + 2 = 3x - 4 \vee x + 2 = -(3x - 4)$

$$2x = 6 \vee 4x = 2$$

$$x = 3 \vee \cancel{x = \frac{1}{2}}$$

$x = \frac{1}{2}$ não é solução porque não satisfaz a condição em cima.

7.7 $|2x - 3| - x = 2x + 1 \Leftrightarrow |2x - 3| = 3x + 1$

A condição é que o módulo de um número é não negativo.

Logo: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

$2x - 3 = 3x + 1 \vee 2x - 3 = -(3x + 1)$

$$\cancel{x = -4} \vee x = \frac{2}{5}$$

$x = -4$ não é solução porque não satisfaz a condição em cima.

7.8 $\left|x - \frac{1}{3}\right| - 1 = x \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = x + 1$

A condição é que o módulo de um número é não negativo.

Logo:

$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$\left|x - \frac{1}{3}\right| = x + 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{3} = x + 1 \vee x - \frac{1}{3} = -(x + 1)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -1 \text{ (impossível)} \vee \cancel{x = -2} \vee x = -\frac{1}{3}$$

$x = -2$ não é solução porque não satisfaz a condição em cima.

7.9 $|x - 3| = |2x + 4| \Leftrightarrow x - 3 = 2x + 4 \vee x - 3 = -(2x + 4)$

$$x = -7 \vee x = -\frac{1}{3}$$

7.10 $|3x - 5| = |3 + 4x| \Leftrightarrow 3x - 5 = 3 + 4x \vee 3x - 5 = -(3 + 4x)$

$$x = -8 \vee x = \frac{2}{7}$$

7.11 $|x^2 - 3x + 1| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 1 \vee x2 - 3x + 1 = -1$

$$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 1 \vee x = 3$$

Exercícios resolvidos

7.12 $|x^2 - x + 1| + 1 = 2x \Leftrightarrow |x^2 - x + 1| = 2x - 1$

A condição é que o módulo de um número é não negativo.

Logo: $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$$|x^2 - x + 1| = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2x - 1 \vee x^2 - x + 1 = -(2x - 1)$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0 \vee x^2 + x = 0$$
$$x = 1 \vee x = 2 \vee \cancel{x = -1} \vee \cancel{x = 0}$$

$x = 0$ e $x = -1$ não são soluções porque não satisfazem a condição em cima.

7.13 $$x^2 + 2|x| - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 15 = 0 \text{ se } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x = -5} \vee x = 3 \\ x = -3 \vee \cancel{x = 5} \end{cases}$$

$x = -5$ e $x = 5$ não são soluções porque nao satisfazem a condição em cima.

8. Escreve uma expressão equivalente mas sem o módulo.

8.1 $|3 - \sqrt{7}|$

8.2 $|1 - \sqrt{2}| + |5 - \sqrt{2}|$

8.3 $|x - 2| + |x - 3|$, se $x > 3$

8.4 $|x - 2| + |x - 3|$, se $x < 1$

Resolução

8.1 $|3 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 3$

8.2 $|1 - \sqrt{2}| + |5 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 + 5 - \sqrt{2} = 4$

8.3 $|x - 2| + |x - 3| \Leftrightarrow x - 2 + x - 3 = 2x - 5$, se $x > 3$

8.4 $|x - 2| + |x - 3| \Leftrightarrow 2 - x + 3 - x = 5 - 2x$, se $x < 2$

9. Determina x se:

9.1 $d(x, 1) = 3$ 9.2 $d(4, x) = 9$ 9.3 $d(x, -2) = 7$ 9.4 $d(-4, x) = -8$

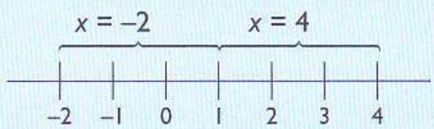
Resolução

A distância entre dois pontos x_1 e x_2 é definida por:

$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$

9.1 $d(x, 1) = 3 \Leftrightarrow |x - 1| = 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$

Graficamente:



Exercícios resolvidos

9.2 $d(4, x) = 9 \Leftrightarrow |4 - x| = 9 \Leftrightarrow |x - 4| = 9$
$\Leftrightarrow x = 13 \vee x = -5$

9.3 $d(x, -2) = 7 \Leftrightarrow |x + 2| = 7 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -9$

9.4 $d(-4, x) = -8 \Leftrightarrow |-4 - x| = -8 \Leftrightarrow |x + 4| = -8$, é impossível porque a distância nunca pode ser negativa.

10. Resolve as inequações modulares seguintes.

10.1 $\left|\frac{x}{2}\right| > 5$ 10.2 $|x + 1| \leq 13$ 10.3 $|3 - x| > 12$ 10.4 $|7x - 4| < 5 - x$

Nota

$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ se $a \in \mathbb{R}^+$

Resolução

10.1 $\left|\frac{x}{2}\right| > 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < -5 \vee \frac{x}{2} > 5$

$x < -10 \vee x > 10$

10.2 $|x + 1| \leq 13 \Leftrightarrow -13 \leq x + 1 \leq 13$
$-14 \leq x \leq 12$

10.3 $|3 - x| > 12 \Leftrightarrow |x - 3| > 12 \Leftrightarrow x - 3 < -12 \vee x - 3 > 12$
$x < -9 \vee x > 15$

10.4 $|7x - 4| < 5 - x$

A condição de existência: $5 - x > 0$

$\Leftrightarrow x < 5$

$|7x - 4| < 5 - x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 4 > -(5 - x) \\ 7x - 4 < 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - x > 4 - 5 \\ 7x + x < 5 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{6} \\ x < \frac{9}{8} \end{cases}$$

$S = x \in \left]-\frac{1}{6}; \frac{9}{8}\right[.$

Exercícios propostos

1. Associa V ou F às seguintes proposições:
   1.1 $|-9| = 9$
   1.2 $|7 - 9| = 9 - 7$
   1.3 $|-8| = -(-8)$
   1.4 $\left|\frac{2}{3}\right| = -\frac{2}{3}$
   1.5 $|7 - 9| = 7 - 9$

2. Indica o módulo dos seguintes números:
   2.1 $|-8|$ 2.2 $|-5 + 9|$ 2.3 $|8 - 10|$ 2.4 $|5 - 9|$

3. Verifica as propriedades 2, 3 e 4 da secção 1.2 por meio de tabelas.

4. Calcula, geometricamente, os seguintes módulos:
   4.1 $|-5 + 4|$ 4.2 $|3 + 5|$ 4.3 $|8 - 4|$ 4.4 $|-2 - 3|$

5. Calcula, analiticamente, os seguintes módulos:
   5.1 $|3 - 7|$
   5.2 $|-3 + 53|$
   5.3 $|-100 + 234|$
   5.4 $|-5{,}8 + 3{,}0125|$

6. Representa, graficamente, cada uma das seguintes funções:
   6.1 $y = |-x|$
   6.2 $y = |1 - 4x^2|$
   6.3 $y = |x^2 - 3x + 2|$
   6.4 $y = |2x + 1|$

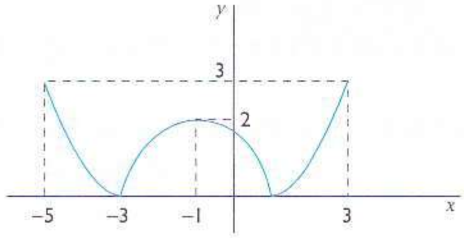
7. Traça o gráfico de cada uma das seguintes funções:
   7.1 $y = -2|x| + 2$
   7.2 $y = x^2 + |x| + 3$
   7.3 $y = -x^2 - |x| - 6$
   7.4 $y = 3|x| + 2$

8. Constrói o gráfico e dá o domínio e o contradomínio da função $y = |x - 3|$.

9. Sobre a função $f(x) = |x^2 - 1|$, responde as seguintes perguntas:
   9.1 Para que valores de x é que $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ e $f(x) = 0$?
   9.2 Para que valores de x é que $f(x)$ é crescente ou decrescente?

Exercícios propostos

10. Faz o estudo da monotonia e da variação do sinal e indica ainda os zeros e o contradomínio da função abaixo.



11. Resolve as seguintes equações modulares:
    - 11.1 $|x-5|=9$
    - 11.2 $|2+x|=4$
    - 11.3 $|3x+2|=2$
    - 11.4 $\left|\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{8}$

12. Resolve as seguintes equações modulares:
    - 12.1 $|x-1|=|3x+2|$
    - 12.2 $|x+1|=3|x+2|$
    - 12.3 $|x+3|=2\left|x-\frac{1}{3}\right|$
    - 12.4 $|x-1|-|3x-2|=2$

13. Resolve as seguintes equações modulares:
    - 13.1 $|3x-6|=x-2$
    - 13.2 $|2x+3|=x-1$
    - 13.3 $|x^2-3x-2|=2x-8$
    - 13.4 $|3x-2|=3-2x$
    - 13.5 $|5x-4|=x-1$
    - 13.6 $|x-3|=-2x-1$

14. Resolve as seguintes inequações modulares:
    - 14.1 $|x-2|<3$
    - 14.2 $|2x-0{,}5|\leq 4$
    - 14.3 $|3x+1|-1\geq 0$
    - 14.4 $|2-3x|\geq -2$
    - 14.5 $|x^2-5x|\geq 6$
    - 14.6 $|x^2-5x|\leq 6$
    - 14.7 $|x|<-2$

Exercícios propostos

15. Resolve as inequações seguintes:

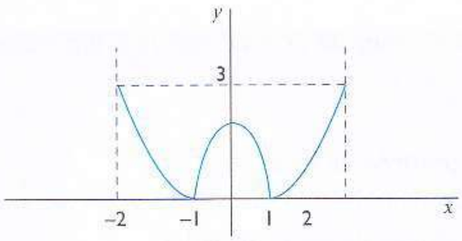
15.1 $|x|^2 - 3|x| + 2 > 0$

15.2 $|x|^2 - 3|x| + 1 \leq 0$

15.3 $|x|^2 - 8|x| + 15 < 0$

15.4 $|x|^2 - 9|x| + 18 \geq 0$

16. O gráfico abaixo representa a função $y = |x^2 - 1|$.



Resolve as seguintes inequações:

16.1 $|x^2 - 1| > 3$

16.2 $|x^2 - 1| \leq 3$

16.3 $0 \leq |x^2 - 1| \leq 1$

17. Determina o domínio de cada uma das seguintes funções:

17.1 $y = \sqrt{|x| - 2}$

17.2 $y = \sqrt{|x - 3| + 1}$

18. Resolve as seguintes equações:

18.1 $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

18.2 $x - x\,|x - 1| = 4$

18.3 $|x^2 - x - 5| = |x - 2|$

18.4 $|-x + 50| = 50$

18.5 $|x - 1| = x - 1$

18.6 $|x^2 + 3x - 2| = 2x - 8$

Unidade 2

Cálculo combinatório e probabilidades

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- aplicar fórmulas de factorial, arranjos, combinações e permutações de um número para resolver problemas reais da vida;
- distinguir arranjos, permutações e combinações;
- aplicar a fórmula de Newton para efectuar desenvolvimento de $(x + y)^n$, sendo n um número natural;
- reconhecer regularidades em fenómenos aleatórios;
- aplicar probabilidades para resolução de problemas práticos da vida;
- calcular frequências absolutas e relativas de um acontecimento;
- aplicar as propriedades de frequência relativa para cálculos de probabilidades;
- calcular probabilidades de acontecimentos incompatíveis equiprováveis;
- resolver problemas de determinação da probabilidade de um acontecimento em casos simples.

A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo pelo qual há tantos exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a probabilidade de ocorrência de um número numa experiência aleatória.

2.1 Análise combinatória

A análise combinatória é a parte da Matemática que se dedica à contagem de elementos, de sequência de elementos ou, ainda, à contagem de subconjuntos de um dado conjunto. O conhecimento de alguns conceitos da teoria de conjuntos permite-nos ter uma perspectiva mais natural do cálculo combinatório e das probabilidades, fornecendo ainda uma ferramenta necessária à resolução de problemas muito simples, mas muito frequentes, do nosso dia-a-dia.

1. Cardinal de um conjunto

O cardinal de um conjunto finito A é o número de elementos deste conjunto. O cardinal do conjunto A representa-se por $\#A$.

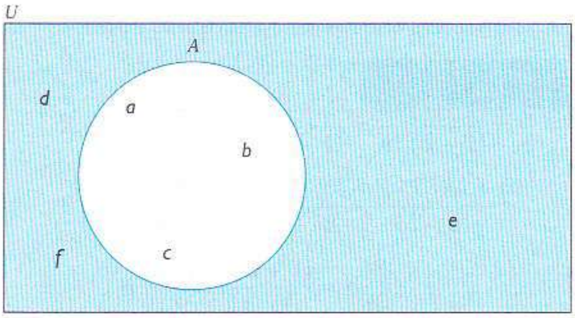
Exemplos

1. Se $A = \{a,b,c,d\}$, dizemos que $\#A = 4$.

2. Sendo $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$, então:
   $\#A = 3$
   $\#B = 4$
   $\#(A \cup B) = 7$
   $\#(A \cap B) = 0$

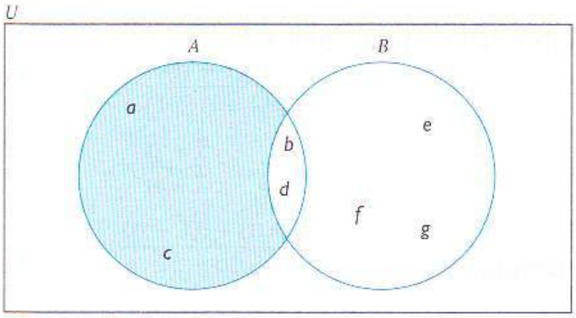
2. Complementar de um conjunto

O complementar de um conjunto *A* em relação a um dado universo *U* é o conjunto de todos os elementos de *U* que não pertencem a *A*. Representa-se por $\overline{A}$.



$\overline{A} = \{d,e,f\}$

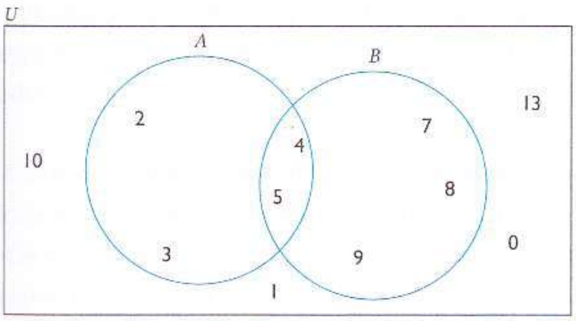
Dados os conjuntos *A* e *B*, chama-se complementar de *B* em relação a *A* ao conjunto dos elementos de *A* que não pertencem a *B*. Representa-se por $A \backslash B$ ou $A - B$.



$A \backslash B = \{a,c\}$
Pode ainda ler-se:
A menos *B*
Diferença de *A* e *B*

3. Reunião e intersecção de conjuntos

Chama-se reunião *A* com *B* ao conjunto de todos os elementos de conjunto *A* e do conjunto *B*. Chama-se intersecção *A* com *B* ao conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente ao conjunto *A* e ao conjunto *B*.



$A \cup B = \{2,3,4,5,7,8,9\}$

$A \cap B = \{4,5\}$

4. Produto cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados que se podem formar, indicando primeiro um elemento de A e depois um elemento de B. Representa-se por $A \times B$.

$$A \times B = \{(x,y): x \in A \wedge y \in B\}$$

Exemplo

1. Sendo $A = \{1,2\}$ e $B = \{1,4,5,6\}$, então $A \times B$ é:

$$A \times B = \{(1;1);(1,4);(1;5);(1,6);(2;1);(2,4);(2;5);(2,6)\}$$

Notas facilmente que:

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

Algumas propriedades de conjuntos:

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

} Primeiras leis de Morgan

- Cardinal da reunião de dois conjuntos:
  $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

- Número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n.

Exemplo

1. $A = \{a,b\}$

Os subconjuntos são: $\underbrace{\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a,b\}}$

Um conjunto com 2 elementos tem $2^2 = 4$ subconjuntos.

2.2 Factorial de um número natural

Dado um número natural n, chama-se factorial de n ao produto dos n primeiros números naturais, se $n \neq 1$.

O factorial de n representa-se por $n!$.

$n!$ – lê-se «n factorial» ou «factorial de n».

Alguns casos especiais:

$$1! = 1; \ 0! = 1$$

Em geral:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... \times 1$$

Observações

- $n! = n(n-1)(n-2)!$

- $(n + 1)! = (n + 1)\, n!$
- $(n - 2)! = (n - 2)(n - 3)!$

Exemplos

1.1 $2! = 2 \times 1$

1.2 $3! = 3 \times 2 \times 1$

1.3 $5! = 5 \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!} = 5 \cdot 4!$

1.4 $n! = n(n - 1)!$

2. Vamos calcular os factoriais seguintes:

2.1 $5! + 4! = 120 + 24 = 144$

2.2 $\dfrac{5! + 4!}{5! - 4!} = \dfrac{5 \cdot 4! + 4!}{5 \cdot 4! - 4!} = \dfrac{\cancel{4!}\,(5 + 1)}{\cancel{4!}\,(5 - 1)} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

2.3 $\dfrac{7! - 8! + 6!}{8! - 6!} = \dfrac{7 \cdot 6! - 8 \cdot 7 \cdot 6! + 6!}{8 \cdot 7 \cdot 6! - 6!}$

$= \dfrac{\cancel{6!}\,(7 - 56 + 1)}{(56 - 1) \cdot \cancel{6!}} = -\dfrac{48}{55}$

3. Vamos simplificar as fracções seguintes:

3.1 $\dfrac{(n + 1)!}{n! + (n + 1)!} = \dfrac{(n + 1)n!}{n! + (n + 1) \cdot n!}$

$= \dfrac{(n + 1)\,\cancel{n!}}{(1 + n + 1)\cancel{n!}}$

$= \dfrac{n + 1}{n + 2}$

3.2 $\dfrac{(n - 1)! - (n - 2)!}{n!} = \dfrac{(n - 1)(n - 2)! - (n - 2)!}{n \cdot (n - 1)(n - 2)!}$

$= \dfrac{\cancel{(n - 2)!}(n - 1 - 1)}{\cancel{(n - 2)!}n \cdot (n - 1)}$

$= \dfrac{n}{n^2 - n}$

2.3 Arranjos com repetição

Chama-se arranjo com repetição ou arranjo completo a qualquer sequência formada por elementos de um dado conjunto. Representa-se por ${}^nA_p$, onde n é o número de elementos ordenados p a p.

Consideremos o seguinte problema: quantos números distintos, de 3 algarismos, podem ser escritos, no sistema decimal, com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Os elementos do conjunto procurado são sequências de três algarismos, escolhidos de entre os quatro algarismos 1, 2, 3 e 4. Deseja-se, portanto, que se determine o número de sequências distintas de três algarismos, escolhidos entre 1, 2, 3 e 4.

111	121	131	141	211	 441
112	122	132	142	212	 442
113	123	133	143	213	 443
114	124	134	144	214	 444

64 sequências diferentes

Ora, $64 = 4^3$, o que permite concluir que

O número de arranjos completos ^nA_p de n elementos p a p é: $^nA_p = n^p$.

Para o nosso exemplo: $^4A_3 = 4^3 = 64$.

Sabendo que M é um conjunto com dois elementos e P um conjunto com três elementos, vamos calcular o número de aplicações que é possível definir de M em P.

$M = \{a,b\}$ e $P = \{1,2,3\}$

Logo,

O número de aplicações de um conjunto de cardinal p num conjunto de cardinal n é dado por: $^nA_p = n^p$

Para o nosso exemplo: $^3A_2 = 3^2 = 9$.

2.4 Arranjos sem repetição

Chama-se arranjo (ou arranjo sem repetição) a uma qualquer sequência de elementos, todos diferentes, escolhidos entre os elementos de um conjunto dado. Representa-se por A^n_p, onde n é o número de elementos ordenados p a p, sem repetição.

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de p, e designa-se por A^n_p a todo o agrupamento do p elementos distintos.

$$A^n_p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ ...\ (n-p+1)}_{p \text{ factores}}$$

Exemplos

1. $A^4_2 = 4 \times 3 = 12$
2. $A^5_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$
3. $A^5_2 = 5 \times 4 = 20$

Observa com atenção:

$$A^5_2 = 5 \times 4 \Leftrightarrow A^5_2 = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{3 \times 2 \times 1}^{3!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!}}$$

$$A^5_2 = \frac{\overbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}^{5!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{(5-2)!}}$$

$$A^5_2 = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Generalizando para o arranjo de n elementos p a p, podemos escrever que:

$$A^n_p = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ com } n \geq p.$$

Exemplos

1. $A^6_3 = \dfrac{6!}{(6-3)!}$

   $= \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$

   $= 120$

2. Vamos determinar n, sabendo que $A^n_2 = 156$.

   $A^n_2 = \dfrac{n!}{(n-2)!}$, por isso:

   $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 156 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)!\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 156$

   $n^2 - n - 156 = 0$

   $n = -12 \vee n = 13$

   $n = -12$ não serve porque $n \in \mathbb{N}$ e $-12 \notin \mathbb{N}$.
   Logo, a solução é $n = 13$.

3. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Para abrir o cofre é preciso conhecer o segredo. O segredo é marcado por uma sequência de três algarismos diferentes. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer para abri-lo?
   As sequências serão do tipo *a b c*. Como a ordem dos três elementos é fundamental, trata-se de um arranjo de 10 algarismos três a três.

   $A^{10}_3 = \dfrac{10!}{(10-3)!}$

   $= 10 \times 9 \times 8$

   $= 720$

4. Sendo $A = \{a,b\}$ e $B = \{1,2,3\}$, determina quantas aplicações injectivas é possível definir de A em B?
   Numa aplicação injectiva, não há imagens repetidas, logo, o número pedido é $A^3{}_2$.
   $A^3{}_2 = 3 \times 2 = 6$.

2.5 Permutações

Chama-se permutação de n elementos de um conjunto finito A a qualquer arranjo que tenha todos os elementos de A.

Designam-se os permutações de n elementos por:

$$P_n = n!$$

P_n lê-se permutação de n.

Exemplos

1. $P_3 = 3!$
   $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$
2. $P_5 = 5! = 120$
3. Com as letras da palavra MAPUTO:
   3.1 Quantos anagramas podemos escrever? Nota: «anagrama» refere-se a uma palavra com ou sem sentido.
   $P_6 = 6! = 720$

   3.2 Quantos anagramas começam por M?
   Fixando M, podemos permutar as restantes cinco letras M _ _ _ _ _, isto é, $5! = 120$.

   3.3 Quantos anagramas começam por T e terminam por P?
   Fixando as letras T e P, vamos permutar as outras 4 letras T _ _ _ _ P, isto é, P_4 $4! = 24$.
   Logo, existem 24 anagramas que começam por T e terminam por P.

4. Vamos calcular o valor de n, sabendo que $P_{(n+1)} = 120$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 120 & 2 & & & \\ \hline 0 & 60 & 3 & & \\ & 0 & 20 & 4 & \\ & & 0 & 5 & 5 \\ & & & 0 & 1 \end{array}$$

$120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
$P_{(n+1)} = (n+1)!$
Então, $(n+1)! = 5!$
$n+1 = 5 \Rightarrow n = 4$

2.6 Combinações

Chama-se combinações de n elementos agrupados p a p, e representa-se por C^n_p ao número de grupos que se podem formar com p dos n elementos, diferindo uns dos outros pela natureza dos seus elementos.

$$C^n_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Observações

- C^n_p representa o número de subconjuntos de p elementos que é possível formar num conjunto de n elementos.
- p pode tomar valores de 0 a n, inclusive.
- $C^n_0 = 1$; $C^n_n = 1$; $\forall_n \in \mathbb{N}$

Exemplos

1. Vamos calcular as combinações seguintes:

1.1 $$C^{15}_{12} = \frac{15!}{12!(15-12)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!} \cdot 3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

1.2 $$C^8_5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 2}{1} = 56$$

2. Vamos determinar n, sabendo que $C^n_2 = 231$.

$C^n_2 = 231$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 231 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 231$$

$$n^2 - n - 462 = 0$$

$$\cancel{n = -21} \vee n = 22$$

A solução é $n = 22$.

3. Pretende-se escolher três alunos entre cinco candidatos, para formar uma comissão desportiva da escola, sem tarefas diferenciadas. De quantas maneiras diferentes é possível fazer a relação?

   Lendo com atenção o problema, conclui-se que, afinal, ele consiste em determinar o número total de subconjuntos de 3 elementos de um conjunto de 5 elementos. Isto é, calcular C^5_3.

   $$C^5_3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

   Logo, a escolha pode ser feita de 10 maneiras diferentes.

   Vamos agora ver outras aplicações práticas.

Exemplos

1. Um eleitor deve eleger, entre cinco candidatos, um presidente, um secretário e um tesoureiro para autarquia local. De quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha da comissão?

   A ordem na escolha dos elementos determina uma comissão diferente da outra. Trata-se, pois, de um problema de arranjos de cinco elementos 3 a 3.
   $A^5_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2. Um eleitor deve eleger entre cinco candidatos um presidente, um vice-presidente, um administrativo, um secretário e um tesoureiro para autarquia local. De quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha da comissão?

   A ordem na escolha dos elementos determina uma comissão diferente da outra. Trata-se, pois, de um problema de arranjos de cinco elementos 5 a 5. É uma permutação.
   $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

3. Uma turma da 12.ª classe quer eleger, entre cinco alunos, uma comissão de três alunos para organizar uma festa. De quantas maneiras diferentes pode fazer a escolha da comissão?
   A ordem na escolha dos elementos não determina, necessariamente, uma comissão diferente da outra. Trata-se de escolher grupos de três alunos. É um problema da combinação de cinco elementos 3 a 3.

   $$C^5_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Propriedades da função C^n_p de n e p

A fórmula $C^n_p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ é uma função de n e p que goza das seguintes propriedades:

Propriedade 1

Quaisquer que sejam os inteiros n e p tais que $n > p > 0$, tem-se:

$C^n_p = C^n_{n-p}$

Demonstração

$$\begin{aligned} C^n_{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \\ &= C^n_p \end{aligned}$$

Isto é, $C^n_p = C^n_{n-p}$.

Propriedade 2

Quaisquer que sejam os inteiros n e p tais que $n - 1 > p > 0$, tem-se:

$C^n_p = C^{n-1}_p + C^{n-1}_{p-1}$

Demonstração

$C^n_p = C^{n-1}_p + C^{n-1}_{p-1}$ $\quad = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}$

$\quad = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$\quad = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \dfrac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}$

$p(p-1)! = p!$ $\quad = \dfrac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \dfrac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}$

$(n-p)(n-p-1) = (n-p)!$ $\quad = \dfrac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \dfrac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}$

$n(n-1)! = n!$ $\quad = \dfrac{(n-1)![(n-p)+p]}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

O que prova que $C^{n-1}_p + C^{n-1}_{p-1} = C^n_p$.

Exemplos

1. $C^5_2 = C^5_{5-2} \Leftrightarrow \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{(5-2)!(5-5+2)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{2! \cdot 3!}$

$\Leftrightarrow 10 = 10$

2. $C^{6-1}_4 + C^{6-1}_{4-1} = C^6_4$

$C^5_4 + C^5_3 = C^6_4 \Leftrightarrow \dfrac{5!}{4!1!} + \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{6!}{4!2!}$

$\dfrac{5 \cdot 4!}{4!} + \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2} = \dfrac{6 . 5 . 4!}{4! \cdot 2}$

$5 + 10 = 15$

$15 = 15$

Triângulo de Pascal

Coloquemos os números C^n_p em sucessivas linhas, formando um triângulo equilátero.

$$
\begin{array}{c}
C^0_0 \\
C^1_0 \quad C^1_1 \\
C^2_0 \quad C^2_1 \quad C^2_2 \\
C^3_0 \quad C^3_1 \quad C^3_2 \quad C^3_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Observações

- Na 1.ª linha, colocámos $C^0_0 = 1$
- Na 2.ª linha, colocámos $C^1_0 = C^1_1 = 1$
- Na 3.ª linha, colocámos $C^2_0 = C^2_2 = 1$; $C^2_1 = C^1_0 + C^1_1$ de acordo com a 2. ª propriedade e assim sucessivamente. Isto é:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -
\end{array}
$$

Observações

- Qualquer termo de triângulo é igual à soma de dois números colocados imediatamente acima.
- Forma-se, assim, um triângulo de números que pode ser ampliado com novas linhas. Este triângulo é designado «triângulo aritmético». Também pode ser designado «triângulo de Tartaglia» ou «triângulo de Pascal», dois matemáticos do século XVIII (o primeiro italiano e o segundo francês).

2.7 Binómio de Newton

Já conhecemos, por exemplo, o desenvolvimento do quadrado de uma soma. Vamos agora estudar uma fórmula simples que nos permitirá escrever o desenvolvimento de qualquer binómio de expoente natural, $(x + y)^n$.

Observações

- Para $n= 0$, $(x + y)^0 = 1$
- Para $n=1$, $(x + y)^1 = 1x^1 + 1y^1$
- Para $n=2$, $(x + y)^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2 = 1x^2y^0 + 2x^{2-1}y^{2-1} + 1x^{2-2}y^2$
- Para $n=3$, $(x + y)^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3 = 1x^3y^0 + 3x^{3-1}y^{3-2} + 3x^{3-2}y^{3-1} + 1x^{3-3}y^3$

Analisando os expoentes do x e do y, nota-se que:

- os expoentes de x decrescem da esquerda para a direita
- os expoentes de y crescem da esquerda para a direita
- os coeficientes são as combinações C^3_0, C^3_1, C^3_2, C^3_3

O que quer dizer que que podemos escrever, para $n = 3$:

$(x + y)^3 = C^3_0\, x^3y^{3-3} + C^3_1\, x^{3-1}y^{3-2} + C^3_2\, x^{3-2}y^{3-1} + C^3_3\, x^{3-3}y^3$

$= C^3_0\, x^3 + C^3_1 x^2y + C^3_2 xy^2 + C^3_3 y^3$

Generalizando, por indução empírica para um binómio de expoente $n \in \mathbb{N}$ qualquer, teremos a fórmula conhecida por a fórmula de Newton:

$$(x + y)^n = C^n_0\, x^n + C^n_1\, x^{n-1}y^1 + C^n_2\, x^{n-2}y^2 \dots + C^n_n\, xy^{n-1} + C^n_n y^n$$

Ou, usando a notação de somatório:

$$(x + y)^n = \sum_{p=0}^{n} C^n_p \cdot x^{n-p} \cdot y^p$$ Binómio de Newton

Exemplos

1. $(x - y)^3 = C^3_0x^3 + C^3_1x^2(-y) + C^3_2x \cdot (-y)^2 + C^3_3(-y)^3$
   $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

2. $(x - y)^4 = C^4_1x^4 + C^4_1x^3y + C^4_2x^2y^2 + C43xy^3 + C^4_4y^4$
   $(x - y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

3. Calculando 99^3:
   $99^3 = (100 - 1)^3$
   $= 100^3 - 3 \cdot 100^2 + 3 \cdot 100 - 1$
   $= 1000000 - 30000 + 300 - 1$
   $= 970299$

Observações

- O desenvolvimento de $(x + y)^n$ tem $n + 1$ termos.
- Os coeficientes do desenvolvimento do binómio de Newton são números inteiros e designam-se por coeficientes binominais.
- Os coeficientes binominais dos termos equidistantes dos extremos são iguais. Isto é, $C^n_{\ p} = C^n_{\ n-p}$.
- $T_{p+1} = C^n_{\ p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p$ é o termo geral do desenvolvimento
- A sequência dos coeficientes binominais para um dado valor de n é crescente até certa ordem e decrescente depois dela. O valor máximo é atingido para:

$$\begin{cases} p = \frac{n-1}{2} \text{ ou } p = \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ p = \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos

1. Vamos determinar no desenvolvimento de $\left(a - \frac{1}{b}\right)^8$:

   1.1 O termo de maior coeficiente.

   $p = \frac{8}{2} = 4$, por isso o desenvolvimento de $\left(a - \frac{1}{b}\right)^8$ tem 9 termos e o termo de maior coeficiente é o quinto.

   $T_5 = C^8_{\ 4} \cdot a^4 \left(-\frac{1}{b}\right)^4 = 70 \left(\frac{a}{b}\right)^4$

   1.2 Os termos de coeficientes iguais.

   De acordo com o ponto 3 das observações, os termos de coeficientes iguais são:
   o 1.º e 9.º
   o 2.º e 8.º
   o 3.º e 7.º
   o 4.º e o 6.º

2. Sem efectuarmos o desenvolvimento do binómio $\left(x^2 - \frac{y}{x}\right)^7$, vamos averiguar se existe no desenvolvimento algum termo em x^8 e, em caso afirmativo, vamos calcular esse termo.
   Recorrendo ao termo geral, temos:

   $T_{p+1} = C^7_{\ p}(x^2)^{7-p} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right)^p = C^2_{\ p+1} \cdot x^{14-3p} - (-y)^{p+1}$

   Como queremos x com o expoente 8, fica:
   $x^{14-3p} = x^8 \Leftrightarrow 14 - 3p = 8 \Leftrightarrow p = 2$

   Logo, existe esse termo,e é o terceiro termo. O seu valor é:
   $T_3 = C^7_{\ 2} \cdot x^8(-y)^2 = 21x^8y^2$

3. Vamos mostrar que $1 + \sqrt{3}$ é uma das raízes de $\sqrt[4]{28 + 16\sqrt{3}}$.
   Queremos provar que $(1+\sqrt{3})^4 = 28 + 16\sqrt{3}$. Ora,

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^4 &= C^4_0 \cdot 1 + C^4_1 \cdot \sqrt{3} + C^4_2 \cdot (\sqrt{3})^2 + C^4_3 \cdot (\sqrt{3})^3 + C^4_4 \cdot (\sqrt{3})^4 \\ &= 1 + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3^2} + 4\sqrt{3^3} + \sqrt{3^4} \\ &= 1 + 4\sqrt{3} + 18 + 12\sqrt{3} + 9 \\ &= 28 + 16\sqrt{3}\end{aligned}$$

   Isto é, $(1 + \sqrt{3})^4 = 28 + 16\sqrt{3}$.

2.8 Probabilidades

O cálculo de probabilidades iniciou-se no século XVII, com Pascal[1] e Fermat[2], quando estudavam questões ligadas aos jogos de azar. O cálculo das probabilidades é actualmente o ramo fundamental da Matemática para o estudo da Estatística.

Fenómenos aleatórios

Um fenómeno é aleatório se a sua realização depende inteiramente do acaso.

Exemplos

1. O aparecimento de «cara» ou «coroa» no lançamento de uma moeda ao ar.
2. O aparecimento do ponto 5 na face superior no lançamento de um dado.

É sobre os fenómenos aleatórios que vai incidir todo o estudo das probabilidades.

Acontecimentos – espaço de acontecimentos

Na queda de uma moeda lançada ao ar, apenas pode verificar-se dois resultados distintos: cara ou coroa.

O conjunto dos resultados é $U = \{\text{cara, coroa}\}$.

O conjunto de todos os casos possíveis relativos a uma prova é chamado **espaço de acontecimentos**.

Chamamos **acontecimento** a qualquer subconjunto do espaço de acontecimentos.

Exemplo

1. «Sair cara» no lançamento de uma moeda é um acontecimento.

---

1 Blase Pascal (1623-1652), matemático e físico francês.
2 Pierre Fermat (1601-1665), matemático francês.

Acontecimento contrário

O acontecimento contrário de A é o acontecimento que consiste na não verificação de A. Isto é, é o conjunto complementar de A.

O acontecimento contrário de A designa-se por $\overline{A}$.

Exemplos

1. A: sair cara no lançamento de uma moeda é o acontecimento.
2. $\overline{A}$: sair coroa no lançamento de uma moeda é o acontecimento contrário.

Acontecimento união

O acontecimento união de dois acontecimentos A e B é o acontecimento que consiste na verificação de, pelo menos, um dos acontecimentos.

O acontecimento união de A e B é o conjunto reunião de A com B. Representa-se por $A \cup B$ ou $A + B$.

Exemplo

1. No lançamento de um dado, «sair número par» é um acontecimento reunião dos acontecimentos «sair 2», «sair 4» e «sair 6»:
   $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} = \{2, 4, 6\}$

Acontecimento intersecção

O acontecimento intersecção de dois acontecimentos A e B consiste na realização simultânea dos dois acontecimentos.

O acontecimento intersecção representa-se por $A \cap B$ ou $A \cdot B$.

Exemplo

1. No lançamento de um dado, «sair 2» é um acontecimento intersecção dos acontecimentos $A = \{\text{sair um número par}\} = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{\text{sair um número primo}\} = \{2, 3, 5\}$:
   $A \cap B = \{2\}$

Acontecimento certo

O acontecimento certo relativo a uma prova é aquele que se verifica sempre que se realiza a prova.

Exemplos

1. No lançamento de uma moeda, «sair cara ou coroa» é um acontecimento certo.
2. No lançamento de um dado com faces numeradas de 1 a 6, «sair número menor que 7» é um acontecimento certo.

Acontecimento impossível

O acontecimento impossível relativo a uma prova é aquele que nunca se verifica sempre que se realiza a prova.

Exemplos

1. No lançamento de um dado com faces numeradas de 1 a 6, «sair número 8» é um acontecimento impossível.
2. Na queda de uma moeda lançada ao ar, «sair cara e coroa» é um acontecimento impossível.

Acontecimentos disjuntos

Dois acontecimentos A e B dizem-se disjuntos quando a sua intersecção é um acontecimento impossível. Isto é, A e B são disjuntos se $A \cap B = \varnothing$.

Observações

- Um acontecimento e o seu contrário são complementares.
- Dois acontecimentos incompatíveis não são, em geral, contrários.

Definição frequentista da probabilidade

O conceito de frequência relativa estudada na estatística está directamente ligada ao conceito de probabilidade.

Exemplo

1. Vamos determinar a frequência relativa do acontecimento «aparecimento do número 5, no lançamento de um dado perfeito numerado de 1 a 6».

   Observa o quadro de resultados experimentais.

Número de lançamentos (n)	Frequência absoluta (f_a)	Frequência relativa (f_r)
99	20	0,2020...
200	42	0,21...
500	87	0,174...
800	157	0,196...
1000	184	0,184
1500	250	0,166...
2000	334	0,167

A experiência constata que a frequência relativa se aproxima de $\frac{1}{6}$ à medida que se aumenta o número de lançamentos. Isto é, as frequências relativas tendem a estabilizar-se num valor determinado.

A constatação que retirámos do exemplo leva-nos a enunciar a probabilidade do seguinte modo:

Num grande número de provas, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se em torno de número que coincide com a sua probabilidade.

Definição axiomática do conceito de probabilidades num espaço finito

A noção empírica de probabilidade ligada ao conceito de frequências relativas é inaceitável do ponto de vista de rigor matemático.

Todavia, foi baseando-se na noção frequentista que Komogrov, em 1933, estabeleceu rigorosamente a axiomática do cálculo de probabilidades.

Seja *U* o espaço de acontecimentos e *P(U)* o conjunto das suas partes, chama-se conjunto de partes de um conjunto ao conjunto de todos os seus subconjuntos. Denomina-se probabilidade uma aplicação de *P* de *P(U)* no conjunto [0,1] de números reais que obedece aos seguintes axiomas:

- $\forall A \in P(U) : P(A) \in [0,1]$
- $P(U) = 1$
- $\forall A \in P(U), \forall B \in P(U)$ se $A \cap B = \varnothing$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Corolários

1. *A probabilidade do acontecimento contrário de outro acontecimento obtém-se subtraindo* 1 à probabilidade do acontecimento de que ele é contrário

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2. A probabilidade de um acontecimento impossível é zero.

$$P(\varnothing) = 0$$

3. Se *A*, *B* e *C* são acontecimentos incompatíveis dois a dois, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

4. Se *A* e *B* são dois acontecimentos incompatíveis quaisquer, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Definição clássica (lei de Laplace)

Quando lançamos uma moeda equilibrada, aceitamos que qualquer uma das suas faces tem exactamente a mesma possibilidade de aparecer que a outra. Isto é, a probabilidade do acontecimento A_1 é a mesma do A_2. Dizemos, então, que os acontecimentos elementares são equiprováveis.

Lei de Laplace

Se os acontecimentos elementares são equiprováveis e incompatíveis dois a dois, a probabilidade de um acontecimento *A* é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Exemplos

1. Vamos calcular a probabilidade de que, num lançamento de um dado perfeito com as faces numeradas de 1 a 6, se obtenha:

   1.1 Um número par

   $A = \{2, 4, 6\}$ – o número de casos favoráveis é 3.

   $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – o número de casos possíveis é 6.

   $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou $P(A) = 0{,}5 = 50\%$.

   1.2 Um número não inferior a 5

   $A = \{5, 6\}$ – o número de casos favoráveis é 2.

   $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ – o número de casos possíveis é 6.

   $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Extrai-se uma carta, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Vamos calcular a probabilidade de que:

   2.1 A carta extraída seja um rei

   Num baralho há 4 reis. Por isso, o número de casos favoráveis é 4.

   O número de casos possíveis são as 52 cartas do baralho.

   $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

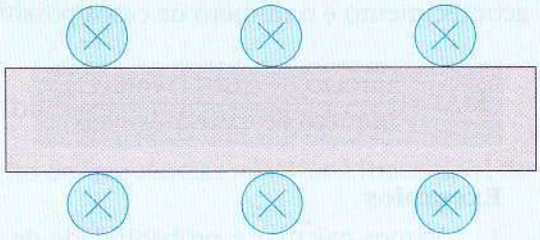
   2.2 A carta extraída seja copas

   Num baralho há 13 copas, por isso:

   $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Exercícios resolvidos

1. Seis amigos foram lanchar a uma pastelaria e sentaram-se ao acaso numa mesa rectangular com três lugares de cada lado.
Vamos determinar a probabilidade de dois desses amigos, a Joana e o Rui, ficarem sentados em frente um do outro.



Resolução

O número de casos possíveis corresponde aos lugares ocupados pela Joana e pelo Rui. Isto é, C^6_2.

O número de casos favoráveis é 3, porque na mesa há três possibilidades de ficar um em frente ao outro.

$$P(A) = \frac{3}{C^6_2} = \frac{3}{15} = 0{,}2.$$

2. O António abre, ao acaso, um livro, ficando à vista duas páginas numeradas. Qual é a probabilidade de a soma dos números dessas 2 páginas ser ímpar?

Resolução

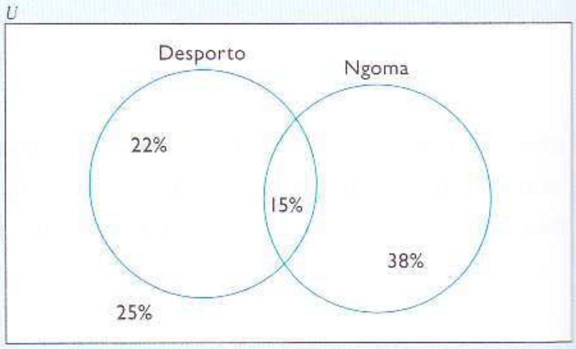
A soma de um número par com um número ímpar é igual a um número ímpar. Ora, das duas páginas numeradas, uma tem número par e outra tem um número ímpar. Trata-se de um acontecimento certo.

A probabilidade do acontecimento é 1, isto é $P(A) = 1$.

3. Dos ouvintes da Rádio Moçambique, 37% ouvem o programa «RM Desporto», 53% ouvem o programa «Ngoma Moçambique» e 15% ouvem ambos os programas. Ao escolher aleatoriamente um ouvinte desta estação radiofónica, qual é a probabilidade de que:
   3.1 Escute apenas um dos referidos programas?
   3.2 Não escute nenhum destes dois programas?

Resolução

Observa o diagrama que ilustra o problema colocado.



3.1 $P(A) = \frac{22 + 38}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$

ou

$P(A) = \frac{3}{5}$.

3.2 $P(A) = \frac{25}{100} = 25\%$

ou

$P(A) = \frac{1}{4}$.

Exercícios resolvidos

4. A Zinha prepara-se para realizar um exame. Ela deve estudar 100 temas dos quais três, escolhidos ao acaso, sairão, de certeza, no exame. Por várias razões, a Zinha prepara apenas $\frac{1}{4}$ dos temas.
Vamos calcular a probabilidade de que ela tenha estudado só dois dos temas que sairão no exame.

Resolução

A Zinha preparou $\frac{1}{4}$ dos temas, isto é $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25$ temas.
O número total dos casos possíveis de saírem três temas dos 100 é $C^{100}{}_3$.
O número de possibilidades de saírem 2 dos 25 temas estudados é $C^{25}{}_2$.
O número de possibilidades de sair 1 dos 75 temas não estudados é $C^{75}{}_1$.
O número total dos casos favoráveis é $C^{75}{}_1 \cdot C^{25}{}_2$.

$P(A) = \dfrac{C^{75}{}_1 \cdot C^{25}{}_2}{C^{100}{}_3}$.

5. Considera duas linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns termos:

$$\ldots \ldots 36 \; a \; 126 \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots 120 \; b \ldots \ldots \ldots$$

Indica o valor de a e de b.

Resolução

No triângulo de Pascal, um termo da linha seguinte é igual à soma dos dois termos consecutivos da linha anterior. Por isso, vamos escrever:

$36 + a = 120$
$a + 126 = b$

Resolvendo o sistema, teremos:

$36 + a = 120$	$a + 126 = b$
$a = 120 - 36$	$b = 210$
$a = 84$	

6. Numa turma da Escola Secundária de Cambine há 27 alunos: 15 raparigas e 12 rapazes. O chefe da turma é o Carlos.
Pretende-se constituir uma comissão para organizar uma festa. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Ficou combinado que um dos 3 rapazes da comissão será obrigatoriamente o chefe da turma.
   6.1 Quantas comissões diferentes se podem formar?
   6.2 Admite que os 7 membros da comissão, depois de eleitos, não posaram para uma fotografia. Supondo que eles se colocaram ao acaso, qual é a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?

Exercícios resolvidos

6.1 A turma tem 15 raparigas e 12 rapazes e o chefe é um rapaz.
As quatro meninas podem ser escolhidas de $C^{15}{}_{4}$ modos diferentes.
Como o Carlos faz parte da comissão pela força do acordo, então os dois rapazes podem ser escolhidos de $C^{11}{}_{2}$ modos diferentes.
$N = C^{15}{}_{4} \cdot C^{11}{}_{2} = 75\ 075$
O número de comissões que é possível formar é 75 075.

6.2 As raparigas devem ficar juntas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{RMMMMRR} \\ \text{MMMMRRR} \\ \text{RRMMMMR} \\ \text{RRRMMMM} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{R – rapazes; M – raparigas} \\ \text{O bloco das quatro raparigas e três} \\ \text{rapazes pode dispor-se de 4! formas} \\ \text{diferentes.} \end{array}$$

Por sua vez, as raparigas podem permutar entre de 4! maneiras.
O número de casos favoráveis é 7!
A probabilidade pedida é $P(A) = \dfrac{4! \cdot 4!}{7!} = 0{,}114$.

7. Os quatro primeiros números de certa linha de triângulo de Pascal são 1, 11, 55 e 165.
Determina os últimos três números da linha seguinte.

Resolução
Os três primeiros números da linha seguinte são 1,12, 66.

$$\begin{array}{c} \dots \\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 1 \quad 11 \quad 55 \quad 165 \\ 1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \dots\dots \end{array}$$

Pela propriedade $C^{n}{}_{p} = C^{n}{}_{n-p}$ os três últimos números serão 66, 12, 1.

Exercícios propostos

1. Calcula os factoriais seguintes:

1.1 $\frac{10!}{12!}$

1.2 $\frac{4! \cdot 7!}{6 \cdot 5!}$

1.3 $\frac{103!}{101!}$

1.4 $\frac{2001! + 2002!}{2003!}$

1.5 $\frac{20! - 18!}{19!}$

1.6 $\frac{21! - 19!}{19! + 20!}$

2. Simplifica as seguintes fracções:

2.1 $\frac{n!}{(n+1)!}$

2.2 $\frac{n!}{(n-2)! + (n-1)!}$

2.3 $\frac{(n+1)!(n+2)}{(n-1)!(n^2+3n+2)}$

2.4 $\frac{(n+1)! - 2n!}{n! + (n-1)!}$

2.5 $\frac{n!}{(n+1)! + (n-1)!}$

3. Calcula o valor de *n*, sabendo que:

3.1 $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = 56$

3.2 $\frac{(n-5)!}{(n-3)!} = \frac{1}{28}$

3.3 $(n-1)! \cdot n = 24$

3.4 $\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 4$

3.5 $\frac{(n+3)!}{n!} = 60$

3.6 $\frac{(n+1)! + 2(n+3)!}{(n+2)! + (n+1)!} = 13$

Exercícios propostos

4. Determina n, sabendo que:

   4.1 $P_{(2n+1)} = 120$

   4.2 $P_n = 720 \times A^n_2$

   4.3 $\dfrac{C^{n+1}_5}{C^{n-3}_3} = 21$

5. Sabendo que $C^n_2 = 6 - n$, calcula p de modo que $C^{n-1}_p = C^{n+1}_{p-2}$.

6. Determina n de modo que seja $7 \cdot A^n_3 = 9(A^{n-1}_5 + A^{n-2}_2)$.

7. Um restaurante tem, para constituição de uma ementa turística (um prato principal e uma sobremesa), 5 pratos diferentes e 6 sobremesas diferentes. De quantos modos diferentes pode ser constituída, neste restaurante, uma ementa turística?

8. Considera dez pontos diferentes A, B, C, ... de uma circunferência.

   8.1 Quantas rectas distintas definidas por esses 10 pontos?

   8.2 Quantos triângulos distintos são determinados pelos 10 pontos?

9. Determina o número de comissões com três membros, sem diferenciação de funções que podem ser formadas, escolhidas entre 5 raparigas e 5 rapazes.

   9.1 Sem qualquer restrição.

   9.2 Com duas raparigas e um rapaz.

10. O Vinício tem 4 discos de Zico, 3 de Stewart e 3 da Dama do Bling. De quantos modos diferentes pode o Vinício oferecer três discos de autores diferentes ao seu amigo Carlos?

11. Numa reunião estão 12 pessoas. Quantas comissões de 3 membros podem ser formadas, com a condição de que uma determinada pessoa A esteja sempre presente e uma outra pessoa B nunca participe com a pessoa A?

12. Simplifica as fracções seguintes:

    12.1 $\dfrac{(n+3)!(n+1)!}{n!(n+4)}$

    12.2 $\dfrac{(n+3)! + (n+1)!}{(n+2)!}$

    12.3 $\dfrac{(n+1)! + (n-1)!}{n!}$

    12.4 $\dfrac{(n+1)! - 2n!}{(n+1)!(n-1)!}$

Exercícios propostos

13. Calcula n, sabendo que:

13.1 $A^{n-1}{}_{2} = 56$

13.2 $C^{n-3}{}_{2} = 28$

13.3 $C^{n+3}{}_{n+1} = 36$

13.4 $\frac{1}{8} A^{n}{}_{6} = 9A^{n-2}{}_{4}$

13.5 $3A^{n}{}_{3} = 5(A^{n-1}{}_{3} + A^{n-2}{}_{2})$

13.6 $C^{n}{}_{5} = \frac{7}{15} A^{n-2}{}_{3}$

14. Para acompanhar a selecção nacional na Copa de África, é preciso formar-se uma equipa média que integre dois médicos e três massagistas.
Sabendo que estão disponíveis quatro médicos e cinco massagistas, de quantas maneiras diferentes pode escolher-se a constituição da equipa médica?

15. Várias pessoas encontraram-se numa festa, tendo cada uma delas cumprimentado cada das outras com um aperto de mão.
Alguém contou que terá havido exactamente 78 apertos de mão. Quantas eram as pessoas na festa?

16. Está a organizar-se uma visita de estudo de uma turma da 12.ª classe mas, devido a problemas de instalações do local a visitar, apenas podem deslocar-se 9 pessoas que deverão depois apresentar um relatório àqueles que não puderam ir. No grupo, deverá incluir-se dois professores da turma e um membro da Direcção da Escola.
Sabendo que a turma tem 15 alunos e 6 professores e a direcção tem 5 membros, de quantas maneiras é possível organizar a comitiva?

17. A Direcção de uma associação de estudantes tem oito membros. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos, entre eles, um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro, sabendo-se que não é permitida a acumulação de cargos?

18. Cinco amigos vão ao cinema e ficam em lugares consecutivos de uma mesma fila.

18.1 De quantas maneiras diferentes podem sentar-se?

18.2 Supõe que dois deles são namorados e exigem ficar ao lado um do outro. Quantas hipótese diferentes de arrumação restam?

19. Considera o conjunto $A = \{0,1,2,5,6,8\}$.

19.1 Quantos números impares diferentes de quatro algarismos distintos se podem representar com os elementos do conjunto A?

19.2 Quantos números distintos maiores que 200 e menores que 2000 se podem representar com os números os elementos de A, sem se repetir os algarismos?

Exercícios propostos

20. Colocaram-se num saco cinco bolas de cores diferentes, verde, azul, amarela, vermelha e castanha. Tira-se sucessivamente uma bola até sair amarela.
    20.1 Quantos casos diferentes há em que a bola amarela saía em último lugar?
    20.2 Quantas são as possibilidades de que a bola amarela não saia último lugar?

21. Determina o número de comissões com quatro elementos que podem ser formados, escolhidos entre 10 funcionários administrativos e 20 funcionários auxiliares de uma escola.
    21.1 Sem quaisquer restrições;
    21.2 Sendo dois administrativos e dois auxiliares;
    21.3 Sendo pelo menos dois administrativos

22. Considera os algarismos do conjunto $\{0,1,2,3,6,70\}$.
    22.1 Quantos números com quatro algarismos diferentes podem formar?
    22.2 De entre esses números, quantos são pares?
    22.3 Quantos números de quatro algarismos distintos contém os algarismos 3 e 7?

23. O João vai oferecer sete livros, podendo escolher entre 10 obras de Eça de Queirós e 8 de Camilo Castelo Branco. Quantos presentes diferentes pode escolher admitindo que:
    23.1 Três dos livros são de Camilo e os outros de Eça?
    23.2 No máximo três dos livros são de Camilo?
    23.3 Pelo menos três são de Eça?

24. Um aluno tem de responder a 6 questões num teste de 10 perguntas. De quantos modos diferentes pode fazer a escolha, se:
    24.1 Não houver qualquer solução restritiva?
    24.2 Não pode responder simultaneamente às duas primeiras?
    24.3 Tem de responder pelo menos 5 das sete primeiras questões?

25. Aplica a fórmula de Newton para o desenvolvimento de:
    25.1 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$
    25.2 $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^5$ para $x, y > 0$

26. Escreve, na forma simplificada, o 3.º termo do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{3}\right)^6$, se $x > 0$.

27. No desenvolvimento de $\left(\frac{x+1}{3} + \frac{1}{x}\right)^4$, com $x \neq 0$, calcula o valor de:
    27.1 O termo médio para $x = 1$;
    27.2 x que anula o 2.º termo.

Exercícios propostos

28. No desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x^2}\right)^6$, determina:

 28.1 O termo em x^{-1};

 28.2 A soma dos coeficientes binominais.

29. Uma pessoa tem de tomar diariamente, à mesma hora, 2 comprimidos de vitamina C e 1 comprimido de vitamina A. Por engano, misturou todos os comprimidos no mesmo frasco. Os comprimidos têm o mesmo aspecto exterior, sendo 20 de vitamina A e 35 de vitamina C. Ao tomar 3 dos comprimidos existentes no frasco, qual a probabilidade de cumprir as indicações médicas?

30. No lançamento simultâneo de dois dados com faces numeradas de 1 a 6, determina a probabilidade de, ao multiplicar os dois números saídos, o resultado ser 35.

31. Lança-se um dado até sair face 6. A probabilidade de serem necessários pelo menos dois lançamentos é:

 31.1 $\frac{1}{6}$

 31.2 $\frac{1}{3}$

 31.3 $\frac{2}{3}$

 31.4 $\frac{5}{6}$

32. Cinco amigos vão dar um passeio num automóvel de 5 lugares. Sabendo que só três deles podem conduzir, calcula o número de formas diferentes de ocuparem os lugares durante o passeio.

33. Numa prova de exame da 12.ª classe, há 9 questões de escolha múltipla com 4 respostas, das quais uma só é verdadeira. Se um aluno decidir responder ao acaso, qual é a probabilidade de:

 33.1 Acertar em todas as respostas?

 33.2 Acertar em apenas duas respostas?

Unidade 3

Funções reais de variável real

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

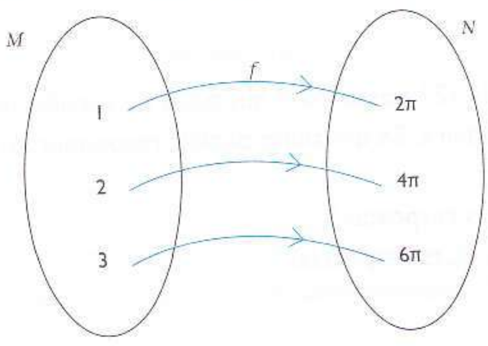
- definir uma função;
- determinar o domínio, contradomínio e zeros de uma função;
- representar graficamente uma função;
- averiguar a injectividade e a paridade de uma função;
- identificar o domínio e o contradomínio de uma função a partir da sua expressão algébrica;
- determinar a expressão da função inversa de uma função injectiva.

3.1 Noção de função e gráfico de uma função

Sabemos que o perímetro de uma circunferência é função do raio da circunferência e que essa função se exprime pela fórmula $P = 2 \cdot \pi \cdot r$ onde r designa a medida do raio e P o perímetro da circunferência.

Raio (r)	Perímetro da circunferência (P) $P = 2 \cdot \pi \cdot r$
1	2π
2	4π
3	6π
...	...

Dá-se o nome de função ou aplicação f a uma correspondência entre um conjunto M e um conjunto N se a cada elemento x de M corresponde um e só um elemento y de N.



$f: M \to N$

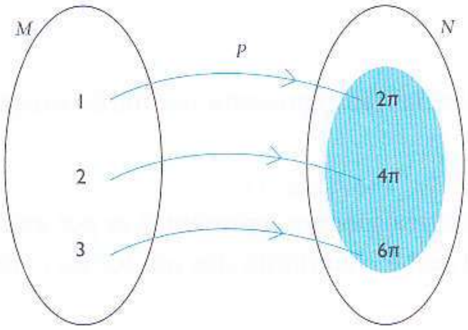
Simbolicamente:

f é função de M em N se $\forall\, x \in M,\ \exists\, y \in N : (x, y) \in f$

Diz-se que x é o objecto ou variável independente.
E ainda $y = f(x)$ é a imagem ou variável dependente.

No exemplo que damos do perímetro, P é a função, os valores que r tomam são os objectos e os valores dos perímetros para cada um dos valores do raio são as imagens.

3.1.1 Domínio e contradomínio



Ao conjunto dos objectos de M chama-se domínio e representa-se por D_f.

Ao conjunto das imagens de N chama-se contradomínio e representa-se por CD_f ou Im f.

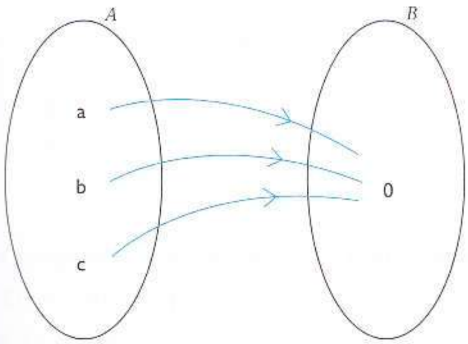
Consideremos a expressão $\sqrt{x^2 + 1}$, em que x é a variável real. Trocando na expressão, x por um elemento qualquer de de $\mathbb{R}$, obtem-se ainda um elemento de $\mathbb{R}$. A função definida pela expressão $\sqrt{x^2 + 1}$ transforma elementos de $\mathbb{R}$ em elementos de $\mathbb{R}$. Diz-se, então, que é uma função real de variável real.

Chama-se função real de variável real toda a aplicação de um subconjunto de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo

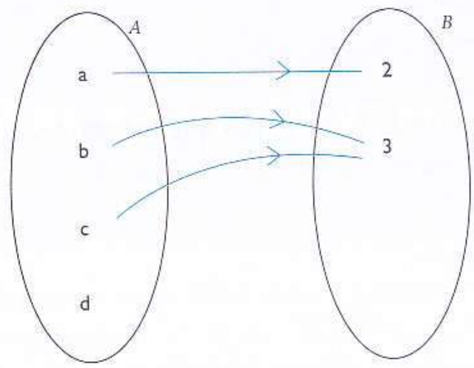
1. Vamos verificar qual das seguintes correspondências representa uma função de variável real.

1.1



1.1 Esta correspondência representa uma função porque a cada objecto corresponde uma imagem.

1.2



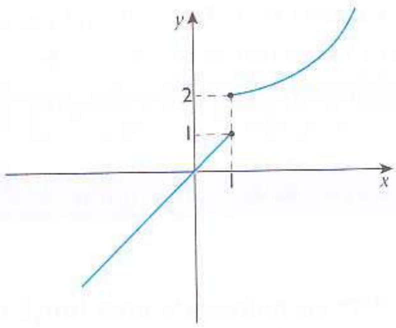
1.2 Esta correspondência não representa nenhuma função porque há um objecto sem imagem (d).

As funções reais de variável real podem representar-se por gráficos cartesianos. O gráfico de uma função real de variável real é o conjunto dos pontos do plano cartesiano que têm $(x, f(x))$ como coordenadas.

Exemplos

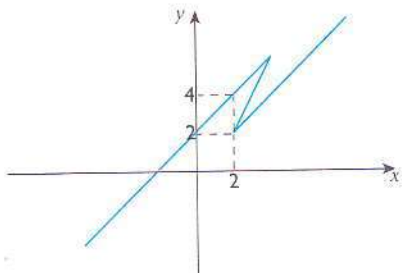
1. Vamos observar os gráficos seguintes e, depois, justificar porque nenhum deles corresponde à imagem de uma função.

1.1



Observa os pontos (1,1) e (1,2). Verifica-se que o objecto 1 tem duas imagens. Logo, não se trata de uma função.

1.2

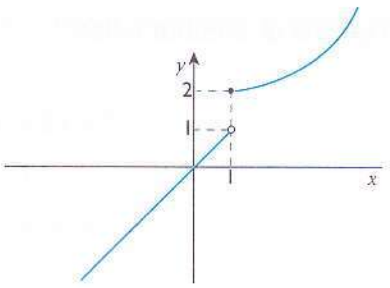


Observa os pontos (2,2) e (2,4). Verifica-se que o objecto 2 tem duas imagens. Logo, não se trata de uma função.

Importante: se um gráfico representa uma função, nenhuma recta vertical o intersecta em mais do que um ponto.

2. Vamos indicar o domínio e o contradomínio das funções representadas graficamente.

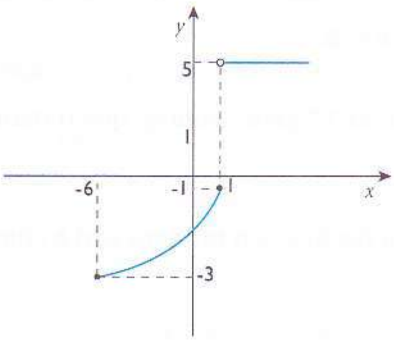
2.1



D_f: $x \in \mathbb{R}$

CD_f: $y \in]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$

2.2

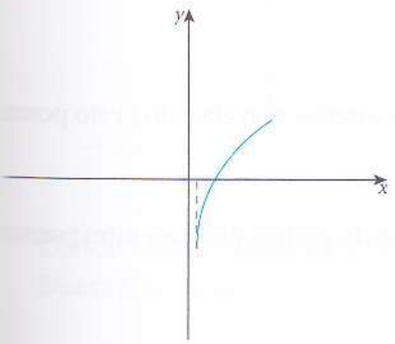


D_f: $x \in [-6; +\infty[$

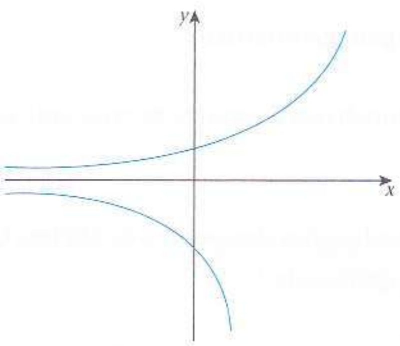
CD_f: $y \in [-3; -1] \cup \{5\}$

3. De entre os gráficos seguintes, vamos indicar aqueles que não correspondem a funções de variável real e, depois, indicar o domínio e o contradomínio dos que representam funções.

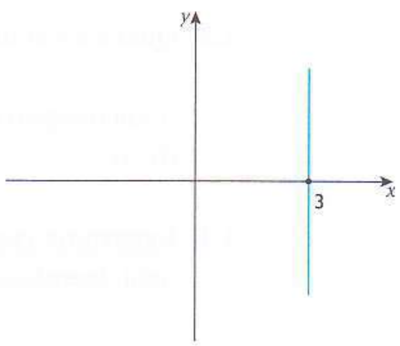
A.



B.



C.



A. Corresponde a uma função real de variável real.

D_f: $x \in]0;-\infty [$

CD_f: $y \in \mathbb{R}$

B. Traçando perpendiculares ao eixo dos xx pelo menos uma vai "cortar" o gráfico duas vezes. Logo, não se trata de uma função.

C. O objecto 3 tem infinitas imagens. Logo, não se trata de uma função.

3.1.2 Revisão da função do 1.º grau

Observa as funções seguintes. Procura descobrir o que há de comum nelas:

- $f(x) = 8x + 7$
- $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$
- $f(x) = -4x + \frac{1}{3}$
- $f(x) = \sqrt{2}x + 2$

Nota

- Todas as funções são de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;
- Todas as funções são do tipo $f(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

Toda a função do tipo $f(x) = ax + b$ é uma função do 1.º grau. Nota-se que o maior expoente de x é o 1.

O número real a chama-se coeficiente angular (ou declive) e o número real b chama-se coeficiente linear (ou ordenada na origem).

- Se $b = 0$ e $a \neq 0$ a função diz-se linear.
- Se $a > 0$ f cresce e se $a < 0$ f decresce.

Exemplo

1. Vamos considerar a função $f(x) = -2x + 4$.

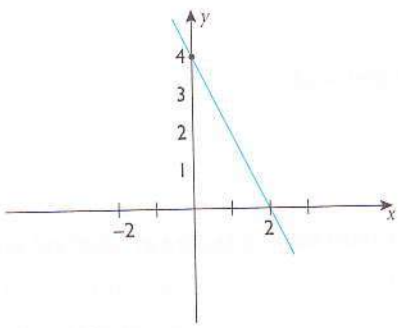
   1.1 Que nome se dá a esta função?

   $f(x) = -2x + 4$ é uma função do 1.º grau.

   1.2 Qual é a sua imagem geométrica?

   A sua imagem geométrica é uma recta crescente que intersecta o eixo do yy no ponto $(0, 4)$.

   1.3 Determina as coordenadas dos pontos de abcissa 0 e 2 do gráfico de f. Usa estes pontos para desenhar o gráfico de f.



$f(0) = 4 \rightarrow (0, 4)$

$f(+2) = 0 \rightarrow (+2, 0)$

3.1.3 Revisão da função quadrática

Observa as funções seguintes. Procura descobrir o que há de comum entre elas:

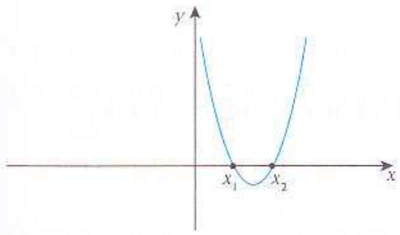
- $f(x) = 2x^2$
- $f(x) = -2x^2 + 2x + 7$
- $f(x) = -x^2 - 1$
- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x + 2$

Nota

- Todas as funções são do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;
- Toda a função deste tipo é chamada função quadrática.

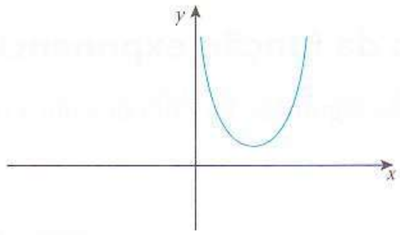
Toda a função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ pode apresentar um dos seguintes casos:

1.º caso: $a > 0$ e $\Delta > 0$



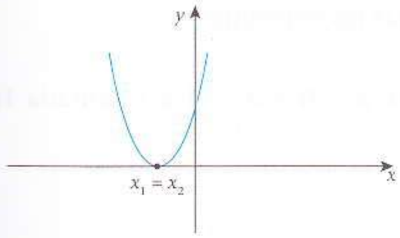
Concavidade voltada para cima
Duas raízes distintas

2.º caso: $a > 0$ e $\Delta < 0$



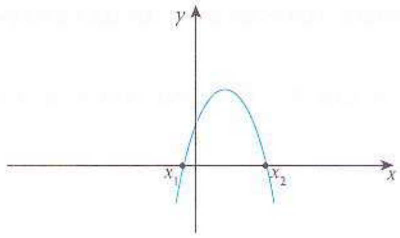
Concavidade voltada para cima
Não há raízes

3.º caso: $a > 0$ e $\Delta = 0$



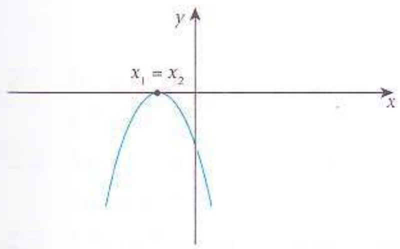
Concavidade voltada para cima
Duas raízes iguais

4.º caso: $a < 0$ e $\Delta > 0$



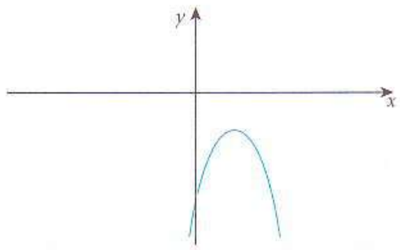
Concavidade voltada para baixo
Duas raízes distintas

5.º caso: $a < 0$ e $\Delta = 0$



Concavidade voltada para baixo
Duas raízes iguais

6.º caso: $a < 0$ e $\Delta < 0$



Concavidade voltada para baixo
Nao há raízes

Exemplo

1. Vamos determinar os valores de m para os quais a função $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + (m - 2)$ tenha:
   1.1 Concavidade voltada para cima;
   1.2 Duas raízes reais distintas.

   Na função dada temos $a = m$, $b = 2m - 1$ e $c = m - 2$

   1.1 $m > 0$
   1.2 $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 4m(m - 2) > 0$
   $\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m > 0$
   $\Leftrightarrow 4m + 1 > 0$
   $m > -\frac{1}{4}$.

   Conjugando as duas, temos a resposta final $m > 0$.

3.1.4 Revisão da função exponencial

Observa as funções seguintes. Procura descobrir o que há de comum entre elas.

- $y = 2^x$
- $y = 2 \cdot 3^x + 4$
- $y = -2^x + 4$

Nota

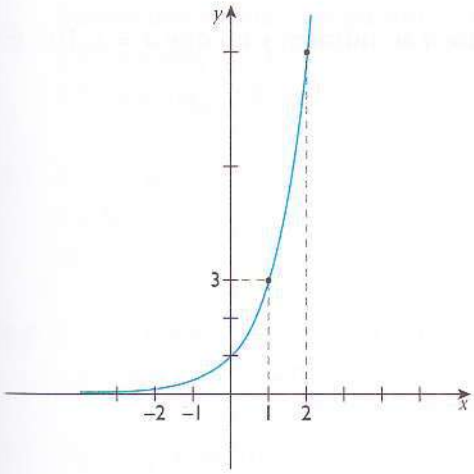
- Todas elas são do tipo $y = a^x + b$;
- A função do tipo $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$, chama-se função exponencial;
- A palavra exponencial deve-se ao facto da variável estar no expoente.

Toda função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$, do tipo $f(x) = a^x$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$ é chamada função exponencial.

Exemplo

1. Dada a função $f(x) = 3^x$, vamos indicar:
   1.1 O domínio e a imagem de f;
   1.2 Os intervalos em que f cresce ou decresce;
   1.3 Classifica f quanto à injectividade.

Primeiro vamos construir o gráfico de *f*.

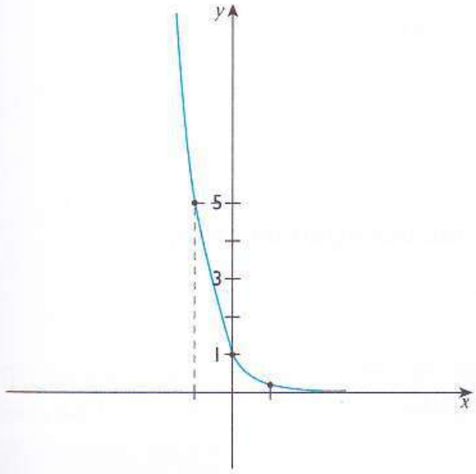


1.1 D_f: $x \in \mathbb{R}$
CD_f: $y \in \mathbb{R}^+$

1.2 *f* é monótona crescente.

1.3 A função é injectiva porque traçando perpendiculares ao eixo das ordenadas, estas intersectam-na uma vez.

2. Dada a função $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, vamos determinar:
   2.1 O domínio e o contradomínio de *f*;
   2.2 Os intervalos de *x* para os quais *f* cresce ou decresce;
   2.3 Se *f* é injectiva.



2.1 D_f: $x \in \mathbb{R}$
CD_f: $y \in \mathbb{R}^+$

2.2 Analisando o gráfico vemos que $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, logo a função é sempre decrescente.

2.3 A função é injectiva porque traçando rectas perpendiculares ao eixo *yy*, estes cortam o gráfico num único ponto.

3.1.5 Revisão da função logarítmica

Chama-se logaritmo de um número positivo x na base a ao número y tal que $a^y = x$. Isto é:

$y = \log_a x \ (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

Exemplos

1. $\log_2 8 = 3$ porque $8 = 2^3$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ porque $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

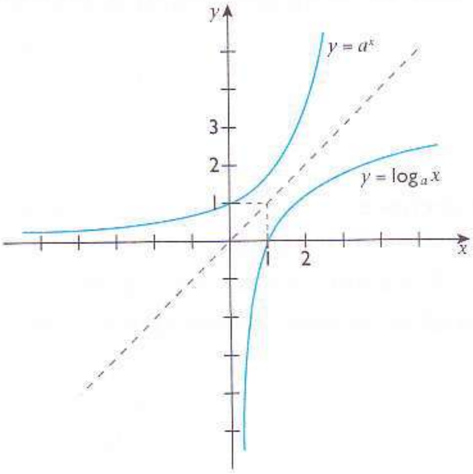
Vamos determinar a função inversa (f^{-1}) da função $y = a^x$.

$y = a^x \Leftrightarrow x = a^y$, fazendo uma troca de x por y.

Isto é:

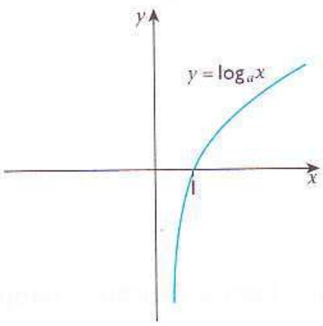
$y = \log_a x$

A função inversa (f^{-1}) da função exponencial chama-se função logarítmica.



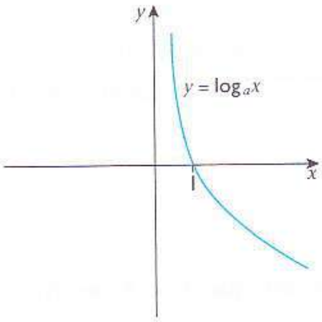
Toda a função do tipo $y = \log_a x$ pode apresentar um dos seguintes casos:

$a > 1$



$D_f: x \in \mathbb{R}^+$
$CD_f: y \in \mathbb{R}$
f é crescente

$0 < a < 1$



$D_f: x \in \mathbb{R}^+$
$CD_f: y \in \mathbb{R}$
f é decrescente

Exemplos

1. Vamos determinar o domínio da função:

   1.1 $y = \log_2 (5 - x)$

   1.2 $y = \log_{(x+1)} (5 - x)$

1.1 $5 - x > 0$

$x < 5$

D_f: $x < 5$

1.2 $5 - x > 0$ e $x + 1 > 0$ e $x + 1 \neq 1$

$x < 5$ e $x > -1$ e $x \neq 0$

D_f: $x \in]-1, 5[\backslash\{0\}$

2. Vamos determinar a função inversa da função $y = \log_2 (5 - x)$.

   $y = \log_2 (5 - x) \Rightarrow x = \log_2 (5 - y) \Leftrightarrow 5 - y = 2^x \Leftrightarrow y = 5 - 2^x$

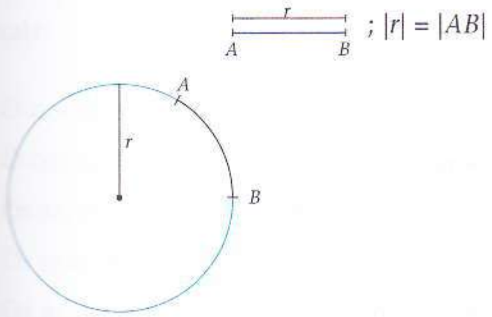
   Então $f^{-1}(x) = 5 - 2^x$.

3.1.6 Revisão das funções trigonométricas

A função trigonométrica é uma função de variável real.

Noção de radiano

Chama-se radiano à amplitude de um arco de circunferência de comprimento igual ao raio.



A fórmula que relaciona o perímetro de uma circunferência com o seu raio r é $P = 2\pi r$.
Por isso, podemos escrever que 2π corresponde a 360°. Logo, conclui-se que:

360° = 2π radianos.

A fórmula 360° = 2π radianos permite passar facilmente do sistema sexagesinal (em graus) para o sistema circular (radianos).

Exemplo

1. Vamos converter $x = 30°$ para radianos.

$$\frac{30°}{360°} = \frac{x}{2\pi}$$

$$x = \frac{30° \cdot 2\pi}{360°}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ radianos}$$

Isto é, $30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

2. Vamos converter $x = \frac{\pi}{10}$ rad para graus.

$$\frac{x}{360°} = \frac{\frac{\pi}{10}}{2\pi}$$

$$x = 360° \times \frac{\frac{\pi}{10}}{2\pi}$$

$$x = 18°$$

Isto é, $\frac{\pi}{10}$ rad $= 18°$.

Noção de período

Os valores do seno e do co-seno se repetem quando adicionados a amplitude do ângulo 2π rad ou qualquer múltiplo de 2π rad.

- $\forall \alpha$: sen $(\alpha + n \cdot 2\pi)$rad = sen α, $n \in \mathbb{Z}$
- $\forall \alpha$: cos $(\alpha + n \cdot 2\pi)$rad = cos α, $n \in \mathbb{Z}$

Diz-se que 2π é o período mínimo do seno e do co-seno.

- $\forall \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ rad: tg$(\alpha + n \cdot \pi)$rad = tg α, $n \in \mathbb{Z}$

Diz-se que π é o periodo mínimo da tangente.

Na determinação do período duma função do tipo $y = a$ sen $(bx + c) + d$, o período é $p = \frac{2\pi}{|b|}$.

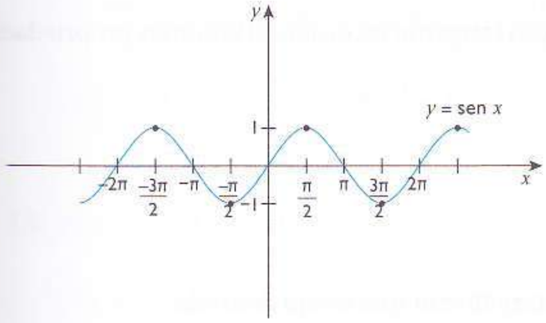
Estudo da função seno

Vamos rever o estudo feito na 11.ª classe da função seno revendo algumas propriedades gerais.

- O domínio: $x \in \mathbb{R}$;
- O contradomínio: $y \in [-1; 1]$;

- Os zeros da função seno: $x = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- Os máximos da função seno: $x = 2n\pi + \frac{1}{2}\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- Os mínimos da função seno: $x = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função seno é crescente nos intervalos $\left[\frac{2n\pi - \pi}{2}; \frac{2n\pi + \pi}{2}\right]$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função seno é decrescente nos intervalos $\left[\frac{2n\pi + \pi}{2}; \frac{2n\pi + 3}{2\pi}\right]$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função seno é ímpar porque $f(-x) = -f(x)$. Isto é, o gráfico de uma função seno é simétrico em relação à origem do referencial;
- 2π é o periodo mínimo do seno.

Em baixo, observa-se um esboço gráfico da função $y = \text{sen}\ x$.

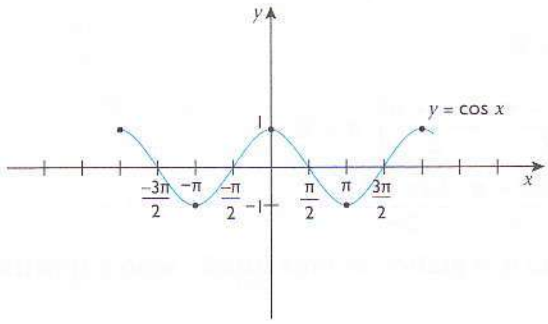


Estudo da função co-seno

Vamos rever o estudo feito na 11.ª classe da função co-seno recordando algumas propriedades gerais:

- O domínio: $x \in \mathbb{R}$;
- O contradomínio: $y \in \mathbb{R}$;
- Os zeros da função co-seno: $x = \frac{n\pi + \pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$;
- Os máximos da função co-seno: $x = 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- Os mínimos da função co-seno: $x = 2n\pi + \pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função co-seno é crescente nos intervalos $[2n\pi - \pi, 2n\pi]$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função co-seno é decrescente nos intervalos $[2n\pi, \pi + 2n\pi]$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função co-seno é par porque $f(-x) = f(x)$. Isto é, o gráfico de uma função co-seno é simétrico em relação ao eixo das ordenadas;
- 2π é o periodo mínimo do co-seno.

Em baixo, observa-se um esboço gráfico da função $y = \cos x$.

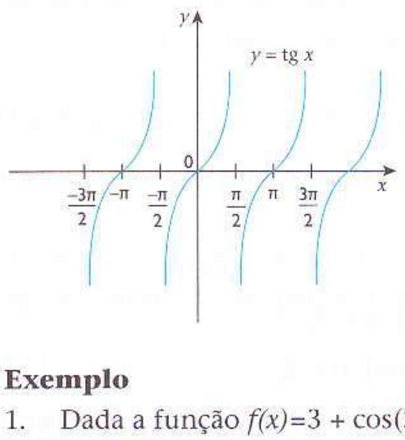


Estudo da função tangente

Vamos rever o estudo feito na 11.ª classe da função tangente recordando algumas propriedades gerais.

- O domínio: $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{n\pi + \pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$;
- O contradomínio : $y \in \mathbb{R}$;
- Os zeros da função tangente: $x = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$;
- A função tangente é crescente em qualquer intervalo em que esteja definida:
- A tangente é uma função ímpar porque $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\,x$;
- O período mínimo da tangente é π.

Em baixo, observa-se um esboço gráfico da função $y = \text{tg}\,x$.



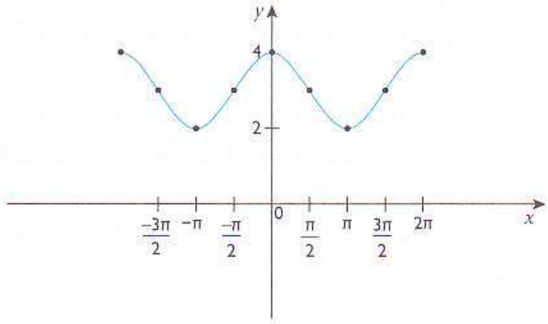
Exemplo

1. Dada a função $f(x)=3 + \cos(2x)$, vamos:
   1.1 Determinar o contradomínio de f;
   1.2 Esboçar o gráfico de f no intervalo $[-2\pi; 2\pi]$;
   1.3 Calcular $f\left(\frac{\pi}{6}\right) - f\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$;
   1.4 Determinar $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.1 $y = 3 \pm 1 \Leftrightarrow y = 3 + 1 = 4 \vee y = 3 - 1 = 2$

CD_f: $y \in [2;4]$

1.2



1.3 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 3 + \cos\frac{\pi}{3} = 3 + \frac{1}{2}$

$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 3 + \cos\left(-2 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) = 3 + \cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = 3 + \cos -\frac{10\pi}{3} = 3 - \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 3 + \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} = 6$

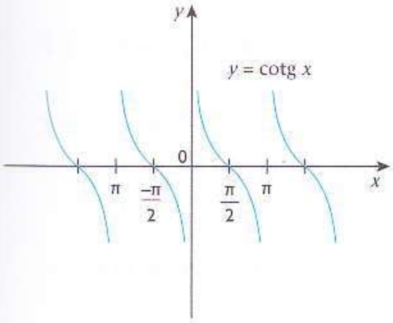
1.4 $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + \text{sen}\,(-2x) = 3 - \text{sen}\,(2x)$

Estudo da função co-tangente

- O domínio: $x \in \mathbb{R}\backslash\{n\pi\}$; $n \in \mathbb{Z}$;
- O contradomínio: $y \in \mathbb{R}$;
- Os zeros da função co-tangente x: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$;
- A função cotangente é sempre decrescente no seu domínio;
- A cotangente é uma função impar porque $\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}\, x$;
- π é o período mínimo da co-tangente.

Em baixo observa-se um esboço gráfico da função $y = \text{cotg}\, x$.



3.1.7 Função homográfica

Observa as seguintes funções. Procura descobrir o que há de comum entre elas.

- $y = \dfrac{x-5}{2x+3}$
- $y = \dfrac{3x-5}{x-4}$
- $y = -\dfrac{8}{x}$
- $y = \dfrac{3x}{x+1}$

Nota

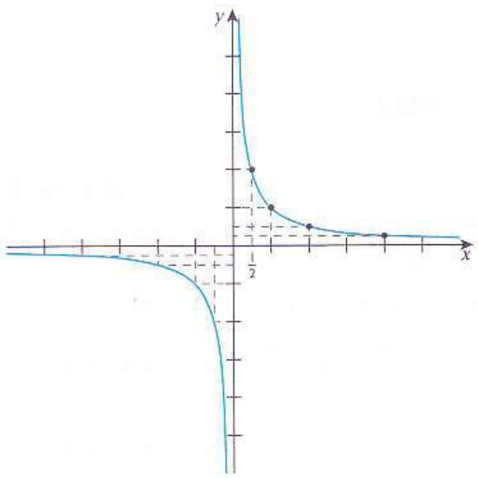
- Todos são do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
- As funções definem-se para $x \neq -\dfrac{d}{c}$.
- As funções do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, onde a, b, c e d são números reais chamam-se funções homográficas se $c \neq 0$.

O domínio de uma função homográfica $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é $x \in \mathbb{R} \backslash (-\dfrac{d}{c})$.

Gráfico da função homográfica

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vamos criar uma tabela de valores.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	10	100	10 000	.. $x \to +\infty$
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10\,000}$	.. $y \to 0$



Observando o gráfico, notamos que:

- Quando $x \to +\infty$; $y \to 0^+$. Diz-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0^+$;
- Quando $x \to 0^+$; $y \to +\infty$. Diz-se que $\lim\limits_{x \to 0+} f = +\infty$;

- Quando $x \to -\infty$; $y \to 0^-$. Diz-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} f = 0^-$;
- Quando $x \to 0^-$; $y \to -\infty$. Diz-se que $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$;

- A recta $x = 0$ chama-se assímptota horizontal (AH);
- A recta $y = 0$ chama-se assímptota vertical (AV).

Vamos enumerar algumas propriedades das funções homográficas:

- D_f: $\mathbb{R} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$;
- AV: $x = -\frac{d}{c}$;
- AH: $y = \frac{a}{c}$;
- O centro do gráfico é o ponto $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$;
- O zero da função é $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$;
- A ordenada na origem é $f(0) = \frac{b}{a}$;
- A função é injectiva e não sobrejectiva.

Exemplo

1. Seja $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$, vamos:
   1.1 calcular os zeros de f;
   1.2 calcular a AV e AH;
   1.3 indicar o centro do gráfico;
   1.4 esboçar o gráfico de f;
   1.5 classificar a função quanto à injectividade.

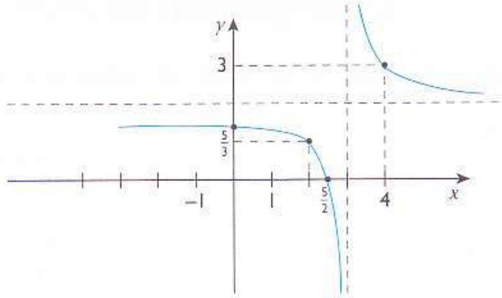
1.1 $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$

1.2 AV: $x = \dfrac{3}{1} = 3$

AH: $y = \dfrac{2}{1} = 2$

1.3 O centro é (3,2).

1.4



1.5 f é injectiva porque traçando paralelas ao eixo das abcissas, estas cortam o gráfico num só ponto.

3.1.8 Operações entre funções

Soma e diferença de funções

Dadas duas funções de variável real f e g, chama-se soma (diferença) de f e g e designa-se por $f+g$ $(f-g)$ à função com as seguintes características:

- O domínio é a intersecção dos domínios de f e de g: $D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $\forall x \in D_{f\pm g}$

Multiplicação de funções

Dadas duas funções de variável real f e g, chama-se produto de f e g e designa-se por $f \cdot g$ à função com as seguintes características:

- O domínio é a intersecção dos domínios de f e de g: $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in D_{f\cdot g}$

Divisão de funções

Dadas duas funções de variável real f e g, chama-se divisão de f por g e designa-se por $\frac{f}{g}$ à função com as seguintes características:

- $\forall x \in D_{\frac{f}{g}}$ e $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplos

1. Sendo $f(x) = 2x + 3$ e $g = \frac{1}{x+1}$, vamos efectuar e indicar o domínio de:

   1.1 $f+g$ 1.2 $f-g$ 1.3 $f \cdot g$ 1.4 $\frac{f}{g}$

   1.1 $f+g = (2x+3) + \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+3x+2x+3+1}{x+1} = \frac{2x^2+5x+4}{x+1}$, D: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

   1.2 $f-g = (2x+3) - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+3x+2x+3-1}{x+1}$, D: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

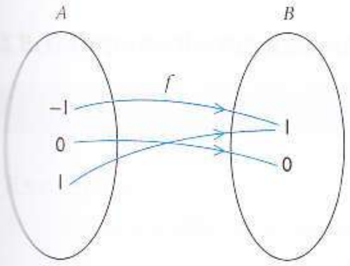
1.3 $f \cdot g = (2x + 3) \cdot \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x+3}{x+1}$, D: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

1.4 $\dfrac{f}{g} = \dfrac{(2x+3)}{\dfrac{1}{x+1}} = (2x + 3) \cdot (x + 1) = 2x^2 + 5x + 3$, D: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

3.1.9 Função injectiva, sobrejectiva e bijectiva

Função sobrejectiva

Considera a função representada abaixo.



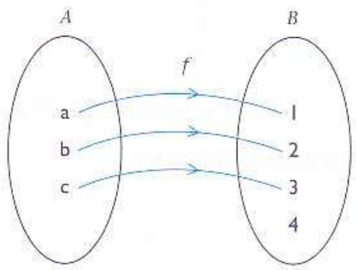
Seja uma função f de A em B. Diz-se que f é uma função sobrejectiva se e só se a imagem de f, ou seja, o contradomínio, for o próprio conjunto B.

f é sobrejectiva se $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A: y = f(x)$

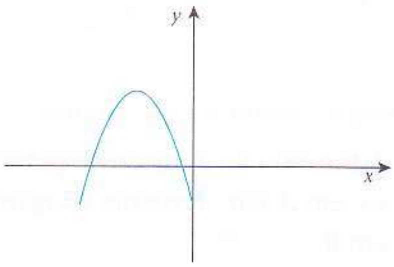
Exemplo

1. Vamos verificar se as funções representadas a seguir são ou não sobrejectivas.

1.1



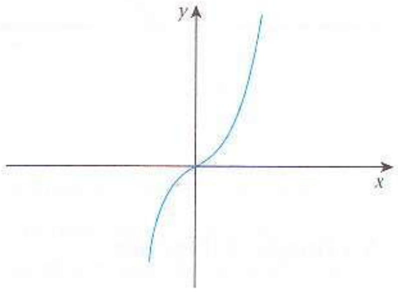
1.2



1.1 A função não é sobrejectiva, pois 4 não é imagem mas pertence ao conjunto B.

1.2 A função não é sobrejectiva porque nem todos os y são imagens de objectos x.

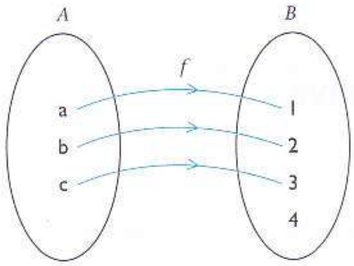
1.3



1.3 A função é sobrejectiva porque qualquer elemento de y é imagem de pelo menos um objecto x.

Função injectiva

Considera a função f representada abaixo.



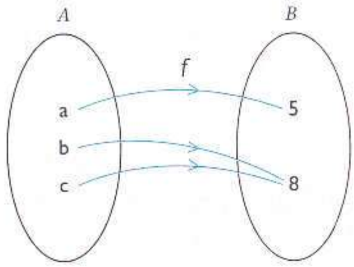
Seja f uma função de A em B. Diz-se que f é injectiva se cada elemento do conjunto B for imagem de apenas um elemento do conjunto A.

f é injectiva se $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

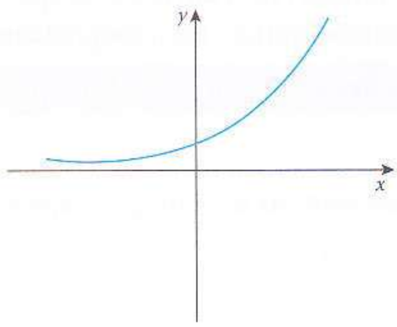
Exemplo

1. Vamos verificar se as funções abaixo são ou não injectivas.

1.1



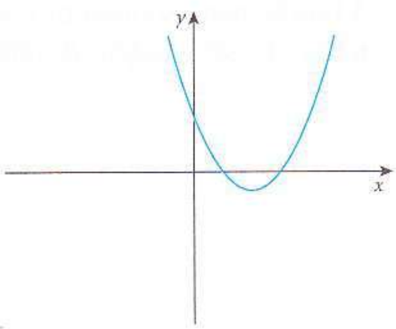
1.2



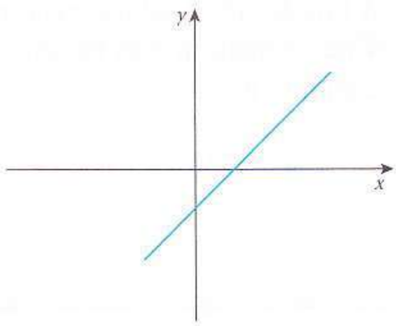
1.1 A função não é injectiva, pois b e c em A têm a mesma imagem em B.

1.2 A função é injectiva.

1.3



1.4

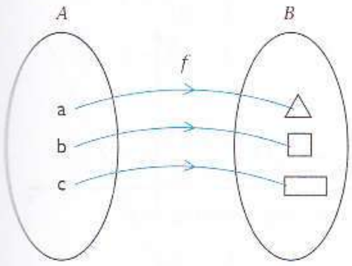


1.3 A função não é injectiva porque há pelo menos um elemento de y que é imagem de dois objectos.

1.4 A a função é injectiva.

Função bijectiva

Considera a função f de A em B.



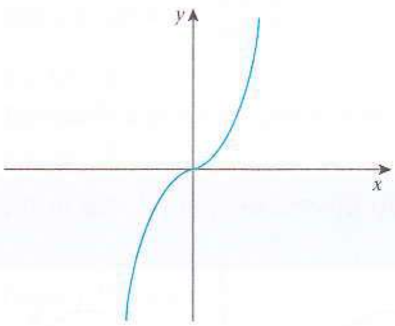
Diz-se que f é bijectiva se e só se f for ao mesmo tempo sobrejectiva e injectiva.

f é bijectiva se f é sobrejectiva e injectiva.

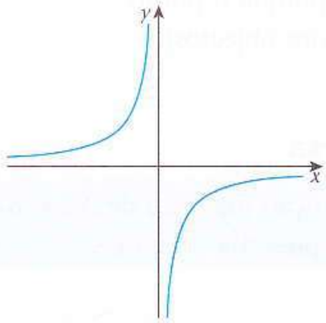
Exemplo

1. Vamos verificar se as funções abaixo representadas são ou não bijectivas.

1.1



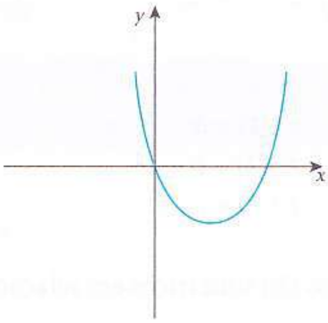
1.2



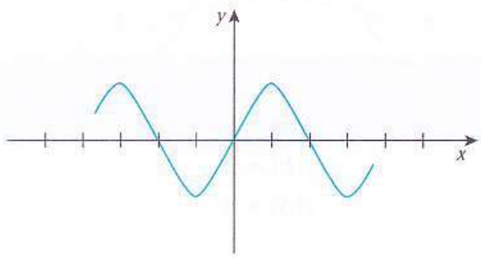
1.1 A função é bijectiva.

1.2 A função não é bijectiva porque não é sobrejectiva.

1.3



1.4

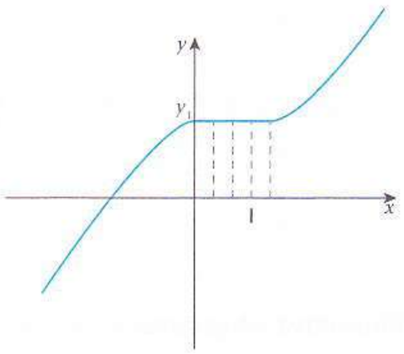


1.3 A função não é bijectiva porque não é injectiva e também não é sobrejectiva.

1.4 A função não é bijectiva.

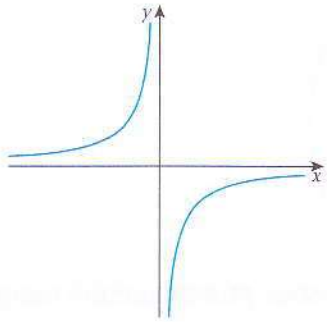
Como verificar se f é sobrejectiva, injectiva ou bijectiva?

Sobrejectiva



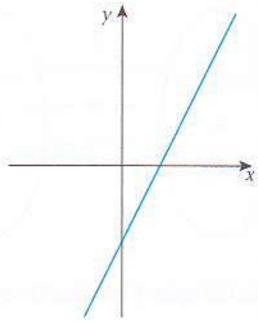
Traçando paralelas ao eixo das abcissas, estas intersectam o gráfico em pelo menos um ponto (não é injectiva porque o ponto y_1 tem vários objectos).

Injectiva



Traçando paralelas ao ao eixo das abcissas, estas intersectam o gráfico uma só vez.

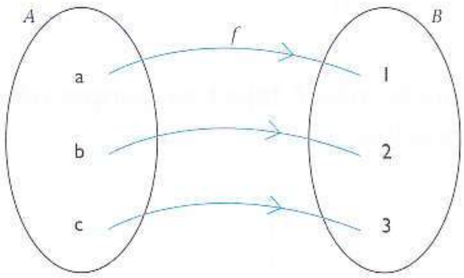
Bijectiva

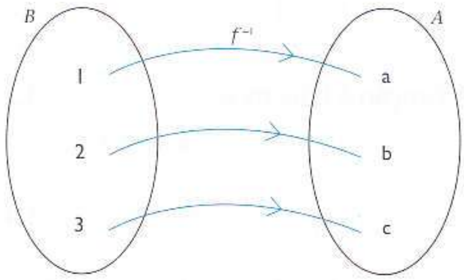


Qualquer paralela ao eixo das abcissas intersecta o gráfico num único ponto.

Função inversa

Seja f uma função injectiva de A em B. A relação inversa de B em A denomina-se função inversa de f e representa-se por f^{-1}.

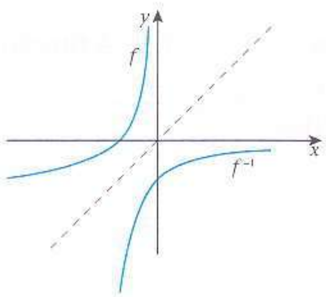




$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(3) = 3$

$f^{-1}(1) = a$
$f^{-1}(2) = b$
$f^{-1}(3) = c$

Se f e f^{-1} são duas funções inversas, os gráficos respectivos são simétricos em relação à bissectriz do 1.º e 3.º quadrantes.



Exemplo

1. Vamos determinar a expressão que representa a inversa das seguintes funções:

1.1 $y = \dfrac{2x+3}{3x-1}$

1.2 $y = 3x - 1$

1.1 $y = \dfrac{2x+3}{3x-1}$; D_f: $x \neq \dfrac{1}{3}$

Trocando x por y e y por x, teremos:

$x = \dfrac{2y+3}{3y-1} \Leftrightarrow 2y + 3 = x(3y-1)$

$2y + 3 = 3xy - x$

$2y - 3xy = -x - 3$

$y(2 - 3x) = -x - 3$

$y = -\dfrac{x-3}{2-3x} = \dfrac{x+3}{3x-2}$

Logo, $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x+3}{3x-2}$.

1.2 $y = 3x - 1$

Trocando x por y e y por x, temos:

$x = 3y - 1$

$x + 1 = 3y \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{3}$

Logo, $f^{-1}(x) = x + \dfrac{1}{3}$.

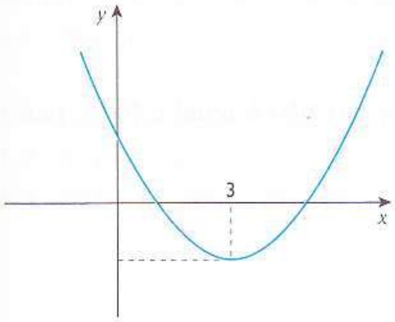
Função monótona

Uma função $y = f(x)$, diz-se monótona num dado intervalo, quando é crescente ou decrescente nesse intervalo.

- A função f é crescente num intervalo C, se: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- A função f é decrescente num intervalo C, se: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo

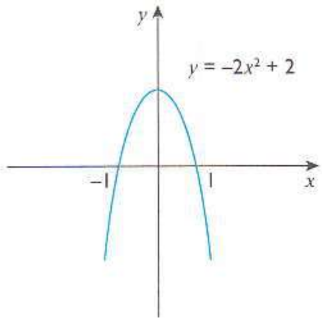
1.

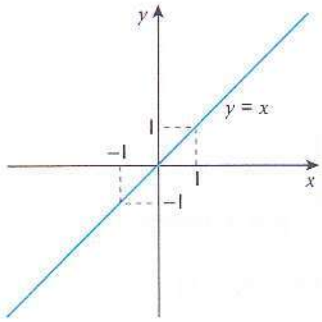


$x < 3$	$x > 3$
f decresce ↘	f cresce ↗

Função par e função ímpar

Analisa os gráficos seguintes.





Nota

- $f(-1) = f(1)$
- $f(-2) = f(2)$

Se atribuimos valores simétricos a x, obteremos o mesmo valor de y.
Diz-se que a função é par.

- $-f(-1) = f(1)$
- $-f(-2) = f(2)$

Se atribuimos valores simétricos a x, obteremos o mesmo valores simétricos de y.
Diz-se que a função é ímpar.

- Uma função diz-se que é par se e só se $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D_f$.
- Uma função diz-se que é ímpar se e só se $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D_f$.

Observações

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem dos eixos coordenados.

Exemplo

1. Vamos verificar se as seguintes funções são pares, ímpares ou nenhuma delas.

1.1 $f(x) = x^3$
Nota que $f(-x) = -f(x)$.
Assim, a função é ímpar.

1.2 $f(x) = x^2 - 4$
Nota que $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$. Ou seja, $f(-x) = f(x)$.
Assim, a função é par.

1.3 $f(x) = -2x + 3$
Nota que $f(-x) = -2(-x) + 3 = 2x + 3$.
Esta função não é par nem ímpar, visto que $f(x)$ não é igual a $f(-x)$, nem é igual a $-f(-x)$.

Função composta

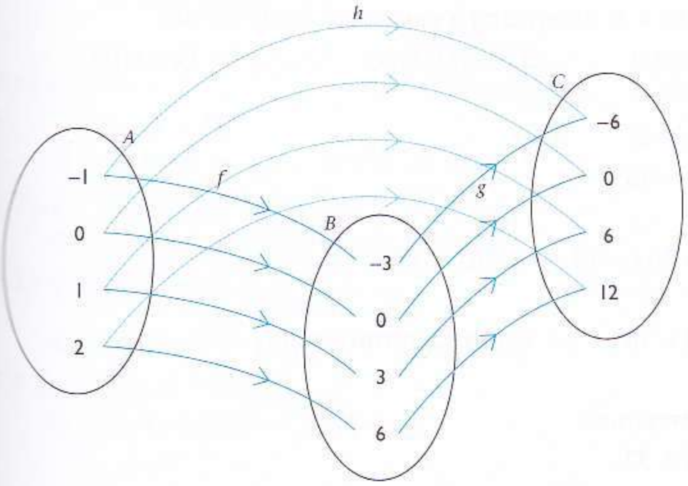
Considera os conjuntos A, B e C e as funções f e g definidos em baixo:

$A = \{-1; 0; 1; 2\}$

$B = \{-3; 0; 3; 5; 6\}$

$C = \{-6; 0; 6; 12\}$

$A \xrightarrow{f} B; B \xrightarrow{g} C$



Nota

- $f(-1) = 3$ e $g(3) = -6$ e também $g(-1) = -6$; logo $h(-1) = g[f(-1)]$;
- $f(0) = 0$ e $g(0) = 0$ e também $g(0) = 0$; logo $h(0) = g[g(0)]$;
- $f(1) = 3$ e $g(3) = 6$ e também $f(1) = 6$; logo $h(1) = g[f(1)]$.

Assim concluímos que $h(x) = g[f(x)]$.

À função h chamamos função composta de g com f. A função composta representa-se por $h(x) = g[f(x)]$ ou $h = g \circ f$ e lê-se g após f.

Seja f uma função de A em B e g uma função de B em C. Chama-se função composta de g com f, à função h de A em C, definida como $h(x) = g[f(x)]$, para todo $x \in A$.

Exemplos

1. Sendo $f(x) = 2x - 1$ e $f(x) = 5x$, vamos calcular:

   1.1 $f[g(1)]$ 1.2 $g[f(1)]$ 1.3 $g[g(1)]$

   1.1 $g(1) = 5$ e $f(5) = 9$; logo $f[g(1)] = 9$

   1.2 $f(1) = 1$ e $g(1) = 5$; logo $g[f(1)] = 5$

   1.3 $g(1) = 5$ e $g(5) = 25$; logo $g[g(1)] = 25$

2. Sendo $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = 5x$, vamos determinar:

   2.1 $g[f(x)]$ 2.2 $f[g(x)]$ 2.3 $f[f(x)]$ 2.4 $g[g(x)]$

   2.1 $g[f(x)] = 25(2x - 1) = 10x - 5$
   2.2 $f[g(x)] = 2(5x) - 1 = 10x - 1$
   2.3 $f[f(x)] = 2(2x - 1) - 1 = 2x \cdot 2 - 1 = 2x - 3$
   2.4 $g[g(x)] = 5(5x) = 25x$

3. Sabendo que $f(x) = 3x$ e $g(x) = 6x - 5$, determina a expressão analítica de:

   3.1 $(g \circ f)(x)$ 3.2 $(f \circ g)(x)$ 3.3 $(f \circ f)(x)$ 3.4 $(g \circ g)(x)$

   3.1 $(g \circ f)(x) = 6(3x) - 5 = 18x - 5$
   3.2 $(f \circ g)(x) = 3(6x - 5) = 18x - 15$
   3.3 $(f \circ f)(x) = 3(3x) = 9x$
   3.4 $(g \circ g)(x) = 6(6x - 5) - 5 = 36x - 30 - 5 = 36x - 35$

4. Sabendo que $g(x) = 8x$ e $g[f(x)] = 16x + 32$, vamos determinar $f(x)$.

   Trocando, em $g(x)$, x por $f(x)$, teremos:

   $g[f(x)] = 8[f(x)] \Rightarrow 8[f(x)] = 16x + 32$

   $$f(x) = \frac{16x + 32}{8}$$

   $$f(x) = 2x + 4$$

Exercícios resolvidos

1. Determina o domínio de existência das seguintes funções:

   1.1 $y = \log_2 (x - 7)$

   1.2 $y = \log_7 (1 - x)$

   1.3 $y = \log_{\frac{7}{3}} (9 - x^2)$

   1.4 $y = \log_{0,2} (6 + x - x^2)$

Resolução

1.1 $y = \log_2 (x - 7)$

D_y: $x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in]7; +\infty[$.

1.2 $y = \log_7 (1 - x)$

D_y: $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1[$.

1.3 $y = \log_{\frac{7}{3}} (9 - x^2)$

D_y: $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow x \in]-3; 3[$.

1.4 $y = \log_{0,2} (6 + x - x^2)$

D_y: $6 + x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-2; 3[$.

2. Resolve as seguintes equações:

   2.1 $\sqrt[3]{5^x} = 0,2\sqrt{5}$

   2.2 $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x+1} = 10,5$

   2.3 $5^{2x} = 3^x + 15 \cdot 25^x - 15 \cdot 3^x$

   2.4 $2^{x^2} - \frac{5}{2} + 2^{-x^2} = 0$

Resolução

2.1 $\sqrt[3]{5^x} = 0,2\sqrt{5}$

$$5^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{5} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = 5^{-1} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$$

$$5^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2} - 1$$

$$\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}.$$

2.2 $2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x+1} = 10,5$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^x + 5 \cdot 2 \cdot 2^x = 10,5$$

$$\left(\frac{1}{2} + 10\right) \cdot 2^x = 10,5$$

$$10,5 \cdot 2^x = 10,5$$

$$2^x = 1$$

$$x = 0.$$

Exercícios resolvidos

2.3 $5^{2x} = 3^x + 15 \cdot 25^x - 15 \cdot 3^x$

$(5^x)^2 - 3^x = 15 \cdot (25^x - 3^x)$

$25^x - 3^x = 15 \cdot (25^x - 3^x)$

$15(25^x - 3^x) - (25^x - 3^x) = 0$

$14(25^x - 3^x) = 0$

$25^x = 3^x$

$\left(\frac{25}{3}\right)^x = 1$

$x = 0.$

2.4 $2^{x^2} - \frac{5}{2} + 2^{-x^2} = 0$

Seja: $2^{x^2} = y$ temos:

$y + \frac{1}{y} - \frac{5}{2} = 0$

$y^2 - \frac{5}{2y} + 1 = 0$

$y_1 = 2 \quad \vee \quad y_2 = \frac{1}{2}$

$2^{x^2} = y_1 = 2 \vee 2^{x^2} = y_2 = \frac{1}{2}$

$x^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = -1$

$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$

3. Resolve as seguintes equações logarítmicas.

3.1 $\log_{0,2} x = 3$

3.2 $(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x = 4$

3.3 $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 1$

3.4 $\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$

Resolução

3.1 $x = 0,2^3 = 8 \cdot 10^{-3}$.

3.2 Fazendo $\log_3 x = y$, obtemos:

$y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1 \vee y_2 = -4$

$\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 \vee \log_3 x = -4$

$\Leftrightarrow x = 3^{-4} = \frac{1}{81}.$

3.3 Vamos primeiro mudar para base 2:

$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = 1$

$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x = 1$

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})\log_2 x = 1$

$\frac{7}{4} \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{4}{7}$

$x = 2^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{2^4} = \sqrt[7]{16}.$

3.4 $\log_2 (x + 2) + \log_2 (3x - 4) = 4$

$\log_2 (x + 2)(3x - 4) = 4$

$(x + 2)(3x - 4) = 2^4 = 16$

$3x^2 - 4x + 6x - 8 - 16 = 0$

$3x^2 + 2x - 24 = 0$

$x = -3,18 \vee x = 2,51$

Domínio de existência:

$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$

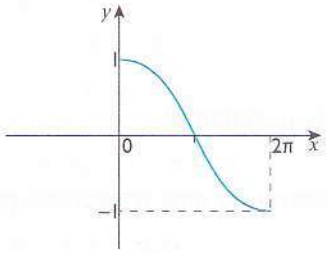
$D: x \in]\frac{4}{3}; +\infty[$

$x > -2$ não serve, pois está fora do domínio da expressão. Logo, $x = 2,51$.

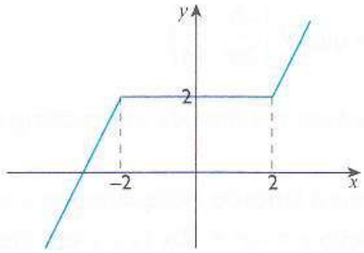
Exercícios propostos

1. Classifica as funções seguintes quanto à injectividade (ou sobrejectividade).

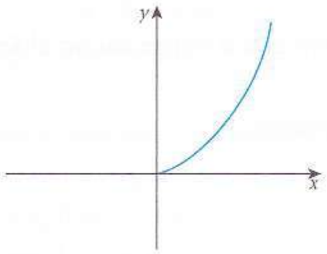
1.1



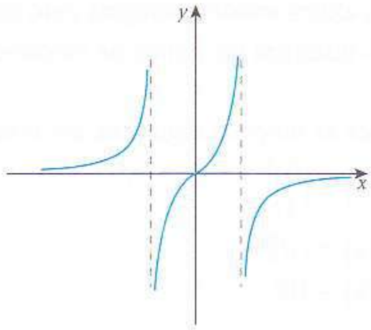
1.2



1.3



1.4



2. Esboça os gráficos das seguintes funções:

2.1 $y = x - 3$

2.2 $y = 3x$

2.3 $y = 2$

2.4 $y = -x + 3$

3. Calcula as raízes (ou zeros) das seguintes funções do 1.º grau:

3.1 $f(x) = -x + 5$

3.2 $f(x) = 2x - 3$

3.3 $f(x) = -4x$

3.4 $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

4. Calcula o vértice da parábola $y = 2x^2 - 3x - 2$.

5. Traça o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 8$.

6. Calcula o valor máximo (ou mínimo) da função.

6.1 $y = -x^2 + 6x$

6.2 $y = x^2 - 8x + 12$

Exercícios propostos

7. Calcula o valor de m para o qual o valor mínimo da função $y = x^2 - 5x + m$ seja $-\frac{1}{4}$.
   Recorda que $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

8. Qual é a área máxima de um rectângulo que tem 36 m de perímetro?

9. Um corpo é lançado obliquamente a partir do solo, descrevendo uma trajectória parabólica de equação $y = -x^2 + 10x$ (x e y em metros).
   Calcula:
   9.1 A altura máxima atingida pelo corpo;
   9.2 A distância do ponto de lançamento até o ponto em que o corpo cai no chão.

10. Classifica as funções seguintes em crescentes ou decrescentes.
    10.1 $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$
    10.2 $f(x) = (\sqrt{2})^x$
    10.3 $f(x) = 10^x$

11. Esboça, no plano cartesiano, o gráfico das seguintes funções:
    11.1 $f(x) = 2^x + 1$
    11.2 $f(x) = 2^{x+1}$

12. No «centro social» da nossa escola, a temperatura ambiente é constante. A temperatura do chá servido no centro social é dada pela expressão $f(t) = 20° + 50° \cdot 2^{-0,5t}$ onde t indica o tempo em minutos.
    12.1 Calcula a temperatura do chá no instante em que é servido na chávena.
    12.2 Calcula a temperatura do chá 10 minutos depois de ter sido servido na chávena.
    12.3 Calcula a temperatura do chá passados 1000 minutos após ter sido colocado na chávena.

13. A quantidade de mosquitos numa certa zona da cidade de Beira é dada pela expressão $P(t) = P_0 2^{kt}$.
    Calcula a população inicial P_0 de mosquitos, sabendo que depois de 30 dias a zona tinha 400 000 mosquitos [$k = 0,1$, t(dia)].

14. Resolve as seguintes equações exponenciais.
    14.1 $4^x - 64 = 0$
    14.2 $81 - 3^x = 0$
    14.3 $5^{-1} - 25^x = 0$
    14.4 $16 = 8^x$
    14.5 $9 - 3^x = 0$
    14.6 $2^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{3^x} = 36$

Exercícios propostos

14.7 $\left(\frac{5}{2}\right)^4 - \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$

14.8 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{64} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x$

14.9 $1 - 7^{x^2-x-2} = 0$

14.10 $x^2 + 4x - 4{,}5 = 9$

14.11 $3^{x^2-x-2} - 81 = 0$

14.12 $4^{x+1} + 4^x = 320$

14.13 $3^{3x} = 2 \cdot 3^{x-2} + 75$

14.14 $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

14.15 $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$

15. Resolve as seguintes equações logarítmicas:

15.1 $\log_2 x + \log_2 7 = 3$

15.2 $\log_3 (\log_3 x) = 0$

15.3 $\log_x 3 - \log_x 5 = 2$

15.4 $\log_{x-2}(x^2 - 6x + 10) = 1$

15.5 $2 \log_2 x^{\frac{1}{2}} - \log_2(9 - 2x) = 0$

15.6 $\log_{10} (x + \frac{1}{2}) + \log_{10} x = \log_{10} \frac{1}{2}$

15.7 $\log_{10} 4{,}5 - \log_{10} x = \log_{10} \left(\frac{9}{2 - x}\right)$

15.8 $\frac{1}{2} \log_{10} (x - 9) + \log_{10} \sqrt{2x - 1} = 1$

15.9 $\frac{1}{2} \log_3 (x - 5) = 1 - \log_2 \sqrt{2x - 3}$

15.10 $\frac{1}{5} + \frac{\log_{10} x + 2}{1 - \log_{10} x} = 1$

15.11 $x^{\log_2 x} = 16$

15.12 $x^{\log_3 (x - 2)} = 27$

16. Converte para o sistema circular.

16.1 $10°$

16.2 $100°$

16.3 $60°$

16.4 $180°$

Exercícios propostos

17. Converte para o sistema sexagesimal.

17.1 $\frac{\pi}{2}$ rad

17.2 $\frac{2\pi}{3}$ rad

17.3 $\frac{3\pi}{8}$ rad

17.4 $\frac{5\pi}{6}$ rad

18. Considera a função $f(x) = \frac{1}{2}$ sen x. Determina os pontos em que a função toma o valor $\frac{1}{4}$.

19. Dada a função de variável real definida por $f(x) = 3 + \text{sen}\,\frac{x}{2}$:

19.1 Calcula $f(2\pi)$ e $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

19.2 Calcula $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

19.3 Determina $f(2x - \pi)$.

20. Dada a função $f(x) = 3 + \cos(2x)$:

20.1 Calcula $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$;

20.2 Calcula o máximo;

20.3 Escreve a equação dos zeros de f;

20.4 Determina $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

21. Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \text{sen}\,x - 2$:

21.1 Determina o contradomínio de f;

21.2 Esboça o gráfico da função para $x \in [-\pi, \pi]$.

22. Determina o domínio da função $f(x) = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

23. Seja dada a função $f(x) = \frac{1}{x-2}$:

23.1 Determina o domínio de f;

23.2 Calcula a ordenada na origem;

23.3 Calcula a AV e a AH;

23.4 Qual é o centro de simetria do gráfico de f.

Exercícios propostos

24. Seja $f(x) = \frac{x}{x-2}$.
 24.1 Qual é o domínio da função;
 24.2 Calcula o zero da função;
 24.3 Calcula a ordenada na origem;
 24.4 Calcula AV e a AH da função;
 24.5 Esboça o gráfico da função;
 24.6 Classifica f quanto a injectividade.

25. Para cada uma das seguintes funções calcula o domínio, as equações das assímptotas, o centro de simetria, os zeros e a ordenada na origem.
 25.1 $y = \frac{2x}{x+1}$
 25.2 $y = \frac{x+y}{2x-3}$
 25.3 $y = \frac{4x+1}{x-3}$

26. Considera as funções $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{\cos x}$.
 26.1 Determina $f \circ g$;
 26.2 Calcula $(f \circ g)(x)$ sabendo que $g(-x) = -2$.

27. Dada uma função real de variável real $h(x) = 1 - \text{sen}\,(4x)$:
 27.1 Indica a expressão geral de valores de x para as quais h atinge o seu valor máximo;
 27.2 Calcula $h\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{4}\right)$, sabendo que $\text{sen}\, x = -\frac{3}{5}$ e $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

28. Para $x \in [-\pi, \pi]$, resolve as seguintes equações:
 28.1 $\text{sen}\, 2x = -\frac{1}{2}$
 28.2 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

29. Resolve as seguintes equações:
 29.1 $\cos(2x) - \text{sen}\, x = 0$
 29.2 $\text{sen}\, x - \cos x = 1$
 29.3 $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 = 0$
 29.4 $2\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\, x + 2 = 0$

Exercícios propostos

30. Considera as funções reais de variável real definidas pelas expressões.

a) $y = 1 + 2\text{sen}\, x$ b) $y = -1 + \text{sen}\, x$ c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

30.1 Determina o contradomínio da cada função;

30.2 Esboça o gráfico de cada função no intervalo $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

31. Sabendo que $f(x) = -1 + 2\text{sen}\,(2x)$, calcula:

31.1 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$

31.2 $f(0)$

31.3 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

31.4 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) + f(2\pi)$

32. Sendo $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = 5x$, determina a expressão analítica de:

32.1 $(f \circ g)(x)$

32.2 $(g \circ f)(x)$

32.3 $(g \circ g)(x)$

33. Sabendo que $f(x) = 3x - 1$ e $f[g(x)] = 5$, determina $g(x)$.

34. Sabendo que $g(x) = 5x$ e $(g \circ f) = 15x - 5$, determina $f(x)$.

35. Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, será que $(f \circ g)$ é par o ímpar?

36. Se $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -x$, será que $(g \circ f)$ é crescente ou decresente?

37. Se $f(x) = \sqrt{x - 3}$ e $g(x) = x - 1$, determina o domínio das funções $(g \circ f)$ e $(f \circ g)$.

38. Dados as funções $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = x + a$, calcula o valor de a para que se tenha $f[g(x)] = g[f(x)]$.

39. Sendo $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = 2x - 1$, calcula:

39.1 $(f \circ g)(1)$

39.2 $(g \circ f)(0)$

39.3 $(f \circ f)\left(-\frac{1}{3}\right)$

39.4 $(g \circ g)(\sqrt{2})$

Exercícios propostos

40. Determina expressão da função inversa, quando existir, de cada uma das seguintes funções:

40.1 $y = -x + \frac{3}{4}$

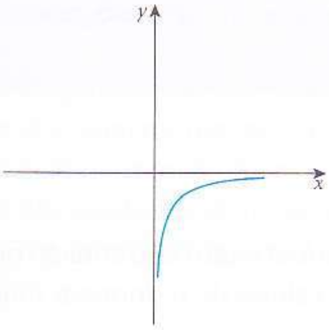
40.2 $y = \log_a x$

40.3 $y = 2^x + 3$

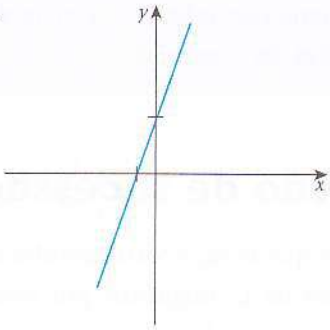
40.4 $y = \frac{4x - 2}{x - 1}$

41. Traça o gráfico da função inversa (se existir) das seguintes funções:

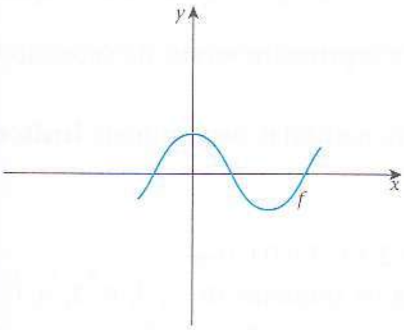
41.1



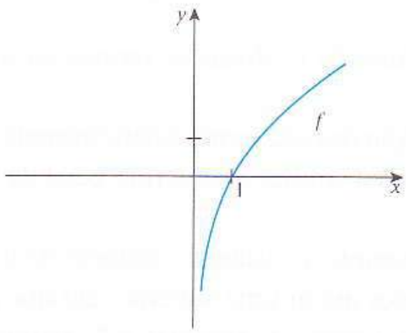
41.2



41.3



41.4



42. Verifica, em cada caso, se a função é par, ímpar ou nenhuma delas.

42.1 $y = 2x$

42.2 $y = x^2 - 3$

42.3 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

42.4 $y = |-2x + 3|$

Unidade 4

Sucessões numéricas – funções reais de variável natural

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- determinar o termo geral de uma sucessão;
- resolver problemas práticos da vida que são conducentes a progressão aritmética e ou geométrica;
- verificar se uma sucessão é uma progressão aritmética ou é uma progressão geométrica;
- calcular limites de sucessões.

4.1 Noção de sucessão

Suponhamos que se faça corresponder a cada número natural n um determinado número real U_n. Se os valores de U, dispostos por ordem crescente de valores de n, formam uma sucessão infinita $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n, \ldots$, então:

- os valores de U_n dizem-se termos da sucessão; U_1 é o primeiro termo da sucessão, U_2 é o 2.º, etc.;
- a posição de cada termo é determinada pelo número natural n, denominado **índice**; U_n diz-se o termo de índice n ou termo geral da sucessão.

Por exemplo, considera o número de telemóvel «8 2 3 6 3 6 0 0 0».

Obtemos assim uma sucessão em que a sequência de números (8, 2, 3, 6, 3, 6, 0, 0, 0) tem 9 termos, sendo o 1.º termo 8, o 2.º termo 2, o 3.º termo 3,..., o 9.º termo 0. Notamos, então, que numa sucessão, a ordem em que os termos aparecem é fundamental.

Um conjunto de números que se apresentam numa determinada ordem, e formados de acordo com uma lei de formação definida, chama-se uma sucessão. Os números da sucessão são chamados **termos**.

Se o número de termos for finito, a sucessão diz-se finita; caso contrário, dir-se-á uma sucessão infinita.

Exemplo

1. O conjunto de números $\{2, 5, 8, \ldots, 20\}$ constitui uma sucessão finita.
2. O conjunto de números $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\}$ constitui uma sucessão infinita.

A menos que se especifique o contrário, trataremos sempre com sucessões infinitas.

4.2 Termo de geral de uma sucessão

O termo geral de uma sucessão define a lei de formação da sucessão pela qual se pode obter todos os seus termos. Isto é, fazendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, obtém-se o 1.°, 2.°, 3.°,... termos da sucessão.

Por exemplo, se $U_n = \frac{n}{2n - 1}$ e atribuirmos a n sucessivamente os valores 1, 2 e 3, obteremos:

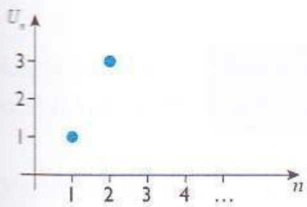
- $U_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3}$
- $U_2 = \frac{2}{2} \cdot 2 + 1 = \frac{2}{5}$
- $U_3 = \frac{3}{2} \cdot 3 + 1 = \frac{3}{7}$

Alguns exemplos de sucessões simples são:

- sucessão dos números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., n;
- sucessão cujos termos são todos iguais (constante): 2, 2, 2, 2,...;
- sucessão dos quadrados de números naturais: 1, 4, 9,..., n^2,...;
- sucessão dos números ímpares: 1, 3, 5, 7,..., $2n - 1$,...;

4.2.1 Representação gráfica de uma sucessão

Vamos representar graficamente a sucessão $U_n = 2n - 1$.



Atendendo que uma sucessão tem domínio $\mathbb{N}$, a sua representação gráfica é sempre um conjunto de pontos isolados.

4.2.2 Sucessões definidas por recorrências

Consideremos a sucessão $V_n = \begin{cases} U_1 = 1 \\ U_n = n \cdot U_{n-1}, \text{ quando } n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$

Nota que a segunda fórmula permite calcular qualquer termo a partir do termo U_1.

Assim representada, diz-se que a sucessão está definida por recorrência.

Vamos calcular os primeiros termos da sucessão. Teremos, então:

- $V_1 = 2 \cdot U_{2-1} = 2 \cdot U_1 = 2 \cdot 1 = 2$
- $V_2 = 3 \cdot U_{3-1} = 3 \cdot U_2 = 3 \cdot 2 = 6$
- $V_3 = 4 \cdot U_{4-1} = 4 \cdot U_3 = 4 \cdot 6 = 24$

Exemplos

1. Vamos determinar os seis primeiros termos da sucessão, sabendo que:

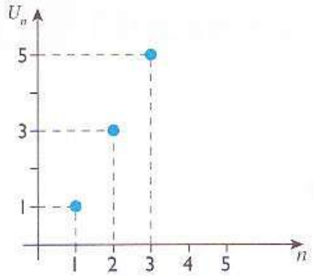
1.1 $\begin{cases} A_1 = 4 \\ A_n = 1 - A_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases}$ 1.2 $\begin{cases} B_1 = 5 \\ B_n = 4 + B_{n-1} \quad n \geq 2 \end{cases}$

1.1 {4, –3, 4, –3, 4, –3, ...}

1.2 {5, 9, 13, 18, 23, 28, ...}

4.2.3 Monotonia de uma sucessão

Uma sucessão U_n diz-se crescente quando cada um dos seus termos é menor que o termo seguinte. Isto é, uma sucessão diz-se crescente quando $U_n < U_{n+1}$ ou $U_{n+1} - U_n > 0$, qualquer que seja o valor de n.



$U_2 > U_1$

$U_3 > U_2$

....

$U_{n+1} > U_n$

Uma sucessão (U_n) é crescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0$;
Uma sucessão (U_n) é decrescente se e só se $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n < 0$.

Exemplo

1. Vamos provar que a sucessão $U_n = n + \frac{1}{2}n + 4$ é crescente.

Sendo que a hipótese é a de que a sucessão é crescente, temos de provar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n > 0$.

Assim, temos:

$$U_{n+1} = \frac{n+1+1}{2\,(n+1)+4} = \frac{n+2}{2n+6}$$

Então:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+2}{2n+6} - (\frac{n+1}{2n+4}) = (n+2)(2n+4) - \frac{(n+1)(2n+6)}{(2n+4)(2n+6)}$$

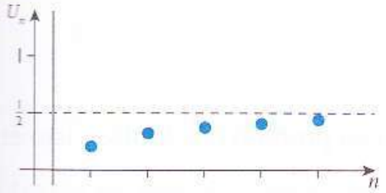
$$= \frac{2}{(2n+4)(2n+6)} > 0$$

A fracção é sempre positiva, para todo e qualquer n. Logo, a sucessão dada é crescente.

4.3 Limite de uma sucessão

As sucessões que crescem ou decrescem para um valor real à medida que aumenta n dizem-se convergentes. Por exemplo, a sucessão $U_n = \dfrac{n+2}{2n+6}$ converge para o valor $\dfrac{1}{2}$.

Graficamente, temos:



Quando $n \to +\infty$, $U_n \to \dfrac{1}{2}$.

Conceito de limite

Diz-se que uma sucessão U_n tende para um número a (ou tem por limite a), se à medida que o índice n tende para infinito, a sucessão converge para o valor a. Isto é, a sucessão U_n tem como limite a se a diferença $U_n - a$ é infinitesimal.

Simbolicamente escreve-se:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$ se e só se $U_n - a \to 0$, quando $n \to +\infty$.

Consideremos a sucessão seguinte:

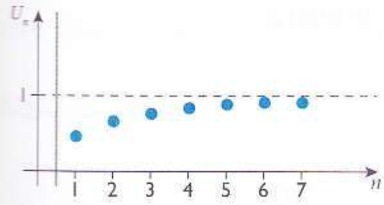
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \dots \frac{99}{100}, \dots \frac{99999}{100000}, \dots \frac{n}{n+1}.$$

Representando os seus termos na forma decimal, temos:

0,5; 0,1(6); 0,75; ... 0,9, ...0,99999; ...

Verificamos que cada termo da sucessão fica mais perto do número 1 do que o termo anterior.

Diz-se, neste caso, que a sucessão converge para 1 quando n tende para $+\infty$.



Escreve-se $U_n \to 1$ quando $n \to +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right) = 1$.

Uma sucessão que não tem limite diz-se uma sucessão divergente.

Algumas propriedades das sucessões convergentes:

- uma sucessão não pode ter mais que um limite;
- o limite de uma sucessão constante é a própria constante.

4.3.1 Propriedades dos limites das sucessões

Seja U_n e V_n duas sucessões convergentes e a uma constante $\in \mathbb{R}$.

1. Limite de uma soma

O limite de uma soma ou de uma diferença de duas sucessões convergentes é igual à soma ou à diferença dos limites das sucessões. Isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n \pm V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n \pm \lim_{n\to+\infty} V_n$$

2. Limite de um produto

O limite do produto de duas sucessões convergentes é igual ao produto dos limites. Isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n \times V_n) = \lim_{n\to+\infty} U_n \times \lim_{n\to+\infty} V_n$$

3. Limite de um quociente

Sendo $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n \neq 0$, temos que o limite do quociente de duas sucessões convergentes é igual ao quociente dos limites. Isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n}, \text{ desde que } \lim_{n\to+\infty} V_n \neq 0$$

4. Limite de uma potência

O limite de uma potência duma sucessão convergente é igual à potência do limite. Isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} (U_n)^a = (\lim_{n\to+\infty} U_n)^a$$

5. Limite de um radical

O limite de uma raiz de índice constante de uma sucessão convergente é igual à raiz do mesmo índice do limite do radicando. Isto é:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[a]{U_n} = \sqrt[a]{\lim_{n\to+\infty} U_n}$$

4.3.2 Operações algébricas de limites de sucessões

Limite de um polinómio

Consideremos a sucessão cujo termo geral é um polinómio de grau p:

$U_n = A_0n^p + A_1n^{p-1} + ... + A_p$, onde $A_0, A_1, ..., A_p \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$

Vamos calcular o limite da sucessão:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} (A_0n^p + A_1n^{p-1} + ... + A_p) = \lim_{n\to+\infty} n_p\left(\frac{A_0 + A_1}{n} + ... + \frac{A_p}{n_p}\right)$$

$$= A_0 \cdot \lim_{n\to+\infty} n_p = +\infty, \text{ se } A_0 > 0 \text{ e } -\infty \text{ se } A_0 < 0.$$

O limite de um polinómio é infinitamente grande ($+\infty$) ou pequeno ($-\infty$), determinado pelo termo de maior grau.

Exemplos

1. Vamos determinar os limites das seguintes sucessões polinominais:

1.1 $U_n = -4n^2 + 7n + 9$

1.2 $U_n = 7n^2 - 15n + 5$

1.1 $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-4n^3 + 7n^2 + 9) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-4 + 7}{n} + \frac{9}{n^3}\right) = -4 \cdot +\infty = -\infty$

1.2 $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (-7n^4 + 15n^2 + 5) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7 - 15}{n^2} + \frac{5}{n^4}\right) = 7 \cdot +\infty = +\infty$

Limite de um quociente de polinómios

Consideremos a sucessão cujo termo geral é o quociente entre polinómios:

$$A_n = A_0 n^q + A_1 n^{q-1} + \dots + \frac{A_q}{B_0 n^m + B_1 n^{m-1}} + \dots + B_m$$

Calculando o limite, devemos por em evidência o n de maior expoente:

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^q\left(\frac{A_0 + A_1}{n} + \dots + \frac{A_q}{n^q}\right)}{n^m\left(\frac{B_0 + B_1}{n} + \dots + \frac{B_m}{n^m}\right)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > m \\ \frac{A_0}{B_0} & \text{se } q = m \\ 0 & \text{se } q < m \end{cases}$$

Em suma:

- Se o grau do numerador for maior que o grau do denominador, o limite é $+\infty$;
- Se o grau do numerador for menor que o grau do denominador, o limite é zero;
- Se o numerador e o denominador tem o mesmo grau, o limite é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

4.4 Indeterminações

Ao procurarmos o limite de uma sucessão, pode surgir-nos um símbolo de indeterminação somente como um valor aparente, tornando-se necessário determinar o verdadeiro valor do limite, dizendo-se para o efeito que temos que levantar a indeterminação.

Algumas indeterminações:

$$\left\|\frac{0}{0}\right\|, \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|, \|0 \times \infty\|, \|\infty - \infty\|, \|1^{\infty}\|, \|\infty^0\|, \|0^0\|$$

A fim de levantarmos as indeterminações, vamos estudar as regras operatórias dos limites, isto é, a aplicação de limites às operações algébricas.

Exemplos

1. Vamos calcular os seguintes limites:

1.1 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+3}{3n-4}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+3}{3n-4} = \frac{2 \cdot +\infty + 3}{3 \cdot +\infty - 4} = \left\| \frac{+\infty}{+\infty} \right\|, \text{ é uma indeterminação.}$$

Vamos levantar a indeterminação colocando n em evidência:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n\left(3 - \frac{4}{n}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{+\infty}}{3 - \frac{4}{+\infty}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

1.2 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2+3n+1}{5n^2+n+5}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2+3n+1}{5n^2+n+5} = \frac{2 \cdot +\infty + 3 \cdot +\infty + 1}{5 \cdot +\infty + (+\infty) + 5} = \left\| \frac{+\infty}{+\infty} \right\|, \text{ é uma indeterminação.}$$

Vamos levantar a indeterminação colocando n em evidência:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(5 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{2}{5}$$

1.3 $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \|{+\infty}+\infty\|, \text{ é uma indeterminação.}$$

Recorda que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2\left(+\frac{n}{n}\right)} + n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

1.4 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(2n^2-3n+2)^3}{(3n^3-2n+7)^2} = \left\| \dfrac{+\infty}{+\infty} \right\|$, uma indeterminação.

No numerador, o maior termo possível é $(2n^2)^3 = 8n^6$.

No denominador, o maior termo é $(3n^3)^2 = 9n^6$.

Logo, o limite da sucessão é igual a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{8n^6}{9n^6} = \dfrac{8}{9}$.

4.5 Limite notável

Alguns limites de sucessões do tipo $\lim_{n \to +\infty} (U_n)^{bn}$ dão nos uma indeterminação do tipo 1^∞.

Consideremos a sucessão $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e calculemos os termos desta, tomando $n = 1, 2, 3, ..., +\infty$.

n	1	2	10	1000	100000	1000000000 ...
$1 + \frac{1}{n}$	2	1,5	1,1	1,001	1,00001	1,000000001 ...
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,7 ...	2,71 ...	2,71 ...	2,718 ...

Continuando e tomando para n valores cada vez maiores, podemos notar que quando $n \to +\infty$, $U_n \to 2{,}7183...$

O número 2,7183... para o qual tende o limite da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ chama-se número de Nepper e designa-se pela letra e. Podemos então escrever:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

A este limite chamamos limite notável.

Este limite aplica-se para as indeterminações do tipo 1^∞.

Em sequência disto, se $\lim_{n \to +\infty} A_n^{bn}$ produz uma indeterminação do tipo 1^∞, o cálculo do limite é dado por:

$$\lim_{n \to +\infty} A_n^{bn} = e^{\lim_{n \to +\infty} (A_n - 1) \cdot bn}$$

Exemplos

1. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1 + 0)^\infty = 1^\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) \cdot n} = e^{\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n}} = e^1 = e$$

2. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n + 1}{2n}\right)^{3n} = 1^\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n + 1}{2n}\right)^{3n} = e^{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2n+1}{2n} - 1\right) \cdot (3n)}$$

$$= e^{\lim_{n \to +\infty} \frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}}}$$

$$= e^{\frac{3}{2}}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3+2n}{2n+1}\right)^{2n}=1^{\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+2n}{2n+1}\right)^{2n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3+2n}{2n+1}-1\right)\cdot 2n}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n}{2n+1}}$$

$$=e^{2}$$

4. Vamos calcular os seguintes limites de sucessões.

4.1 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3n-3}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}$

Vamos substituir n por $+\infty$ e teremos a indeterminação do tipo 1^{∞}.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1-4}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}=1^{\infty}$$

Vamos levantar a indeterminação.

1.º processo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{3n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)}\right]^{\frac{n+1}{3}}$$

$$=\frac{(e^{-1})^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n}}}{\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n}}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{-\frac{1}{9}}}$$

$$=e^{-\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{1}{9}}$$

$$=e^{-\frac{4}{9}}$$

2.º processo:

Se a indeterminação é do tipo 1^∞, podemos levantá-la usando o seguinte método.

$$\lim_{n \to +\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{n \to +\infty} (f(x) - 1)\, g(x)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n - 3}{3n + 1}\right)^{\frac{n+1}{3}} = e^{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} - 1\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)}$$

$$= e^{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{-4}{3n+1}\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)}$$

$$= e^{\lim_{n \to +\infty} \frac{-4n-4}{9n+3}}$$

$$= e^{-\frac{4}{9}}$$

5. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$

Este limite leva à indeterminação do tipo 1^∞.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{= e \quad \cdot \quad 1 \quad = e}, \text{ porque } a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n}$$

4.6 Sucessão infinitamente pequena e sucessão infinitamente grande

Nas secções anteriores, só considerámos a hipótese de limites com valores reais. Vamos estudar o que acontece nos casos em que os limites são valores infinitamente grandes ou infinitamente pequenos.

- Se $U_n \to a$ e $V_n \to +\infty$, então $\lim_{n \to +\infty} U_n \cdot V_n = +\infty$;
- Se $U_n \to a$ e $V_n \to 0$, então $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = +\infty$;
- Se $U_n \to a$ e $V_n \to +\infty$, então $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$;
- Se $U_n \to +\infty$ e $V_n \to 0$, então $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = +\infty$;
- Se $U_n \to a$ e $V_n \to +\infty$, então $\lim_{n \to +\infty} U_n + V_n = +\infty$.

4.7. Progressões aritmética e geométrica

4.7.1 Progressão aritmética (PA)

Considera a sucessão {4, 7, 10, 13, ...}. Repara que a diferença entre um termo e o seu antecedente é um valor constante:

$7 - 4 = 3$; $10 - 7 = 3$; $13 - 10 = 3$; ...

O número 3 chama-se razão da sucessão.

Uma sucessão A_n diz-se uma progressão aritmética (PA) se existe um múmero real d tal que $A_{n+1} - A_n = d, \forall n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{R}$.
Ao número d chama-se razão da progressão aritmética.

Exemplos

1. Vamos provar que a sucessão $U_n = 2n + 1$ é uma progressão aritmética.

$$U_{n+1} - U_n = 2(n + 1) + 1 - (2n + 1)$$
$$= 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2$$

Logo, como $d = 2$ = constante, a sucessão é uma progressão aritmétrica.

2. A sucessão $U_n = \{4, 12, 36, 72, ...\}$ não é uma progressão aritmética porque não é constante a diferença entre um termo e seu antecedente:
$12 - 4 = 8$ mas $36 - 12 = 24$.

Termo geral de uma progressão aritmética

Seja $A_n = A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$ uma progressão aritmética de razão d. Então:

- $A_2 = A_1 + d$
- $A_3 = A_2 + d = A_1 + d + d = A_1 + 2d$
- $A_4 = A_3 + d = A_1 + 2d + d = A_1 + 3d$
- ....
- ....
- $A_n = A_{n-1}d = A_1 + (n - 1)\,d$

A expressão $A_n = A_1 + (n - 1)d$ chama-se termo geral da progressão aritmética porque permite obter qualquer termo da progressão.

Exemplos

1. Vamos encontrar o terceiro termo e o 10.º da progressão aritmética, sabendo que $A_1 = 8$ e $d = -5$.

$$A_n = A_1 + (n-1)d$$

$A_3 = 8 + (3-1) \times (-5)$	$A_{10} = 8 + (10-1) \times (-5)$
$A_3 = 8 - 10$	$A_{10} = 8 - 45$
$A_3 = -2$	$A_{10} = -37$

2. Vamos encontrar os termos A_5, A_{20} e A_{101} da progressão aritmética cuja razão é 3 e o primeiro termo é 2.

$$A_n = A_1 + (n-1)d$$
$$A_5 = 2 + 4 \times 3 = 14$$
$$A_{20} = 2 + 19 \times 3 = 59$$
$$A_{101} = 2 + 100 \times 3 = 302$$

3. Vamos calcular o termo A_{15} de uma progressão aritmética, sabendo que $A_5 = 55$ e $A_{21} = -25$.

$$\begin{cases} A_5 = A_1 + (5-1)d \\ A_{21} = A_1 + (21-1)d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + 4d = 55 \\ A_1 + 20d = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 75 \\ d = -5 \end{cases}$$

Logo, $A_{15} = 75 + 14 \cdot (-5) = 5$.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética

A soma dos primeiros n termos de uma progressão aritmética é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{(A_1 + A_n)n}{2}$$

Sabendo que $A_n = A_1 + (n-1)\,d$, podemos escrever:

$$S_n = [A_1 + A_1 + (n-1)d] \cdot \frac{n}{2} = \frac{2A_1 + (n-1)d}{2}$$

Isto é:

$$S_n = \frac{[2A_1 + (n-1)d]\,n}{2}$$

Exemplos

1. Vamos calcular a soma dos 4 primeiros termos da sucessão dos números naturais.

$A_1 = 1$

$d = 1$

$$S_4 = \frac{2 \times 1 + (4 - 1)}{2} \cdot 4$$

$$= \frac{(2 + 3)4}{2}$$

$$= 10$$

2. Numa PA de razão $d = -3$ o primeiro termo é 23. Vamos calcular a soma dos 15 primeiros termos.

$A_1 = 23$

$d = -3$

$n = 15$

$$S_{15} = \left[2 \cdot 23 + (15 - 1) \cdot -\frac{3}{2}\right] 15$$

$$= \frac{46 - 42}{2} \cdot 15$$

$$= \frac{4 \cdot 15}{2}$$

$$= 30$$

Propriedades da progressão aritmética

Cada termo de uma progressão aritmética é igual à média aritmética dos termos adjacentes.

$$A_n = \frac{A_{n-1} + A_{n+1}}{2}$$

Exemplo

1. 4, 7, 10, 13, 16,...

$$A_4 = \frac{A_3 + A_5}{2} = \frac{10 + 16}{2} = 13$$

$$A_3 = \frac{A_2 + A_4}{2} = \frac{7 + 13}{2} = 10$$

A soma dos termos equidistantes dos extremos de uma progressão aritmética finita é igual à soma dos extremos.

Na progressão aritmética: A_1, A_2, A_3, A_4

$$A_2 + A_3 = A_1 + A_4$$

Na progressão aritmética: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

$$2 \cdot A_3 = A_1 + A_5$$

Exemplo

1. Para que valores de x é que a sucessão de três termos x^2, -3, $-5x$ forma uma progressão aritmética?

   $2 \cdot (-3) = x^2 + (-5x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

   $x = 2 \vee x = 3$

   Se $x = 2 \Rightarrow 4, -3, -10$ (d = −7).

   Se $x = 3 \Rightarrow 9, -3, -15$ (d = −12).

4.7.2 Progressão geométrica (PG)

Consideremos a sucessão $A_n = \{3, 6, 12, 24, ...\}$.

Observa que $\frac{6}{3} = 2; \frac{12}{6} = 2; \frac{24}{12} = 2, ...$

Isto é, é constante o quociente entre um termo e o seu antecedente.

O número 2 chama-se razão da sucessão.

Uma sucessão U_n de termos não nulos, diz-se uma progressão geométrica (PG) se existe um número real r tal que $\frac{A_{n+1}}{A_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}$.

Ao número r chama-se razão da progressão geométrica.

Termo geral de uma progressão geométrica

Seja $A_n = A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ uma progressão geométrica.

Como $\frac{A_{n+1}}{A_n} = r$, então $A_{n+1} = A_n \cdot r$

Assim:

- $A_2 = A_1 \cdot r$
- $A_3 = A_2\, r = A_1\, r\, r = A_1 \cdot r^2$
- $A_4 = A_3\, r = A_1\, r^2 \cdot r = A_1 \cdot r^3$
- ...
- ...
- $A_n = A_{n-1}\, r = A_1\, r^{n-1}$

A expressão $A_n = A_1 r^{n-1}$ chama-se termo geral da progressão geométrica porque permite obter qualquer termo da progressão.

Exemplos

1. Vamos encontrar o oitavo termo de uma PG, se $A_1 = 1$ e $r = 3$.

   $A_8 = A_1 \cdot r^{8-1}$

   $A_8 = 1 \cdot 3^7 = 2187$

2. Vamos calcular a razão e o termo geral de uma progressão geométrica, sabendo que $A_4 = \frac{1}{8}$ e $A_r = \frac{1}{8192}$.

$$\begin{cases} A_1 \cdot r^3 = A_4 \\ A_1 \cdot r^8 = A_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \cdot r^3 = \frac{1}{8} \\ A_1 \cdot r^8 = \frac{1}{8192} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{------------------} \\ A_1 \cdot r^3 \cdot r^5 = \frac{1}{8192} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{} \\ \frac{1}{8 \cdot r^5} = \frac{1}{8192} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ r^5 = \frac{8}{81r^2} = \frac{1}{1024} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ r^5 = 2^{-10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{} \\ r^5 = (\frac{1}{4})^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{8 \cdot r^3} \\ r = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \\ r = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Termo geral:

$$A_n = A_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow A_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ou

$$A_n = 32 \cdot 2^{-2n}$$

3. A soma dos três primeiros termos de uma progressão geométrica é igual a 6. A soma do 2.º, do 3º e do 4º termos é igual a –3.

Vamos encontrar o termo geral da progressão.

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 6 \\ A_2 + A_3 + A_4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_1 r + A_1 r^2 = 6 \\ A_1 r + A_1 r^2 + Arr^3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1(1 + r + r^2) = 6 \\ A_{1r}(1 + r + r^2) = -3 \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, obtemos:

$$\frac{A_1(1 + r + r^2)}{A_{1r}(1 + r + r^2)} = \frac{6}{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = -2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}, \text{ porque } \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1}{r \cdot A_1} = \frac{1}{r}.$$

$$A_1(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 6 \Leftrightarrow \frac{A_1 \cdot 3}{4} = 6 \Leftrightarrow A_1 = 8.$$

Termo geral: $A_n = 8 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

Propriedades de uma progressão geométrica

Os produtos dos termos equidistantes dos extremos de uma progressão geométrica finita são iguais ao produto dos extremos.

Na progressão geométrica $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$:
$A_2 \cdot A_5 = A_1 \cdot A_6$
$A_3 \cdot A_4 = A_1 \cdot A_6$
$A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

Exemplo

1. $U_n = \{2, 6, 18, 54, 162\}$
   $2 \cdot 162 = 6 \cdot 54$
   $182 = 2 \cdot 162$

Cada termo de uma progressão geométrica de termos positivos é igual à média geométrica dos termos adjacentes.

Se $A_n = A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ é uma progressão geométrica, então:
$A_2 = \sqrt{A_1 \cdot A_3}$
$A_3 = \sqrt{A_2 \cdot A_4}$

Exemplo

1. Na progressão (2, 6, 18, 54, 162):
   $6 = \sqrt{2 \cdot 18}$
   $18 = \sqrt{6 \cdot 54}$

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica finita

Seja $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ uma progressão geométrica finita de razão r.

A soma dos n termos é:

$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$

Vamos multiplicar os dois membros por r:

$$r \cdot S_n = \underbrace{A_1 r}_{A_2} + \underbrace{A_2 r}_{A_3} + \underbrace{A_3 r}_{A_4} + \ldots + A_n r$$

Logo, $r \cdot S_n = A_2 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + A_n r$

Vamos subtrair as duas equações:

$$S_n - r \cdot S_n = A_1 + A_2 - A_2 + A_3 - A_3 + ... + A_n \cdot r$$

$$S_n(1 - r) = A_1 A_n \cdot r \text{ mas } A_n = A_1 \cdot r^{n-1}$$

Logo, $S_n(1 - r) = A_1 - A_1 \cdot r^{n-1} \cdot r$

$$S_n(1 - r) = A_1 - A_1 r^n = A_1(1 - r^n)$$

$$\boxed{S_n = A_1 \frac{(1 - r^n)}{1 - r}} \quad \text{ou} \quad \boxed{S_n = \frac{A_1 (r^n - 1)}{r - 1}}$$

é a soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Exemplos

1. Vamos calcular a soma de oito termos consecutivos de uma PG, se $A_1 = -2$ e $r = -3$.

$$S_8 = -2 \cdot \frac{1 - (-3)^8}{1} + 3 = -2 \cdot \frac{1 - 654}{4} = 3280$$

2. Vamos calcular A_1 e A_n, sabendo que $r = -\frac{2}{3}$, $n = 6$ e $S_6 = 133$.

$$S_6 = A_1 \frac{1 - r^6}{1 - r} = A_1 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6}{1 + \frac{2}{3}} = 133$$

$$A_1 \frac{\frac{1 - 64}{729}}{\frac{5}{3}} = 133 \Leftrightarrow A_1 = 243$$

$$A_6 = 243 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^5 = -243 \cdot \frac{32}{243} = -32$$

3. Um motorista de «chapa 100» foi multado cinco vezes, tendo o valor duplicado de cada vez que pagava uma nova multa. A última multa foi de 816 meticais. Quanto pagou ao todo?

$$A_1 \xrightarrow{\times 2} A_2 \xrightarrow{\times 2} A_3 \xrightarrow{\times 2} A_5 \xrightarrow{\times 2} A_6$$

Logo, $r = 2$

$A_5 = 816$

$r = 2$

$n = 5$

$$S_5 = 51 \frac{(1 - 2^5)}{1 - 2} \qquad A_5 = A_1 \cdot r^4$$

$$S_5 = 1581 \qquad 816 = A_1 \cdot 2^4$$

$$A_1 = 51$$

O motorista pagou, ao todo, 1581 meticais.

4.8 Soma de *n* termos da progressão geométrica infinita

Se $|r| < 1$ e $n \to +\infty$ então:

$$S_n = \frac{A_1(1 - r^n)}{1 - r} \Leftrightarrow \frac{A_1}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{A_1}{1 - r}$$

Exemplos

1. Vamos escrever, na forma de fracção, o número decimal 2,(3).
   2,(3) = 2 + 0,3 + 0,03 + 0,003 + ...

   Consideremos primeiramente a soma:
   S_n = 0,3 + 0,03 + 0,003 + ... é, pois, uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{10}$ e $A_1 = 0,3$.

   $$S_n = 0,3\,\frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,3}{9 \cdot 10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

   $$2,(3) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

2. Vamos calcular a soma 2 + 0,2 + 0,02 + ...

   $$0,2 + 0,02 + 0,002 + \ldots = \frac{0,2}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{9}$$

   $$2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \ldots = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$$

Exercícios resolvidos

1. Calcula o valor de x e a razão da progressão geométrica em que $x + 3$, $2x$, $3x - 2$ são termos consecutivos.

Resolução

Se A_1, A_2 e A_3 são termos consecutivos de uma PG então $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$.

Assim: $(2x)^2 = (x + 3)(3x - 2)$

$4x^2 = 3x^2 + 7x - 6$

$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 6$

se $x = 1 \Rightarrow 4, 2, 1$ e $r = \frac{1}{2}$

se $x = 6 \Rightarrow 9, 12, 16$ e $r = \frac{4}{3}$

2. Três números cuja soma é 24 formam uma PA. Adicionando aos três termos os números 3, 2 e 6 respectivamente obteremos três números que formam uma PG. Quais são os números em PA? Quais são os números em PG?

Resolução

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 24 \\ (A_2 + 2)^2 = (A_1 + 3)(A_3 + 6) \end{cases}$$

A_1, A_2, A_3 pertencem à PA

$(A_1 + 3)$, $(A_2 + 2)$, $(A_3 + 6)$ pertencem à PG

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} A_1 + A_1 + d + A_1 + 2d = 24 \\ (A_1 + d + 2)^2 = (A_1 + 3)(A_1 + 2d + 6) \end{cases}$$

Numa PA:

$A_n = A_1 + (n - 1)d$

$$\begin{cases} 3A_1 + 3d = 24 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + d = 8 \\ (8 + 2)^2 = (A_1 + 3)(8 + d + 6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 8 - d \\ 100 = (8 - d + 3)(14 + d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 8 - d \\ (11 - d)(14 + d) = 100 \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

Vamos resolver a equação:

$(11 - d)(14 + d) = 100$

$-d^2 - 3d + 154 - 100 = 0$

$d^2 + 3d - 54 = 0$

$d = -9 \vee d = 6$

$$\text{PA}\begin{cases} \text{se } d = -9 \text{ então } A_1 = 17,\ A_2 = 8,\ A_3 = -1 \\ \text{se } d = 6 \text{ então } A_1 = 2,\ A_2 = 8,\ A_3 = 14 \end{cases}$$

$$\text{PG}\begin{cases} \text{se } d = -9 \text{ então } A_1 = 20,\ A_2 = 10,\ A_3 = 5 \\ \text{se } d = 6 \text{ então } A_1 = 5,\ A_2 = 10,\ A_3 = 20 \end{cases}$$

3. Escreve na forma de fracção o número decimal 2,05050505...

Resolução:

$$2{,}050505... = \underbrace{2 + 0{,}05 + 0{,}0005 + 0{,}000005 + ...}$$

é uma PG de razão $\frac{1}{100}$ e $A_1 = 0{,}05$ e $n \to +\infty$

$$2{,}(05) = 2 + \lim_{n\to+\infty} 0{,}05\,\frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^n}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{0{,}05}{\frac{99}{100}}$$

$$2{,}(05) = 2 + \frac{5}{99} = \frac{198+5}{99} = \frac{203}{99}$$

Logo, $2{,}(05) = \frac{203}{99}$

4. Um viajante quis contratar um táxi para uma viagem que devia durar 9 horas. O taxista pediu, por cada hora, 120 meticais, o que o viajante achou muito caro. O taxista propôs que lhe pagasse 3 meticais pela 1.ª hora, 6 meticais pela 2.ª hora, 12 meticais pela 3.ª hora e assim em diante. O viajante achou a proposta engraçada e aceitou-a de imediato. O taxista ganhou ou perdeu, em relação à primeira proposta? Quanto?

Resolução:

O viajante teria pago $9 \cdot 120$ Mt = 1080 Mt se tivesse aceite a primeira proposta.

Com a segunda proposta vai pagar $3 + 6 + 12 + ... + A_9$. Trata-se pois da soma de 9 termos de uma progressão geométrica onde $A_1 = 3$ e $r = 2$.

$$S_n = A_1\frac{(1-r^n)}{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad S_9 = 3\frac{(1-2^9)}{1-2} \quad \Leftrightarrow \quad S_9 = 3 \cdot \frac{(51)}{-1} = 1533$$

Com a segunda proposta, o viajante pagará 1533 meticais. Logo, o taxista ganhou a mais 1533 Mt – 1080 Mt = 453 Mt em relação à primeira proposta.

Exercícios propostos

1. Considera as sucessões seguintes e determina: $U_1, U_2, U_5, \dots, U_p$.

   1.1 $U_n = 2n - 1$

   1.2 $U_n = \dfrac{n+2}{n+3}$

   1.3 $U_n = 1 + 2n - 1$

2. Na sucessão $U_n = \dfrac{n+2}{n+3}$, do exercício anterior, verifica se os números reais 0,9 e 1,25 são termos da sucessão ou não. No caso afirmativo, indica a ordem.

3. Estuda a monotonia das sucessões definidas por:

   3.1 $U_n = \dfrac{n}{n+1}$

   3.2 $C_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   3.3 $A_n = \dfrac{6-1}{n}$

   3.4 $U_n = 6 + (-1)^n$

   3.5 $A_n = \dfrac{n+3}{n+1}$

   3.6 $U_n = \dfrac{2n+3}{4n-1}$

4. Investiga a convergência das seguintes sucessões de termos gerais:

   4.1 $A_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ 4.2 $B_n = 5\,n$ 4.3 $A_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 1}{n}$ 4.4 $D_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se n é par} \\ -1 & \text{se n é impar} \end{cases}$

5. Dada a sucessão $U_n = \dfrac{n^2 - n}{3} + (-1)^n$:

   5.1 Calcula U_1, U_2 e U_3;

   5.2 Justifica que U_n não é monótona.

6. Escreve uma expressão analítica que possa gerar a seguinte sucessão:

   6.1 8, 16, 24, 32, ...

   6.2 2, –2, 2, –2, 2, ...

   6.3 –2, 2, –2, 2, –2, ...

   6.4 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Exercícios propostos

7. Das seguintes afirmações, indica aquelas que são verdadeiras.

7.1 A expressão $U_n = \dfrac{n+1}{n-1}$ define uma sucessão.

7.2 O domínio de uma sucessão é um subconjunto de $\mathbb{R}$.

7.3 O contradomínio de uma sucessão é $\mathbb{R}$.

7.4 Uma sucessão é uma função real de variável natural.

7.5 Uma sucessão monótona e limitada é uma sucessão convergente,

7.6 Uma sucessão monótona crescente não é limitada inferiormente.

8. Considera as sucessões de termos gerais e calcula os primeiros três termos de cada sucessão ($n \in \mathbb{N}$):

8.1 $A_n = 2^n$

8.2 $B_n = 30$

8.3 $C_n = 1 - 2n$

8.4 $D_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$

8.5 $V_n = \dfrac{(n+2) \cdot (-1)^{n+1}}{n+3}$

9. Considera a sucessão de termo geral $A_1 = \dfrac{n+1}{n}$.

9.1 Escreve os cinco primeiros termos da sucessão.

9.2 Escreve o termo de ordem $n-1$.

9.3 Será 1,02 termo da sucesssão? E 1,01? Justifica a resposta.

10. Considera a sucessão $U_n = \dfrac{n^2-1}{n}$.

10.1 Determina U_1, U_3, U_5, U_{n+1}.

10.2 Verifica que 9,9 é termo da sucessão e indica a sua ordem.

10.3 Será 6 termo da sucessão? Justifica a resposta.

11. Nas sucessões seguintes, escreve o termo geral, de cada sucessão.

11.1 $-1, -4, -9, -16, -25, \ldots$

11.2 $-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots$

11.3 $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$

11.4 $0, 5, 10, 15, 20, \ldots$

11.5 $0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \ldots$

11.6 $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, -\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \ldots$

Exercícios propostos

12. Escreve o termo geral da sucessão:
    - 12.1 Dos números pares;
    - 12.2 Dos números ímpares;
    - 12.3 Dos múltiplos e 3;
    - 12.4 Das potências de 5;
    - 12.5 Das potências de $\frac{1}{3}$.

13. Mostra que $A_n = \frac{1}{3}(n + 1)$ é uma progressão aritmética.

14. Mostra que $B_n = n - n^2$ não é uma progressão aritmética.

15. Escreve os cinco primeiros termos de uma PA em que o 1.º termo é −2 e a razão é:

    15.1 2 15.2 −3 15.3 $\frac{1}{2}$ 15.4 0

16. Verifica se a sucessão $V_n = \begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 3 \end{cases}$

    é uma progressão aritmética.

17. Sabendo que numa PA, $U_5 = 14$ e $U_8 = 23$, determina a razão da progressão.

18. Dada a progressão −5, −7, −9, −11, ... calcula o termo geral e o termo de ordem 500.

19. Escreve o termo geral da progressão em que:
    - 19.1 $U_1 = 3$ e $d = 10$
    - 19.2 $U_3 = -10$ e $d = 5$
    - 19.3 $U_{10} = 5$ e $U_{30} = -5$
    - 19.4 $U_6 + U_8 = 28$ e $d = 3$

20. Calcula a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética.
    - 20.1 6, 18, 30, 42, ... $n = 20$
    - 20.2 −6, −2, 2, 6, ... $n = 10$
    - 20.3 0,5; 0,9; 1,3; ... $n = 18$
    - 20.4 $A_2 = 3{,}5$; $A_{12} = 7{,}5$ $n = 100$

21. Numa PA de razão −3, o sexto termo é −7 e o enésimo termo é −247. Quantos termos tem a progressão?

Exercícios propostos

22. A soma do primeiro e quinto termos de uma PA é 26 e o produto do segundo e quarto é 160. Calcula a soma dos primeiros seis termos.

23. Quantos números divisíveis por 3 existem entre 100 e 10 000 exclusive?

24. Calcula a soma dos doze primeiros termos de uma PA, sabendo que a soma do 2.° e do 5.° termos é 14 e a soma do 3.° e 7.° termos é 8.

25. Determina a soma dos dez primeiros termos de uma PA, sabendo que a soma do 3.° e 6.° é 3 e que a soma dos seus quadrados é 45.

26. Calcula x tal que:
    26.1 $3 + 10 + 17 + ... + x = 49$
    26.2 $1 + 2 + 3 + ... + x = 325$

27. Escreve os cinco primeiros termos da PG tal que:
    27.1 $A_1 = -3$ e $r = 2$
    27.2 $A_2 = 10$ e $r = -2$
    27.3 $A_4 = -1$ e $r = -1$
    27.4 $A_4 = 6$ e $A_2 = 3$

28. Verifica se são PG e, em caso afirmativo indica a razão da progressão.
    28.1 5^{1-n} 28.2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$ 28.3 $(-1)^{2n+1}$

29. Determina o termo geral de uma PG sabendo que:
    29.1 $A_1 = 3$ e $A_5 = 48$ e $r > 0$
    29.2 $A_4 = 8$ e $A_7 = 1$
    29.3 $A_2 = 6$ e $A_3 = 18$
    29.4 $A_2 = 8$ e $A_4 = 128$

30. Determina o décimo termo de uma PG tal que:
    30.1 $U_1 + U_6 = -488$ e razão é 3;
    30.2 $A_1 = 5$ e $A_2 = -10$

31. A Ana descobriu que o namorado da Vitória era o Satar. Num minuto, ela contou a quatro colegas da escola e cada uma destas contou a outras quatro no minuto seguinte e assim sucessivamente.
    31.1 Quantos vão transmitir a notícia ao fim de quatro minutos?
    31.2 Quanto tempo levaria para que 3000 alunos estivessem a transmitir a notícia?

Unidade 5

Limites e continuidade de funções

Ao terminar esta unidade, deverás ser capaz de:

- explicar a noção de limite de uma função;
- aplicar as propriedades dos limites de funções para o cálculo de limites;
- identificar as formas indeterminadas de limites de funções;
- calcular limites laterais;
- calcular limites notáveis;
- definir uma função contínua num ponto e num intervalo;
- identificar uma função contínua dado o seu gráfico;
- determinar se uma função é contínua, dada a sua expressão analítica.

5.1 Limites de uma função

5.1.1 Definição de limite de uma função num ponto

O conceito de limite de uma função é fundamental para o estudo e compreensão do cálculo. A ideia intuitiva de limite é aproximar-nos o máximo possível de um valor numérico e, mesmo assim, nunca alcançá-lo.

Antes, porém, é conveniente observar que a existência do limite de uma função para um valor numérico b quando x tende para um valor numérico a, não exige que a função esteja definida no ponto a. Na realidade, quando calculamos um limite, consideramos os valores da função tão próximos quanto desejamos do ponto a, porém não coincidente com a, ou seja, consideramos os valores da função na vizinhança do ponto a.

Consideremos a função definida por, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 16}{2x - 4}$.

Vamos estudar o limite de $f(x)$ quando x tende para 2.

Observamos que para $x = 2$, a função não está definida. No entanto, mesmo não existindo $f(2)$, o limite de $f(x)$ quando x tende para 2 existe e pode ser calculado da seguinte forma, factorizando o numerador:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(2x+4)\cancel{(2x-4)}}{\cancel{2x-4}} = \lim_{x \to 2} (2x+4) = 2 \cdot 2 + 4 = 8.$$

Vamos apresentar a definição de limite de uma função segundo Heine:

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do domínio de f. Diz-se que f tende para, b quando x tende para a e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se, a toda a sucessão x_n de valores de x pertencentes ao domínio de f, convergente para a, mas por valores não iguais a a, correspondente a uma sucessão de valores de f, $f(x)$ converge para b.

Função infinitamente pequena e infinitamente grande

Função infinitamente pequena (ou infinitésimo)

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ quando $x \to a$ ou $x \to \pm\infty$, a função $f(x)$ diz-se infinitésimo.

Função infinitamente grande (positiva ou negativa)

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ quando $x \to a$ ou $x \to \pm\infty$, a função $f(x)$ diz-se infinitamente grande (positiva para o limite igual a $+\infty$ e negativa para o limite igual a $-\infty$).

Propriedades

Podemos enumerar algumas propriedades interessantes dos limites infinitamente grandes e pequenos.

- A soma e o produto de dois infinitésimos, quando $x \to a$, é também um infinitésimo.

- Sejam $f(x)$ e $g(x)$ dois infinitésimos, quando $x \to a$:

a) se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, as funções $f(x)$ e $g(x)$ designam funções da mesma ordem.

b) se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C = 0$, então $f(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a $g(x)$ porque $f(x)$ tende mais rapidamente para zero do que $g(x)$.

c) se $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, então as funções $f(x)$ e $g(x)$ dizem-se equivalentes. Designa-se $f(x) \sim g(x)$.

Exemplos

1. $\operatorname{sen} x \sim x$ quando $x \to 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

2. $\operatorname{tg} x \sim x$ quando $x \to 0$ porque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

3. Seja $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$ e $g(x) = 3x - x^2$.

   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + \sqrt{x})}{3x - x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 + \sqrt{x})}{x(3 - x)} = \dfrac{1}{3}$, isto é $f(x)$ e $g(x)$ são da mesma ordem quando $x \to 0$.

4. Seja $f(x) = 5x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} 5\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} 5\sqrt[3]{x} = 0$, logo $f(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a $g(x)$.

5. $f(x) = x^2$ é uma função infinitamente grande positiva quando $x \to +\infty$ porque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

6. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ é uma função infinitamente grande positiva quando $x \to 2$ porque $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{x-2} = +\infty$

5.1.2 Limites laterais

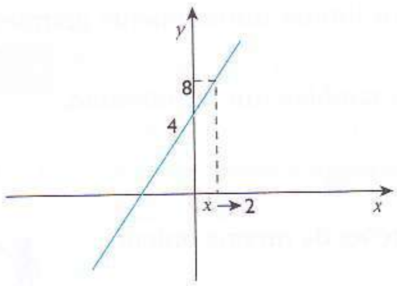
Vamos estudar o comportamento duma função quando $x \to a$, considerando uma sucessão x_1, x_2, x_3, ..., x_n de valores de x que tendem para a e sejam $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ os correpondentes valores de y.

Exemplos

1. Vamos considerar a função $f(x) = 2x + 4$. Atribuindo a x valores próximos de 2, mas menores que 2, temos:

x	1,9	1,99	1,9999	$x \to 2^-$
$f(x) = 2x + 4$	7,6	7,98	7,99998	$y \to 8$

Graficamente, temos:



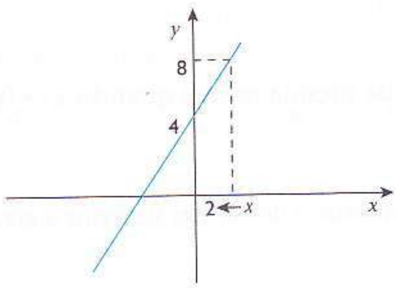
Repara que para $x \to 2^-$ então $f(x) \to 8$, onde o sinal «–» significa que aproximamos x de 2, por defeito. Podemos escrever: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 8$, onde 8 é o chamado limite lateral esquerdo.

Diz-se que 8 é o limite à esquerda de $f(x)$ no ponto 2.

Se agora atribuirmos a x valores próximos de 2, mas maiores que 2, temos:

x	2,01	2,001	2,00002	$x \to 2^+$
$f(x) = 2x + 4$	8,02	8,002	8,00002	$y \to 8$

Graficamente, temos:



Repara que para $x \to 2^+$ então $f(x) \to 8$, onde o sinal «+» significa que aproximamos x de 2, por excesso. Podemos escrever: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 8$, onde 8 é o chamado limite lateral direito.

Diz-se que 8 é o limite à direita de $f(x)$ no ponto 2.

Observemos que em ambas as tabelas quando x se aproxima cada vez mais de 2, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 8.

Uma função tem limite no ponto a se e só se existem e são iguais os limites laterais no ponto a, ou seja:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b = \lim_{x\to a^-} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

O limite de uma função num ponto, quando existe, é único.
Dizemos que existe o limite num ponto quando o limite é finito.

5.1.3 Operações algébricas com limites

Considera duas funções f e g convergentes e $a \in \mathbb{R}$.

Limite de uma soma

O limite de uma soma ou de uma diferença de duas funções convergentes é igual à soma ou à diferença dos limites das funções:

$$\lim_{x\to a} (f \pm g) = \lim_{x\to a} f \pm \lim_{x\to a} g$$

Limite de um produto

O limite de um produto de duas funções covergentes é igual ao produto dos limites das funções:

$$\lim_{x\to a} (f \cdot g) = \lim_{x\to a} f \cdot \lim_{x\to a} g$$

Limite de um quociente

O limite de um quociente entre duas funções convergentes, em que $\lim\limits_{x\to a} g \neq 0$, é igual ao quociente de limites das funções:

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f}{\lim\limits_{x\to a} g}$$

Limite de uma potência

O limite de uma potência de uma função convergente, com $n \in \mathbb{N}$, é igual à potência do limite:

$$\lim_{x\to a} f^n = \left(\lim_{x\to a} f\right)^n$$

Limite de um radical

Se $f(x)$ é uma função convergente e p um número real, temos que o limite da raiz de uma função convergente de índice $p \in \mathbb{R}$ é igual à raiz do limite do radicando:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[p]{f} = \sqrt[p]{\lim_{x \to a} f}$$

Indeterminações

Consideremos o seguinte problema: Dados dois números a e b, determina um número x tal que $a = b \cdot x$.

Examinemos este caso quando $a = 0$ e $b = 0$.

Trata-se, pois, de achar um número x, tal que $0 \cdot x = 0$. Ora, qualquer número satisfaz esta condição. Portanto, o problema admite como solução qualquer número, por exemplo: 3, –5, 190, . . . Deste modo, o símbolo $\frac{0}{0}$ pode considerar-se como indicativo de um problema indeterminado e por isso se diz símbolo de indeterminação.

Outros símbolos de indeterminação são os seguintes:

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^{∞}; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 0^0; ∞^0

Levantar a indetermінção é encontrar o valor limite, se existir (e diz-se neste caso que a indetermінção é aparente).

Exemplo

1. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$

5.1.4 Cálculo de limites

Limite de uma função racional tipo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Para o cálculo do limite de uma função do tipo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, usualmente procede-se da seguinte forma:

- coloca-se primeiro em evidência a potência máxima de $f(x)$ e $g(x)$;
- depois, simplifica-se e em seguida substitui-se x por $+\infty$.

Exemplos

1. Vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ é uma indeterminação.

Vamos proceder como em cima:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\left(1 - \frac{x}{2x^2} + \frac{3}{2x^2}\right)}{x^3\left(1 - \frac{8x}{x^3} + \frac{5}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left(1 - \frac{x}{2x^2} + \frac{3}{2x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{8}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{2}{+\infty} \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty}\right)}{\left(1 - \frac{8}{+\infty} + \frac{5}{+\infty}\right)}$$

$$= \frac{2}{+\infty}$$

$$= 0$$

Limites de funções racionais do tipo $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Para o cálculo do limite de uma função do tipo $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ usualmente procede-se da seguinte forma:

- primeiro substitui-se x por a e, se $f(a) = 0$ e $g(a) = 0$, então obtém-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$;
- logo, factoriza-se os dois termos da fracção e simplifica-se;
- por fim, substitui-se x por a para obtermos o valor do limite.

Exemplos

1. Vamos calcular $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{1 - 1}{1 - 3 + 2} = \dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Vamos proceder como em cima:

$$\lim_{x-1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to-1} \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{(x + 1)}(x + 2)}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$= \frac{-1 - 1}{-1 + 2}$$

$$= \frac{-2}{+1}$$

$$= -2$$

2. Vamos calcular $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^3 + 4a^2x - 5a^3}{x^2 - ax}$.

Vamos usar a regra de Ruffini para a factorização do numerador:

	1	0	$4a^2$	$-5a^3$
a		a	a^2	$5a^3$
	1	a	$5a^2$	0

$$\lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x^2 + ax + 5a^2)}{x\,\cancel{(x-a)}}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 + xa + 5a^2}{x}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 + 5a^2}{a} = \frac{7a^2}{a} = 7a$$

Limites de funções irracionais

Para o cálculo do limite de uma função irracional, usualmente, procede-se da seguinte forma:

- primeiro tenta-se substituir x por a;
- tenta-se depois levantar a indeterminação através da multiplicação pelo conjugado do numerador ou do denominador;
- por fim, substitui-se x por a para obter o valor do limite.

Exemplos

1. Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x\,(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1 + x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{1+1}$$

$$= 1$$

2. Vamos calcular o $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Para levantar a indeterminação, vamos encontrar o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos índices dos radicais:
m.m.c. (3,4) = 12

Seja $x = t^{12}$, se $x \to 1$ então $t \to 1$.

Recorda que:
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Logo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} \Rightarrow \lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$$
$$= \lim_{t \to 1} \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$
$$= \lim_{t \to 1} \frac{\cancel{(t - 1)}(t + 1)(t^2 + 1)}{\cancel{(t - 1)}(t^2 + t + 1)}$$
$$= \frac{(1 + 1)(1 + 1)}{(1 + 1 + 1)}$$
$$= \frac{4}{3}$$

Limites de funções trigonométricas

Limite notável: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1$

Observa o quadro seguinte.

x	$\dfrac{\text{sen } x}{x}$
–0,1	0,9...
–0,0001	0,999...
–0,0000001	0,99999...
0	
0,0000001	0,999999...
0,00001	0,9999...
0,001	0,998...
0,01	0,98...

Nota que:
$x \to 0^-; y \to 1$
$x \to 0^+; y \to 1$

Deste quadro podemos verificar que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\text{sen } x}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Exemplos

1. Vamos calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = 1 = \frac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Vamos levantar a indeterminação aplicando o limite notável:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = \lim_{x \to 0} 3 \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x}$$
$$= 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{3x}$$
$$= 3 \cdot 1 = 3$$

2. Vamos calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x}{x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$
$$= \lim_{x \to 0} \text{sen } x \frac{(\text{sen } x - \cos x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} (\text{sen } x - \cos x)$$
$$= 1 \cdot (0 - 1) = -1$$

3. Vamos calcular $\lim\limits_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$.

Vamos fazer uma mudança da variável:

Seja $x - a = t$. Então $x = a + t$.

Deste modo, se $x \to a$ então $t \to 0$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } (t + a) - \text{sen } a}{t}$$

Recordas-te que na 11.ª classe aprendemos que $\text{sen } x - \text{sen } y = 2 \text{ sen } \frac{x - y}{2} \cdot \cos \frac{x + y}{2}$.

Logo:

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 \cdot \text{sen } \frac{t + \cancel{a} - \cancel{a}}{2} \cdot \cos \frac{t + a + a}{2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2 \cdot \text{sen } \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t + 2a}{2}}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \cdot \lim_{t \to 0} \cos \frac{(t + 2a)}{2}$$
$$= 1 \cdot \cos \frac{0 + 2a}{2}$$
$$= 1 \cdot \cos \frac{2a}{2}$$
$$= \cos a$$

5.2 Continuidade de funções

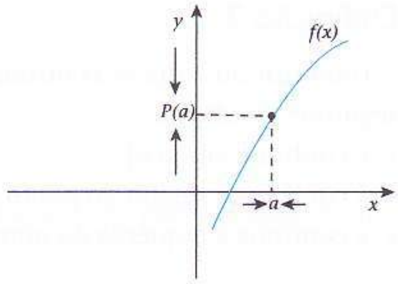
5.2.1 Continuidade de uma função num ponto

Definição

Seja f uma função real de variável real e a um ponto de acumulação do seu domínio.

Diz-se que f é contínua no ponto a do seu domínio se, e só se as três condições seguintes se verificarem:

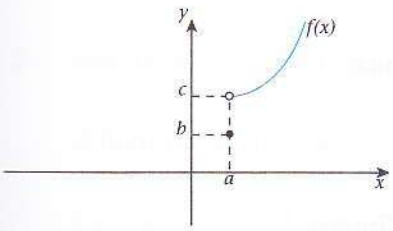
- existe $f(a)$;
- existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Se uma função não é contínua num ponto $x = a$ do seu domínio, diz-se que a função é descontínua nesse ponto. A descontinuidade pode acontecer ou porque a função apresenta um «furo», ou dá «salto» nesse ponto.

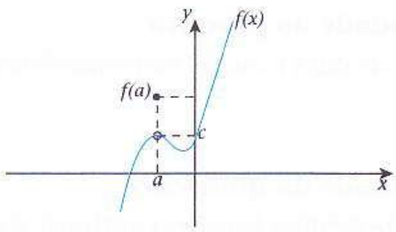
Pode ocorrer as seguintes situações:

- Não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;



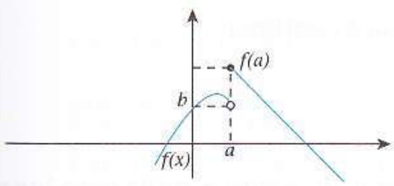
Descontinuidade não evitável.

- O $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$;



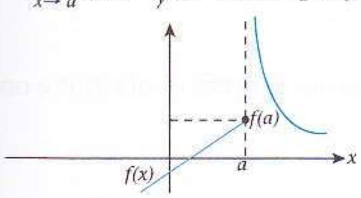
Descontinuidade evitável.

- Se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ diz-se que f é contínua à direita do ponto a;



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

- Se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ diz-se que f é contínua à esquerda do ponto a.



$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

5.2.2 Função contínua num intervalo

Definição 1

Uma função f diz-se contínua num intervalo $]a,b[$ do seu domínio, se e só se é contínua em todos os pontos desse intervalo.

Definição 2

Uma função f diz-se contínua num intervalo $[a,b]$ do seu domínio, se e só se verificar as seguintes condições:
- é contínua em $]a,b[$;
- é contínua à direita do ponto a;
- é contínua à esquerda do ponto b.

Propriedades e operações das funções contínuas

Se f e g são duas funções contínuas num ponto a do domínio $D_f \cap D_g$ então, nesse ponto, são contínuas as funções resultantes das seguintes operações.

- **Continuidade da soma**
  A soma (ou a diferença) de duas funções contínuas é uma função contínua:
  $f \pm g$

- **Continuidade do produto**
  O produto de duas funções contínuas é uma função contínua:
  $f \cdot g$

- **Continuidade do quociente**
  O quociente de duas funções contínuas é uma função contínua:
  $\frac{f}{g}$, com $g \neq 0$

- **Continuidade da potência**
  Toda a potência de expoente natural duma função contínua é contínua:
  $f(x) = (g(x))^n$, com $n \in \mathbb{N}$

- **Continuidade da raiz**
  Toda a raiz de índice natural de uma função contínua num dado ponto é ainda uma função contínua:
  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, com $n \in \mathbb{N}$

As propriedades enunciadas permitem verificar onde é que uma das funções é contínua e onde é descontínua. Deves, ainda, considerar dois factos evidentes:
- a função $y = x$ é contínua para todo $\mathbb{R}$;
- toda a função constante da forma $y = c$, onde c é um número real qualquer, é contínua.

Exemplos

1. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x \text{ se } x < 2 \\ \\ 2x - 1 \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$$

Vamos estudar a continuidade da função no seu domínio.

Primeiro, temos de encontrar o domínio de f.

$D_f =]-\infty;2[\cup [5;+\infty[$

$x \in]-\infty;2[\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$

$x \in [5;+\infty[\Rightarrow f(x) = 2x - 1$

Logo, a função f é contínua nos intervalos $x < 2$ e $x \geq 5$, por ser uma função polinominal.

Para $x = 5$, f não está definida à esquerda. Vamos, pois, averiguar o limite da função à esquerda:

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (2x - 1) = 9.$

Como $f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, podemos verificar que:

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = f(5)$, o que prova que f é contínua no ponto $x = 5$.

Concluímos que a função dada é contínua em todo o seu domínio.

2. Seja $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$. Vamos estudar a continuidade da função.

O domínio da função é: $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2; +2\}$.

Os pontos –2 e 2 anulam o denominador, por isso a função f é descontínua nestes pontos.

Seja $x = a$, um ponto qualquer diferente de –2 e 2.

Calculando o limite em $x = a$ temos:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{5x}{x^2 - 4} = \dfrac{5x}{a^2 - 4}$

Calculando o valor da função no ponto $x = a$ resulta:

$f(a) = \dfrac{5a}{a^2 - 4}$

Os dois cálculos permitem verificar que:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Logo, como a é um ponto qualquer do domínio de f, podemos concluir que $f(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 4}$ é uma função contínua em todo o seu domínio.

5.2.3 Limites infinitos

Os limites infinitos são limites em que $x \to \pm\infty$.

Seja a função em que o limite é do tipo $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

O procedimento do cálculo consiste no seguinte:

- Colocar em evidência a potência de x com maior expoente de $f(x)$ e de $g(x)$;
- Simplificar a fracção;
- Substituir x por $\pm\infty$ para obter o valor do limite.

Exemplos

1. Encontra os limites das seguintes funções:

1.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 1}$

Se substituirmos x por $+\infty$, teremos a indeterminação do tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Para levantar esta indeterminação, devemos colocar x^2 em evidência:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty}\right)}{\left(1 - \frac{8}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}\right)}$$

$$= 2$$

1.2 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{\sqrt{9x^4 + 2x - 5}}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3(-\infty) + 4(-\infty) + 2}{\sqrt{9(-\infty) - 2(-\infty) - 5}} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ é uma indeterminação.

Levantando a indeterminação:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(9 + \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^4}\right)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \cdot 3}{\sqrt{9x^4}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{3x^2}$$

$$= 1$$

Exercícios resolvidos

1. Estuda a continuidade da função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ 7 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Resolução

Para $x > 2$, a função é contínua, porque $x^2 - 1$ é contínua em $\mathbb{R}$ e para $x < 2$ também f é contínua, uma vez que se trata duma constante. Resta estudar a continuidade de f no ponto $x = 2$:

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2^2 - 1 = 3$ e $f(2) = 3$

Não existe limite $f(x)$ quando x tende para 2. Logo, a função f não é continua no ponto $x = 2$.

Como os limites laterais existem e não são iguais entre si, o ponto de descontinuidade é do primeiro tipo e há um salto da na abcissa $x = 2$.

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 3$, diz-se que no ponto de abcissa $x = 2$ a função é continua à direita de 2.

2. Determina k de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ k - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

seja contínua no ponto de abcissa $x = 1$.

Resolução

Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 1$ é necessário e suficiente a condição:

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (k - x) = k - 1 \end{array}\right\} \quad k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ condição necessária para que a função tenha limite no ponto $x = 1$.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$

Conclusão: a função é contínua no ponto $x = 1$.

Exercícios resolvidos

3. É dada a função f definida, em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x < 2 \\ \dfrac{x+3}{4} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

3.1 Estuda a sua continuidade.

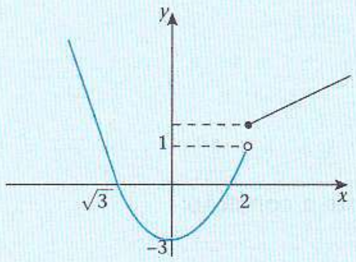
3.2 Confirma os resultados anteriores, desenhando o gráfico de f e indica o contradomínio.

Resolução

3.1
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 3) = 4 - 3 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{2+3}{4} = \dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \quad f(2) = \frac{5}{4}$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e ainda $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $f(x)$ não tem limite no ponto $x = 2$. Mas, como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{5}{4}$, então $f(x)$ é contínua apenas à direita de 2.

3.2 Graficamente:



4. Estuda e classifica os pontos de descontinuidade se existirem da função f e ilustra-a graficamente.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{se } x < -1 \\ -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3} & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ x - 6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolução

A função f é contínua nos intervalos $]-\infty; -1[\cup]-1; 2[\cup]2; +\infty[$. Resta confirmar nos pontos de abcissa $x = -1$ e $x = 2$.

Exercícios resolvidos

Para $x = -1$ temos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-2x - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(-\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad f(-1) = -\frac{4}{3}(-1) - \frac{1}{3} = 1$$

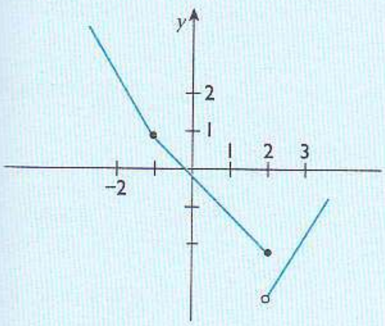
Como $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(2)$, então $f(x)$ é contínua no ponto $x = 1$.

Para $x = 2$ temos:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - 6) = 2 - 6 = -4 \end{array}\right\} \quad f(2) = -1$$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq f(2)$, $f(x)$ não tem limite no ponto $x = 2$.
Logo, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe e $x = 2$ é um ponto de descontinuidade do 1.º tipo.

Graficamente:



$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1, & \text{se } x > -1 \\ -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ x - 6, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

5. Estuda a continuidade da função $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ em $\mathbb{R}$.

Resolução

Domínio de $f(x)$ é $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

A função f é contínua em $\mathbb{R}$ excepto no ponto de abcissa $x = -2$, porque $f(-2)$ não é definido.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Vamos levantar a indeterminação:

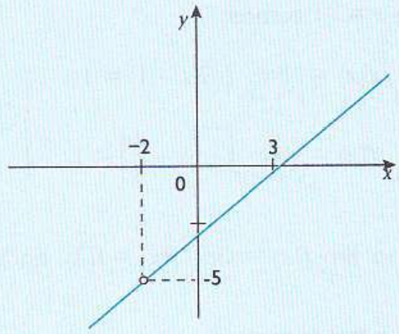
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x + 2} = -5$$

Como o limite existe e a função não é definida neste ponto, então o ponto de descontinuidade chama-se evitável ou eliminável.

Exercícios resolvidos

Graficamente:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x}, \text{ para } x \neq -2$$



6. Determina o valor do parâmetro k de modo que as funções abaixo sejam contínuas.

6.1 $f(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x > 2 \\ x^2 + 5 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

6.2 $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 + k & \text{se } x = 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

6.3 $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ k + 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

Resolução

6.1 $f(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x > 2 \\ x^2 + 5 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$

Condição:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 5) = f(2) = 2^2 + 5 = 9$

$\lim\limits_{x \to 2^+} (x - k) = 2 - k$

$\Rightarrow 2 - k = 9 \Leftrightarrow k = -7$

6.2 $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 + k & \text{se } x = 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Condição:

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 - 1) = 1 + k$

$2 - 1 = 1 + k$

$1 = 1 + k$

$k = 0$

Exercícios resolvidos

6.3 $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{se } x \neq -3 \\ k+1 & \text{se } x = -3 \end{cases}$

Condição:

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = f(-3)$

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \dfrac{0}{0}$ é uma indeterminação.

Vamos levantar a indeterminação:

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = -6$

$\Rightarrow k + 1 = -6 \Leftrightarrow k = -7$

7. Seja $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x < -1 \\ Ax + B & \text{se } x \in [-1; 1] \\ 5x + 7 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Encontra A e B tal que f seja uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (2x-2) = \lim\limits_{x \to -1^+} (Ax+B) \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (Ax+B) = \lim\limits_{x \to 1^+} (5x+7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B - A = -4 \\ B + A = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 8 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 4 \\ A = 12 - 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 8$ e $B = 4$

8. Determina o valor de $x \in \mathbb{R}^+$ se $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\alpha x - 2)^2 \cdot (x+1)^3}{x^5} = 36$.

Resolução

Como as constantes somadas a $+\infty$ dão sempre $+\infty$, vamos tomar apenas os termos em x de maior expoente.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\alpha x - 2)^2 \cdot (x+1)^3}{x^5} = 36$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\alpha x)^2 \cdot x^3}{x^5} = 36$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha^2 \cdot x^2 \cdot x^3}{x^5} = 36$

$\alpha^2 = 36$

$\alpha = \pm 6$

Exercícios resolvidos

9. Calcula os seguintes limites:

9.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$

9.2 $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1})$

Resolução

9.1 Substituindo x por $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\infty} - \sqrt{+\infty} = +\infty - \infty$

Levantando a indeterminação:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{+\infty}$$

$$= 0$$

9.2 Verificando a indeterminação:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{+\infty+1} - \sqrt{+\infty-1}) = +\infty - \infty$$

Levantando a indeterminação:

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-3x+1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x+2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= -\infty$$

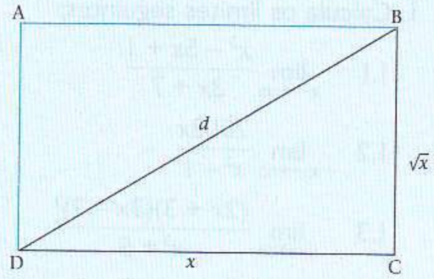
Porque o grau do polinómio do numerador é 1 e o do denominador é $\frac{1}{2}$.

Exercícios resolvidos

10. Considera o rectângulo [ABCD] de lados x e $\sqrt{x}$.

  10.1 Exprime a diagonal d em função de x.

  10.2 Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} [d(x) - x]$.



Resolução

10.1 Pelo teorema de Pitágoras temos:

$d^2 = (\sqrt{x})^2 + x^2 \Leftrightarrow d^2 = x + x^2$

$d = \sqrt{x^2 + x}$

10.2 $\lim\limits_{x \to +\infty} [d(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Resolução

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \|\infty - \infty\|$ é uma indeterminação

$$= \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Exercícios propostos

1. Calcula os limites seguintes:

1.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{3x + 7}$

1.2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2003x}{x^2 - 1}$

1.3 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x + 3)(3x - 2)^2}{x^3 + 5}$

1.4 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{x + \sqrt[3]{x}}$

1.5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{1 + x^4}}$

1.6 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + x + x}}{\sqrt{x}}$

2. Calcula os limites:

2.1 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

2.2 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

2.3 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 4x^2 + 3}$

2.4 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$

2.5 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

3. Calcula:

3.1 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

3.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2 - x}}{3x}$

3.3 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x + 6}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x + 7}}$

3.4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

3.5 $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

3.6 $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

3.7 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1} + -1}{\sqrt[3]{1 + x - 4}}$

Exercícios propostos

3.8 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(\sqrt{x^2+1}-x)$

3.9 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

3.10 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$

4. Calcula:

4.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

4.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

4.3 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$

4.4 $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}\dfrac{h}{x}$

4.5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)}$

4.6 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2}$

4.7 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$

4.8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x^2}$

4.9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

4.10 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} 1-2\cos\dfrac{x}{\pi}-3x$

4.11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$

4.12 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

4.13 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$

5. Determina o domínio das funções seguintes:

5.1 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

5.2 $g(x)=\log_x(x^2-7x+12)$

5.3 $h(x)=\log_2(|x|-3)$

5.4 $m(x)=\operatorname{tg}(3x+\pi)$

5.5 $t(x)=\dfrac{4-x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$

Exercícios propostos

6. Calcula:

6.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln \frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$

6.2 $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$

6.3 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)$

6.4 $\lim\limits_{x\to 0} \ln \frac{\cos x}{x^2}$

6.5 $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{\pi - x}$

7. Calcula os seguintes limites:

7.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$

7.2 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-x^2 + x - 1}{x^2 - 7x + 6}$

7.3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

7.4 $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{3x}{5} - 5$

7.5 $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2 - 4}$

7.6 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{5}}{x^2 - 5}$

8. Calcula os limites das seguintes funções irracionais:

8.1 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{\sqrt{x+6}}$

8.2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

8.3 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - x)$

8.4 $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

8.5 $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)$

8.6 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

8.7 $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$

Exercícios propostos

9. Considera a função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 7x - 12}{2x^2 - 5x - 3} & \text{se } x > 3 \\ -2 & \text{se } x = 3 \\ 2x - k & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

9.1 Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

9.2 Determina k de modo que exista $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

10. Determina k de modo que a função seguinte seja contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5k & \text{se } x < 2 \\ k^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

11. Verifica a continuidade da função:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x = 2 \\ |x + 2| & \text{se } x \neq 2 \end{cases}$$

12. Seja $f(x) = \begin{cases} |3 - kx| & \text{se } x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

12.1 Determina os zeros da função.

12.2 Determina k de modo que a função seja contínua em $x = 2$.

13. Dada a função $g(x) = \begin{cases} kx^2 - k^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 2kx^2 - 5x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Determina os valores de k para os quais a função é contínua.

14. Dada a função $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x & \text{se } 1 < x < 5 \\ \dfrac{5x - 1}{x - 6} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$

14.1 Qual é o domínio de f?

14.2 Prova que a função é contínua no ponto $x = 1$.

14.3 Mostra que a função não é contínua para $x = 5$ mas é contínua à direita de 5.

14.4 Quais os pontos de descontinuidade de f?

Exercícios propostos

15. Dada a função $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ |x| & \text{se } x > 2 \vee x \leq 1 \end{cases}$

15.1 Representa $g(x)$ graficamente.

15.2 Indica o domínio e contradomínio de g.

15.3 Indica os pontos de descontinuidade da função.

16. Calcula os limites:

16.1 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1)$

16.2 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

16.3 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 - 16x^2 + 16}{4x}$

16.4 $\lim\limits_{x \to 4} (\sqrt[4]{x^2} + \sqrt{x} - 1)$

16.5 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

16.6 $\lim\limits_{m \to 2} \dfrac{m^3 - 3m^2 + 2m}{m^2 - m - 6}$

16.7 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

16.8 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{1-x^2}\right)$

16.9 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 10\right)$

16.10 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$

17. Encontra o valor de cada um dos seguintes limites:

17.1 $\lim\limits_{x \to 0} 3\cos(3x) - 5\text{sen}(2x)$

17.2 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\text{sen}(1-2x)}{1-2x}$

17.3 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

17.4 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{tg}\, x - \text{tg}\, a}{x - a}$

17.5 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x+a) + \text{sen}(x-a)}{x}$

Exercícios propostos

17.6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

17.7 $\lim\limits_{x \to \pi} (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$

17.8 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos x - \cos a}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}$

18. Calcula os seguintes limites:

18.1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{4x}$

18.2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x} - x^2}{\sqrt{x}}$

18.3 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{21x + 1} - 3}$

18.4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - \sqrt{5x - 1}}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{3x - 2}}$

18.5 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{ax - a}}{x^2 - a\sqrt{ax}}$

18.6 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - \sqrt{x + 2}}$

18.7 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$

19. Verifica se as seguintes funções são contínuas em $\mathbb{R}$.

19.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^4 + 1}$

19.2 $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^3 - 7}$

19.3 $f(x) = \cos(3x)$

19.4 $f(x) = 1 - |\operatorname{sen} x|$

19.5 $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ se } x \leq 1 \\ 3 \text{ se } x > 1 \end{cases}$

19.6 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ se } x \neq 2 \\ 4 \text{ se } x = 2 \end{cases}$

Exercícios propostos

20. Determina o valor de k para que as seguintes funções sejam contínuas nos pontos indicados.

20.1 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $x = 0$

20.2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ k - 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$

20.3 $f(x) = \begin{cases} 2k - x^2 & \text{se } x \geq -2 \\ k^2 - 7 & \text{se } x < -2 \end{cases}$ em $x = -2$

21. Mostra, aplicando directamente a definição de continuidade e os teoremas sobre limites, que a função $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$ é contínua em todos os pontos diferentes de -3 e 3.

22. Determina os pontos em que é contínua e aqueles em que é descontínua a função $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

23. Representa graficamente a função $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2}|x - 2|$ e determina os pontos onde f é contínua.

24. A profundidade h, de um canal é dada como função de x (em metros), do seguinte modo:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & \text{se } 0 \leq x < 4 \\ 5 & \text{se } 4 < x < 10 \\ -x + 10 & \text{se } 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

24.1 Representa f graficamente.

24.2 Indica os pontos onde $h(x)$ é descontínua no intervalo $]1;12[$.

25. Dados as funções reais de variável real f e g tais que:

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$

Prova que:

25.1 f e g são funções descontínuas para $x = 1$;

25.2 $f + g$ é uma função contínua para $x = 1$.

Exercícios propostos

26. Sabendo que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Calcula a e b para que f represente uma função contínua.

27. Dada a função real de variável real:

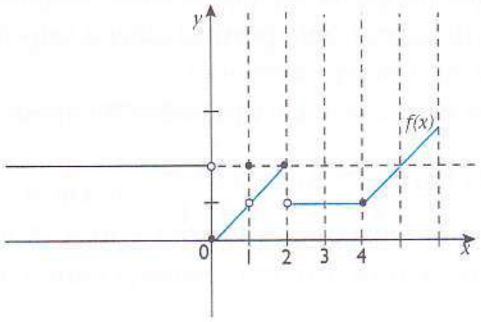
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \neq 3 \\ k + 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Calcula o valor de k para o qual f é contínua no ponto $x = 3$.

28. Determina m de tal modo que:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \leq -2 \\ 3 - mx^2 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

29. Observa a imagem geométrica da função f. Indica em qual dos pontos 0, 1, 2, 4 a função é contínua.



30. Considera a função real de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4k & \text{se } x = 3 \\ \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{-x^2 + 7x - 12} & \text{se } x \neq 3 \end{cases}$$

Calcula k de forma que f seja contínua em $x = 3$.

Unidade 6

Cálculo diferencial

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- interpretar o conceito de derivada como limite do coeficiente angular das secantes ao gráfico;
- interpretar física e geometricamente o conceito de derivada;
- utilizar o limite para calcular a derivada;
- utilizar a derivada para analisar a variação da função, incluindo os extremos;
- utilizar a derivada para analisar a concavidade da função, incluindo os pontos de inflexão;
- determinar a derivada da função inversa;
- fazer o estudo completo de uma função;
- resolver problemas concretos da vida usando a derivada.

6.1 Derivada

Vamos considerar que viajas num automóvel que circula na Avenida Eduardo Mondlane e, de repente, descobres que o velocímetro não está a funcionar. Será possível saber a velocidade do carro num dado momento baseado na indicação do conta-quilómetros?

Então, no instante $t = 10$ h, o conta-quilómetros marca 9476 km e passados 30 minutos marca 9514 km. Qual é a velocidade do automóvel?

Da física sabemos que $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Assim, $v_m = \frac{9514\text{ km} - 9476\text{ km}}{0{,}5\text{ h}} = \frac{3{,}8\text{ km}}{0{,}5\text{ h}} = 76\text{ km/h}$.

Se quiséssemos saber a velocidade instantânea do veículo no instante $t = 10$ h 15 minutos, teríamos de considerar intervalos de tempo Δt mais curtos. Isto é, a diferença entre t_0 e t_1 deve ser tão pequena quanto possível.

t_0 (h)	t_1 (h)	Δt (h)	x_0 (km)	x_1 (km)	Δx	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (km/h)
0,25	0,26	0,03	95	97	2	66,66
0,25	0,27	0,022	95	96,662	1,672	75,545
0,25	0,26	0,012	95	95,912	0,902	75,167
0,25	0,251	0,011	95	95,836	0,836	76
0,25	0,2501	0,01	95	95,76	0,76	76
0,25	0,25001	0,0001	95	95,075	0,0076	76

Observa que quando $\Delta t \to 0$ então $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \to 76$ km/h.

Isto é, a velocidade média aproxima-se cada vez mais de 76 km/h. Diz-se então que a velocidade instantânea do corpo no instante $t = \frac{1}{4}$ h é 76 km/h.

A velocidade média no intervalo de tempo Δt é a taxa de variação média (t.v.m.) da função $f(t)$ nesse intervalo. Isto é:

$$v_m = \text{t.v.m.} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Para ter a velocidade instantânea, é necessário considerar os intervalos Δt cada vez menores, ou seja fazer com que a diferença $t_1 - t_0$ seja muito pequena ($\Delta t \to 0$):

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea do corpo no instante t designa-se derivada e representa-se por $f'(t)$.

Definição da derivada

Seja f uma função de domínio D_f e x_0 um ponto do seu domínio. Chama-se derivada de f no ponto de abscissa x_0, ao limite (se existe) do quociente do seu acréscimo Δy pelo acréscimo Δx da variável independente quando Δx tende para zero. Isto é:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \\ x_1 - x_0 = \Delta x \Leftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x \\ \Delta y = f(x_1) - f(x_0) \Leftrightarrow \\ \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \end{array}\right\} \quad \boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Δx – é o acréscimo ou incremento da variável independente;

Δy – é o acréscimo ou incremento da função;

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – é a razão incremental;

$f'(x)$– exprime a forma como a função varia no instante x_0.

Existem outras formas de representação de derivadas:

- y'
- $\dfrac{df}{dx}$

Diz-se que uma função f é derivável no ponto x_0 do seu domínio se e só se possui derivada finita em x_0.

A derivada da função no ponto $x = a$ pode ser calculado assim:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Exemplo

1. Vamos calcular a derivada da função $f(x) = 2x^2 - x + 5$ no ponto $x = 1$.

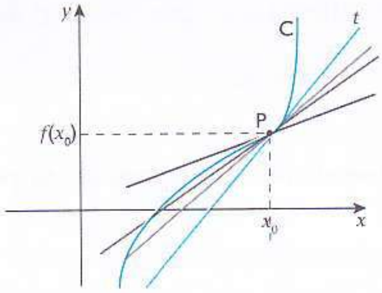
$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{(2x^2 - x + 5) - (2 \cdot 1 - 1 + 5)}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x + 5 - 2 + 1 - 5}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)(x + \frac{1}{2})}{x - 1} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Interpretação geométrica

Consideremos a curva C que representa parte do gráfico de uma função $y = f(x)$ e P um ponto dessa curva com coordenadas $(x_0, f(x_0))$.



- Considera um ponto $A\ (x, f(x))$ que se desloca livremente sobre a curva;
- A recta secante AP aproxima-se cada vez mais da tangente t quanto mais x se aproxima de x_0;
- O declive da recta tangente é a taxa de variação média no ponto $(x_0, f(x_0))$. Isto é:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O declive da recta tangente à curva no ponto $(x_0, f(x_0))$ é igual à derivada da função nesse ponto.

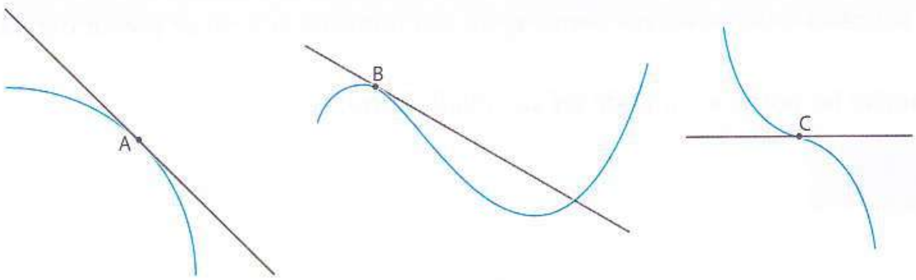
Equação da recta tangente

Já sabemos que $y = y_0 + m(x - x_0)$ é a equação da recta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem declive m.

Como $m = f'(x_0)$, podemos escrever que:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0 + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Alguns exemplos de rectas tangentes a pontos:



A tangente ao gráfico de uma função real de variável real num ponto pode intersectar o gráfico noutros pontos.

Exemplos

1. Vamos provar que a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 1$ no ponto (1,1) é $y = 2x - 1$.
   Como, por definição: $m = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1) - (1^2 - 1)}{x - 1}$.

   Então:
   $m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1 - (1^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$
   A equação da tangente é dada por:
   $y = 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2$
   $y = 2x - 1$

2. Vamos determinar a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3x^2 + 1$ no ponto $x = 2$.
   Vamos calcular o declive da recta no ponto $x = 2$:
   $$m = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 1) - (3 \cdot 2^2 + 1)}{x - 2}$$
   $$= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 + 1 - 13)}{x - 2}$$
   $$= \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 - 12)}{x - 2}$$
   $$= \lim_{x \to 2} \frac{3(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 3 \cdot 4 = 12$$
   Vamos determinar a equação da recta tangente:
   Para calcular $y = 0$ substitui-se na função x por 2.
   $y_0 = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$
   $y = y_0 + m(x - x_0)$
   $y = 13 + 12(x - 2)$
   $y = 12x - 11$

Derivadas laterais

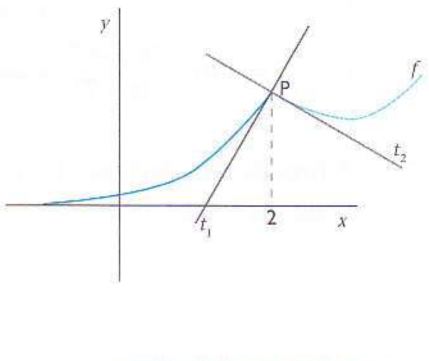
Observa o gráfico da função f. No ponto P, não é possível traçar uma única tangente ao gráfico da função f.

Vamos traçar duas tangentes no ponto P de diferentes declives, uma à esquerda e outra à direita de P.

Como a derivada num ponto é o declive da recta tangente, podemos concluir que no ponto P há duas derivadas diferentes, chamadas derivadas laterais.

A derivada lateral à esquerda de 2:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$



A derivada lateral à direita de 2:

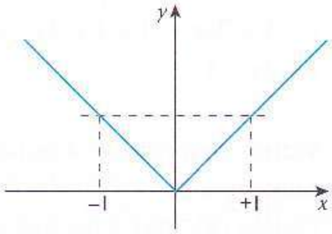
$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Uma função é derivável num ponto $x = a$ se e só se é derivável à esquerda e à direita do mesmo ponto e as derivadas laterais são iguais:

$f'(a^+) = f'(a^-)$

Exemplos

1. Consideremos a função $f(x) = |x|$.



Como sabemos $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Vamos calcular a derivada de $f(x)$ no ponto $x = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

A função não é derivável no ponto $x = 0$ porque neste ponto as derivadas laterais são diferentes.

2. Considera a função real de variável real assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, \text{ se } x < -2 \\ 2ax + 5 \text{ se } x \geq -2 \end{cases}$$

Vamos determinar o valor de a de modo que a função seja diferenciável para $x = -2$.

Primeiro, calcula-se as derivadas laterais:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(3x^2 - 1) - [3 \cdot (-2) - 1]}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{3x^2 - 1 - 11}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{3x^2 - 12}{x + 2} = -12$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \to -2^+} \frac{(2ax + 5) - (2a(-2) + 5)}{x + 2} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(2ax + 4a)}{x + 2}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2a\cancel{(x + 2)}}{\cancel{(x + 2)}} = 2a$$

A função tem derivada no ponto $x = -2$ se e só se $f'(-2^+) = f'(-2^-)$.

Logo, $2a = -12 \Leftrightarrow a = -6$.

6.1.1 Função derivada

Vamos determinar a derivada da função $f(x) = x^2 + 2$ no ponto $x = x_0$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + 2 - x_0^{\,2} - 2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^{\,2}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

A derivada de f em qualquer ponto x_0 do seu domínio é dada pela expressão $f'(x_0) = 2x_0$. f' denomina-se função derivada de f.

A função derivada da função f é a função que associa a cada ponto do domínio da função f o valor da sua derivada, e designa-se f'.

$$\left.\begin{array}{l} f\colon D_f \to \mathbb{R} \\ \quad x \curvearrowright f(x) \end{array}\right\} \text{ função } f$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\colon D'_f \to \mathbb{R} \\ \quad x \curvearrowright f'(x) \\ D'_f \in D_f \end{array}\right\} \text{ função derivada de } f$$

Calculando o valor da função derivada de cima em vários pontos:

$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$ $\qquad f'\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ $\qquad f'(-10) = 2 \cdot (-10) = -20$

Exemplos de funções derivadas de algumas funções:

Grafico da função f

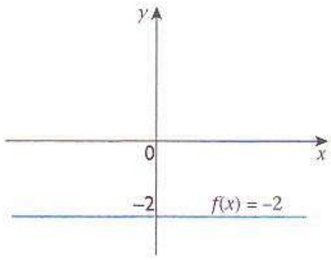


Grafico da função derivada f'

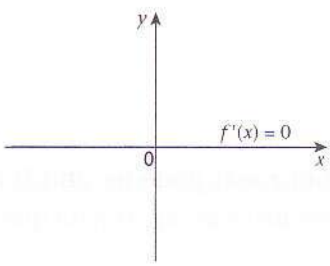
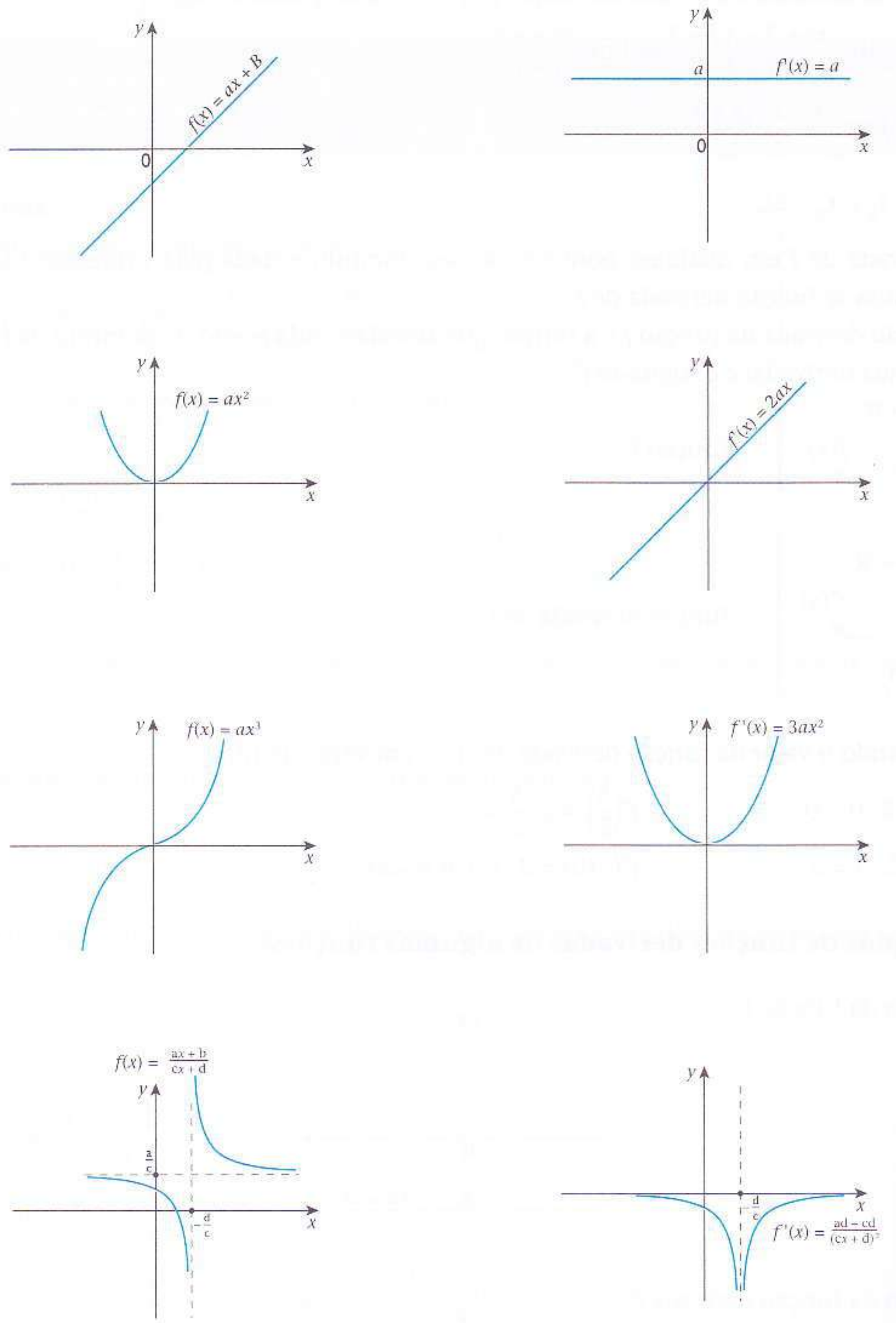


Grafico da função f | Grafico da função derivada f'



Regras de derivação

A derivada da função $f(x)$ no ponto $x = x_0$ pode ser obtida a partir da definição da derivada num ponto. No entanto, podemos estabelecer regras para que, com certa rapidez, se possa obter a derivada de uma função.

Derivada de uma função de primeiro grau

Sendo $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, por definição temos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{a\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$f'(x) = a$$

Logo:

$$\boxed{(ax + b)' = a}$$

A derivada de uma função de primeiro grau é igual ao declive da recta.

Função	Função derivada
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = b$	$f'(x) = 0$

Derivada da soma de funções

Sejam f e g duas funções deriváveis no ponto x.

Por definição:

$$\begin{aligned}(f + g)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}\end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

A derivada da soma é igual à soma das derivadas.

Derivada da diferença de duas funções

A demonstração é análoga à da soma:

$$\boxed{(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)}$$

A derivada da diferença é igual à diferença das derivadas.

Derivada do produto de funções

Sejam f e g duas funções deriváveis no ponto x.

$$(f \cdot g)\ (x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)\ (x + \Delta x) - (f \cdot g)(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$(f \cdot g)'\ (x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x + \Delta x) - f(x)] + f(x)\ [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$(f \cdot g)'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Logo:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

A derivada do produto é igual ao produto da derivada de f por g mais o produto de f pela derivada de g.

Caso particular: $(af)' = af'$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$

Derivada do quociente de duas funções

Sejam f e g duas funções deriváveis no ponto x tal que $g'(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x + \Delta x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x) \cdot f(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x) \cdot f(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x)g(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{g(x)\ [f(x + \Delta x) - f(x)] - f(x)\ [g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x)g(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{g(x)}\ [f(x + \Delta x) - f(x)]}{\cancel{g(x)} \cdot g(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{g(x + \Delta x) \cdot \Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)\ [g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x)g(x + \Delta x) \cdot \Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x + \Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g(x)} \cdot f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)\ g(x)} \cdot g'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\ .\ g'(x)}{g^2(x)}$$

Logo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \text{ com } g\ (x) \neq 0$$

Derivada da função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Por definição $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \ldots \cdot x}_{n \text{ vezes}}$

Segundo a regra de derivação do produto, a derivada deste produto será a soma dos n produtos que se obtêm multiplicando a derivada de cada *f*actor x pelos *f*actores restantes, que são em número $n - 1$. Isto é:

$(x^n)' = x^{n-1} \cdot x' + x^{n-1} \cdot x' + \ldots + x^{n-1} \cdot x'$

Em geral:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \cdot x'$$

Se $x' = 1$:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Exemplos

1. $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$
2. $(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$
3. $(2x^3 - 3x^2 + 5x)' = 6x^2 - 6x + 5$

Derivada de uma função composta

Seja $y = h(x)$ uma função composta de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, isto é $h(x) = f[g(x)]$ e suponhamos que $f(x)$ tem derivada finita num ponto x_0 e que $g(x)$ tem derivada finita no ponto correspondente $f(x_0)$. Vamos ver que também $h(x)$ admite derivada finita em x_0.

Seja $f(x_0) = \mu$ e $y_0 = g(\mu)$. Então, $y_0 = g[f(x_0)]$, ou seja $h(x_0) = g[f(x_0)]$.

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{\mu - \mu_0} \cdot \frac{\mu - \mu_0}{x - x_0} \text{ para } x \neq x_0$$

$\mu \to \mu_0$ quando $x \to x_0$, pois a função $\mu = g(x)$ é contínua em x_0 por possuir derivada finita em x_0.

Será, portanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{\mu - \mu_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mu - \mu_0}{x - x_0}$$

Isto é:

$h'(x_0) = f'(\mu_0) \cdot g'(x_0) \Leftrightarrow$

$$h'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$$

Exemplo

Seja $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Vamos derivar a função.

Fazendo $u = x^2 - 1$, teremos $y = \sqrt[3]{u}$.

Calculamos a derivada de y sabendo que $\sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}}$:

$$y' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\, u^{\frac{1}{3}-1} \cdot u' \qquad u = x^2 - 1$$

$$y' = \frac{1}{3}\, u^{\frac{-2}{3}} \cdot (2x - 0) \qquad u' = 2x - 0$$

$$y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

O conhecimento da derivada de uma função composta permite generalizar a derivada da potência de f:

$$(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'$$

Exemplo

1. Para $y = (3x^2 - 5x + 2)^3$, vamos determinar a derivada.
   $y' = 3(3x^2 - 5x + 2)^2\,(3x^2 - 5x + 2)'$
   $y' = 3(3x^2 - 5x + 2)^2\,(6x - 5)$
   $y' = (18x - 15)\,(3x^2 - 5x + 2)^2$

Derivada da função inversa

Sejam f e g duas funções tais que $g = f^{-1}$. para cada $x \in D_f$ tem-se que $f[g(x)](x) = x$. Apliquemos a regra da derivação da função composta:

$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

Pelos dados sabemos que $f[g(x)] = x$.

Por isso:

$f'[g(x)] \cdot g'(x) = x'$

$f'[g(x)] \cdot g'(x) = 1$

$g'(x) = \dfrac{1}{f'[g(x)]} \Leftrightarrow$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(x)}$$

A derivada de uma função inversa duma dada função f monótona e contínua é igual ao inverso da derivada da função dada num mesmo ponto.

Derivada de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$

Procuramos a derivada da função $y = \sqrt[n]{x}$, sendo n um número natural qualquer. Notemos que esta função é a função inversa da função $x = y^n$, $y \geq 0$. Como esta função é monótona e contínua, podemos aplicar a regra de derivação para a função inversa.

$$y'_x = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{ny^{n-1}} \Rightarrow (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Se $x' = 1$:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Chega-se à mesma conclusão, fazendo

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ Assim, $(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Exemplos

1. Se $f(x) = \sqrt{2x-5}$, $f'(x) = \dfrac{(2x-5)'}{2\sqrt{2x-5}}$ então:

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

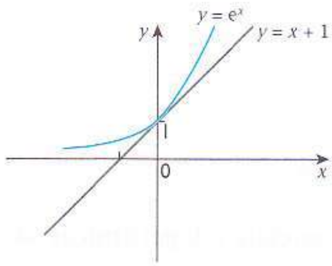
2. Se $\sqrt[3]{(2x-5)^2}$, $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot (2x-5)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2x-5)'$ então:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot (2x-5)^{-\frac{1}{3}}$$

Para a derivação de uma raiz, podes utilizar directamente a regra em cima ou passar a expoente fraccionário e utilizar a fórmula $(f^n)' = nf^{n-1} \cdot f'$.

Derivada da função exponencial e da função logarítmica

Consideremos os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = x + 1$ e representados num mesmo referencial:



Observando o gráfico da função $y = e^x$, vemos que existe uma tangente ao gráfico da função exponencial no ponto (0,1).

O declive da recta tangente no ponto de abcissa $x = 0$ é

$m = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Isto é:

$$m = f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} \Leftrightarrow m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Observa a tabela seguinte.

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
−0,5	1,297...
−0,25	1,003...
−0,0078	1,0004...
−0,001	1,000...
0,01	1,0000...
0,001	1,0000...

Atribuindo a x valores positivos ou negativos cada vez mais próximos de zero, verifica-se que o quociente $\frac{e^x - 1}{x}$ toma valores cada vez mais próximos de 1. Isto é:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Vamos deduzir a derivada da função exponencial de base e (número de Neper) para depois deduzirmos facilmente os resultados para uma base qualquer.

Seja $f(x) = e^x$.

Pela definição da derivada temos:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0}$$

Isto é: $f'(x_0) = e^{x_0}$

Em geral:

$$(e^x)' = x' \cdot e^x$$

Derivada da função $f(x) = \ln x$

Sabendo que as funções exponenciais e logarítmicas são inversas uma da outra, podemos utilizar a regra da derivada da função composta para obter a derivada da função $y = \ln x$:

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'}$$

$(\ln x)' = \frac{1}{e^y}$, porque $(e^y)' = e^y$

Isto é:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; porque $e^y = x$

Logo:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; com $x > 0$

Em geral:

$$(\ln x)' = \frac{x'}{x}; \text{ com } x > 0$$

Derivada da função $y = \log_a x$

Vamos mudar de base a para a base natural e:

$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow (\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'$

$(\log_a x)' = \dfrac{(\ln x)' \cdot \ln a - \ln x \cdot \ln a}{(\ln a)^2}$, pela derivada do quociente.

$(\log_a x)' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \ln a - 0}{(\ln a)^2}$, porque $\ln a$ é uma constante.

Isto é: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Logo:
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Em geral:

$$(\log_a x)' = \frac{x'}{x \ln a}$$

Derivada da função $f(x) = a^x$

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

Então:
$(a^x)' = \dfrac{1}{(\log_a y)'}$, porque são funções inversas.

$(a^x)' = \dfrac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a$, pela regra em cima.

$(a^x) = a^x \cdot \ln a$, porque $y = a^x$.
Logo:
$(a^x)' = a^x \ln a$, com $a > 0$

Em geral:

$$(a^x)' = x' \, a^x \ln a$$

Exemplos

1. Vamos determinar $f'(x)$ nos seguintes casos:

1.1 $y = x + \ln x$

$y' = 1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

1.2 $y = \log_3 x$

$y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$

1.3 $y = \dfrac{x}{\ln x}$

$$y' = \frac{\ln x - x\,\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

1.4 $y = x^2 \log_2 x$

$$y' = 2x \log_2 x + x^2\,\frac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{x}{\ln 2}$$

1.5 $y = (\ln x)^3$

$$y' = 3(\ln x)^2\,(\ln x)'$$

$$y' = 3(\ln x)^2\,\frac{1}{x} = \frac{3}{x}\,(\ln x)^2$$

Derivadas de funções trigonométricas

Aplicando a definição da derivada num ponto, vamos deduzir as fórmulas de derivação de funções seno, co-seno, tangente e co-tangente.

$(\text{sen } x)' = \cos x$

Demonstração

Seja $f(x) = \text{sen } x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\text{sen } (x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\text{sen } x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \text{sen } \Delta x \cdot \text{sen } x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\text{sen } x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \cdot \text{sen } \Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \text{sen } x \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}}_{0} + \cos x \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen } \Delta x}{\Delta x}}_{1}$$

$$f'(x) = \text{sen} x \cdot (0) + \cos x$$

$$f'(x) = \cos x$$

Isto é $(\text{sen } x)' = \cos x$

Recorda que:

- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$
- $\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cdot \cos x + \cos x \cdot \text{sen } y$

$(\cos x)' = -\text{sen } x$

Demonstração

Seja $f(x) = \cos x$.

$(\cos x)' = [\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)]' \cdot (-x)'$

$(\cos x)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Isto é, $(\cos x)' = -\text{sen } x$

Recorda que:

Se $x + y = 90°$ então, $\text{sen } x = \cos(90° - x)$ e $\cos x = \text{sen}(90° - x)$.

$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Demonstração

Seja $f(x) = \text{tg } x$.

$(\text{tg } x)' = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)'$

$(\text{tg } x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \text{sen } x}{\cos^2 x}$

$(\text{tg } x)' = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

ou $(\text{tg } x)' = 1 + \text{tg}^2 x$

Recorda que:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$(\text{cotg } x), = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$

Demonstração

Seja $f(x) = \text{cotg } x$.

$(\text{cotg } x)' = \left(\frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)'$

$(\text{cotg } x)' = \frac{-\text{sen } x \cdot \text{sen } x - \cos x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x}$

$(\text{cotg } x)' = \frac{-\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x}$

$(\text{cotg } x)' = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$

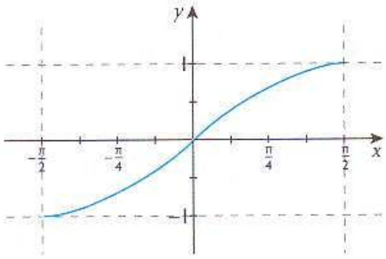
ou $(\text{cotg } x)' = -1 - \text{cotg}^2 x$

Funções trigonométricas inversas

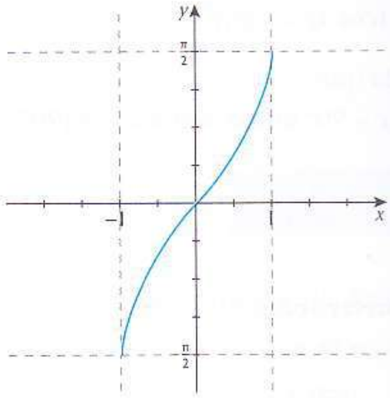
As funções trigonométricas são injectivas em certos intervalos. Nestes intervalos, as funções trigonométricas admitem uma função inversa. Isto é, para definir funções inversas de funções trignométricas é necessário limitar as funções trigonométricas a certos troços.

$y = \text{sen } x$

$x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

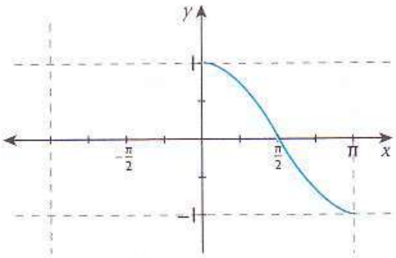


$y = \text{arcsen } x$

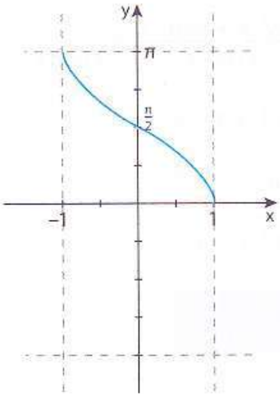


$y = \cos x$

$x \in [0, \pi]$

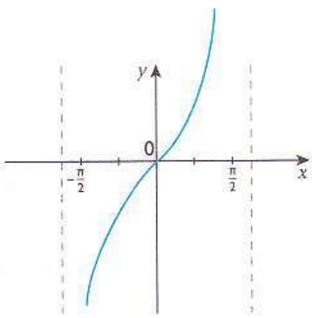


$y = \text{arccos } x$

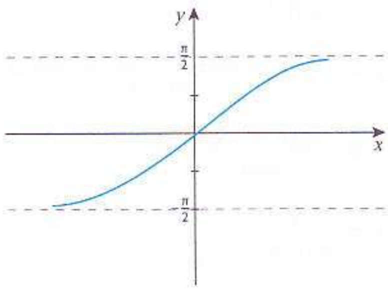


$y = \text{tg } x$

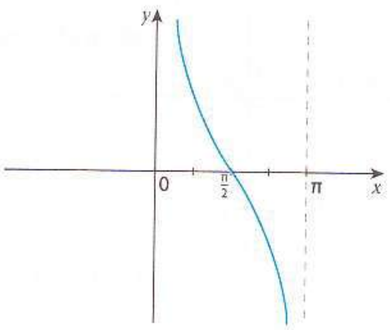
$x \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



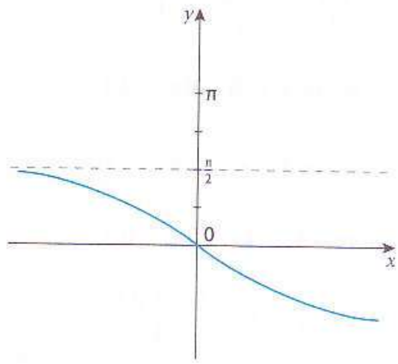
$y = \text{arctg } x$



$y = \text{cotg } x$
$x \in]0, \pi[$



$y = \text{arcctg } x; \; x \to \mathbb{R}$



Exemplos

1. Vamos calcular x, sabendo que:

1.1 $x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

O ângulo que tem coseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

1.2 $x = \arccos \frac{1}{2}$

O ângulo que tem coseno igual a $\frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

1.3 $x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

O ângulo cujo coseno é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ é $\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

1.4 $x = \arccos 0$

O ângulo que tem coseno igual a 0 é $\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

2. Vamos determinar x, se:

2.1 $\text{arcsen } \frac{1 - 2x}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1 - 2x}{2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$

2.2 $\text{arcsen } \frac{3 - 2x}{5} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{3 - 2x}{5} = \text{sen } \frac{\pi}{3}$

$\frac{3 - 2x}{5} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6 - 4x = 5\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 4x = 6 - 5\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$

2.3 $\text{arcsen}\,\dfrac{3-2x}{5} > \dfrac{\pi}{3}$

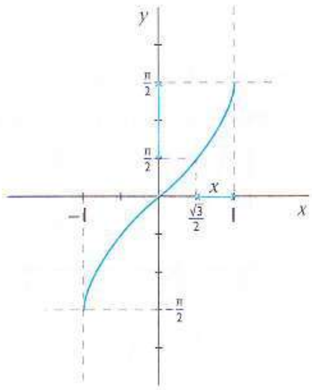
$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{3-2x}{5} < 1$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} < 6 - 4x < 10$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} - 6 < -4x < 10 - 6$$

$$\Leftrightarrow -4 < 4x < 6 - 5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < \frac{6 - 5\sqrt{3}}{4}$$



Derivadas de funções trigonométricas inversas

As derivadas de funções trigonométricas inversas obtêm-se a partir da fórmula $(f^{-1}(y))' = \dfrac{1}{f'(x)}$.

$$(\text{arcsen}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração

Seja $y = \text{arcsen}\,x$, com $|\,x\,| < 1$ e $x = \text{sen}\,y$ e $\dfrac{-\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.

De

$y_x' = \dfrac{1}{x_y'}$, temos

$$y_x' = \frac{1}{(\text{sen}\,y)} = \frac{1}{\cos y}$$

$$y_x' = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}}$$

Recorda que:

- $(\text{sen}\,y)' = \cos y$
- $\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y \Leftrightarrow$

$\cos y = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

Como $y \in [\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}]$, então $\cos y > 0$. Logo, $y_x' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}}$.

Substituindo sen y por x, teremos:

$$y_x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow (\text{arcsen}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\text{arccos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração

Já sabemos que se $x \in [0; 90°]$, então sen x = cos $(90° - x)$.

De igual modo, arccos $x = \frac{\pi}{2}$ – arcsen x.

Então, $(\text{arccos } x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arcsen } x\right)' \Leftrightarrow$

$(\text{arccos } x)' = 0 - (\text{arcsen } x)'$.

Como $(\text{arcsen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, então, $(\text{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Demonstração

Atendendo a que $y_x{}' = \frac{1}{x'_y}$, temos que:

$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{(\text{tg } y)'}$ Fazemos, $y = \text{arctg } x$

$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y}$ e ainda $x = \text{tg } y$

$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ou então $(\text{tg } y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y$

$$(\text{arcotg } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

Demonstração

Como $y = \text{arccotg } x$, então $x = \text{cotg } y$.

$$(\text{arccotg} x)' = \frac{1}{(\text{cotg } y)'}$$

$$(\text{arccotg} x)' = \frac{-1}{\frac{1}{\text{sen}^2 y}} = \frac{-1}{\frac{\text{sen}^2 y + \cos^2 y}{\text{sen}^2 y}}$$

$$(\text{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+\text{cotg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

Exemplos

1. Vamos encontrar as derivadas das seguintes funções:

1.1 $y = \text{arcsen } 5x$

$$y' = \frac{(5x)'}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

1.2 $y = \text{arctg } (4 - x)$

$$y' = \frac{-(4-x)'}{1+(4-x)^2} = \frac{1}{x^2 - 8x + 17}$$

1.3 $y = \text{arcsen}\,\sqrt{8-x}$

$$y' = \frac{(\sqrt{8-x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{8-x})^2}} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{8-x}}}{\sqrt{1-8+x}} = -\frac{1}{2\sqrt{8-x}\,\sqrt{x-7}}$$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{(8-x)(x-7)}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x^2+15x-56}}$$

1.4 $y = \text{arctg}\,(2x - x^2)$

$$y' = \frac{(2-2x)}{1+(2x-x^2)^2} = \frac{2-2x}{x^4-4x^3+4x^2+1}$$

1.5 $y = \text{arctg}\,\sqrt{x+4}$

$$y' = \frac{(\sqrt{x+4})'}{1+(\sqrt{x+4})^2} = \frac{1}{2(x+5)\sqrt{x+4}}$$

$$y' = \frac{1}{(2x+10)\,\sqrt{x+4}}$$

1.6 $y = \text{arctg}\,\sqrt{x^2+3}$

$$y' = \frac{x}{(x^2+4)\,\sqrt{x^2+3}}$$

Funções implícitas

Quando uma função é dada, por exemplo, na forma $y = 4x^2 + 2x - 5$, diz-se que está na forma explícita em função de x. Se é dada na forma $xy + 5y + 3 = 0$, diz-se que está na forma implícita.

Uma função definida explicitamente pode ser escrita na forma implícita mas o recíproco nem sempre é possível.

- $y = f(x) \Rightarrow$ forma explícita
- $y - f(x) = 0 \Rightarrow$ forma implícita

Exemplos

1. $yx - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$
2. $y^3 - yx^2 + x = 0$ não é possível escrever na forma explícita.

Derivada de uma função implícita

Dada uma equação com duas incógnitas x e y, podemos sempre escrevê-la sob a forma $f(x, y) = 0$, em que $f(x, y)$ indica uma função de duas variáveis x e y. Diz-se neste caso que a equação considerada define y como função implícita de x. No cálculo da derivada de uma função implícita necessitamos de indicar a variável em relação à qual se faz a diferenciação. $(x^2 - y^2)'_x$ significa que a diferenciação é feita em relação a x.

Exemplos

1. Vamos encontrar a derivada em relação a x das seguintes funções:

1.1 $x^2 - y^2 = 1$

$(x^2 - y^2)'_x = (1)'_x$

$(x^2)'_x - (y^2)'_x = 0$

$2x - 2yy_x' = 0$

$2yy_x' = 2x$

$y_x' = \frac{x}{y};\ y \neq 0$

1.2 $xy - 4 = 0$

$xy = 4$

$(xy)'_x = (4)'_x$

$x'y + xy'_x = 0$

$y + xy'_x = 0$

$y'_x = \frac{-y}{x};\ x \neq 0$

1.3 $y^2x + 3y = 1$

$(y^2x + 3y)'_x = 0$

$2yy'_x x + y^2 + 3y'_x = 0$

$(2yx + 3)y'_x = -y^2$

$y'_x = \frac{-y^2}{2yx + 3}$

2. Considera a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$.

2.1 Vamos verificar que os pontos $(-1, 1)$ e $(1, -1)$ pertencem à circunferência.

$$\left.\begin{array}{l} (-1, 1) \to (-1)^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \\ (1, -1) \to (1)^2 + (-1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \end{array}\right\} \text{Os pontos dados pertencem a circunferência.}$$

2.2 Vamos encontrar a derivada da função em ordem a x.

$x^2 + y^2 = 2 \to (x^2 + y^2)'_x = 2'_x$

$2x + 2yy'_x = 0$

$y'_x = \frac{-x}{y}$

2.3 Vamos escrever as equações das rectas tangentes nos pontos indicados.

No ponto $(-1, 1)$:

$y'_{(-1)} = -\frac{(-1)}{1} = 1$

$y = y_0 + f'(x - x_0)$

$y = 1 + (x + 1)$

$y = x + 2$

No ponto $(1, -1)$:

$y'_{(1)} = \frac{-1}{-1} = 1$

$y = y_0 + f'(x - x_0)$

$y = -1 + (x - 1)$

$y = x - 2$

3. Vamos considerar a função definida implicitamente por $xy = 2$.

3.1 Vamos apresentar a derivada da função em relação a x.

$$(xy)'_x = (2)'_x \Leftrightarrow y + xy'_x = 0 \Leftrightarrow y'_x = \frac{-y}{x}$$

3.2 Vamos indicar as coordenadas do ponto do gráfico em que a tangente é paralela à recta $y = -x + 1$.

$y = -x + 1 \Rightarrow y'_x = -1$

$-1 = \frac{-y}{x} \Leftrightarrow y = x$

No ponto (x_0, y_0):

$y_0 = x_0$

$x_0 y_0 = 2$

Como $y = x$:

$y_0^2 = 2$

$y_0 = \pm\sqrt{2}$

$x_0 = \pm\sqrt{2}$

Os pontos pedidos são $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

As regras de derivação estabelecidas permitem encontrar a derivada de uma função representada por uma expressão algébrica qualquer.

Exemplos

1. Vamos determinar a derivada de cada uma das seguintes funções:

1.1 $y = 2x^3 - 5x^2 + 8$

$y' = 2 \cdot 3x - 5 \cdot 2x + 0$

$y' = 6x^2 - 10x$

1.2 $y - \frac{x}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{x'\,(x^2 - 1) - (x^2 - 1)\,x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = \frac{-1 - x^2}{(x - 1)^2\,(x + 1)^2}$$

$$y' = \frac{1}{(x + 1)\,(x - 1)^2}$$

1.3 $y = (x^2 + x + 10)\,(x - 2)$

$y' = (x^2 + x + 10)\,(x - 2) + (x^2 + x + 10)\,(x - 2)'$

$y' = (2x + 1)\,(x - 2) + (x^2 + x + 10) \cdot 1$

$y' = 2x^2 - 4x + x - 2 + x^2 + x + 10$

$y' = 3x^2 - 2x + 8$

1.4 $y = \sqrt[5]{x^2}$

$y' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)'$

$y' = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{-3}{5}}$

$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

ou

$y' = \frac{(x^2)}{5\sqrt[5]{(x^2)^4}}$

$y' = \frac{2x}{5\sqrt[5]{x^8}} = \frac{2x}{5x\sqrt[5]{x^3}}$

$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

Tabela de derivadas de algumas funções elementares

Função	Função derivada
$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$, com $a > 0$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$, com $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$, com $x > 0$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arcotg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$
$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$

Derivadas de ordem superior

Seja $f(x)$ uma função derivável no ponto x_0. A derivada da função $f'(x)$ é uma função de argumento x. Ao incremento do argumento $\Delta x = x - x_0$ corresponde o incremento da função $f'(x)$ no ponto x_0.

Se existir, diz-se que a função $f(x)$ tem uma 2ª derivada no ponto x_0. A derivada de ordem dois da função $f(x)$ no ponto x_0 designa-se $f''(x_0)$ ou $\frac{d^2\,(x_0)}{d^2}$.

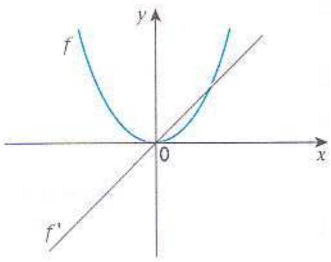
Analogamente se definem as derivadas da terceira, quarta, quinta ordem, etc. A derivada da n-ésima ordem da função $f(x)$ designa-se por $f^n\,(x)$ ou $\frac{d^n f}{d^n}$.

Exemplo

1. Seja $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 4$. Vamos calcular as derivadas até à quarta ordem.
   $f'(x) = 6x^2 + 4x - 1 \rightarrow$ 1.ª derivada de $f(x)$
   $f''(x) = 12x + 4 \rightarrow$ 2.ª derivada de $f(x)$
   $f'''\,(x) = 12 \rightarrow$ 3.ª derivada de $f(x)$
   $f^{IV}\,(x) = 0 \rightarrow$ 4.ª derivada de $f(x)$

Estudo da variação de uma função

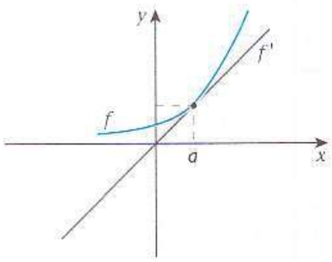
Observa o gráfico da função f e da sua função derivada f':



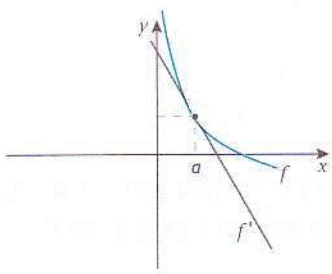
x	$]-\infty; 0[$	$]0; +\infty[$
f	↘	↗
f'	negativa	positiva

Conclusão

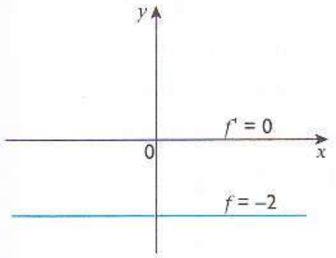
- Uma função é estritamente crescente num intervalo quando f' é positiva.
  Se $f' > 0$, então f cresce.



- Uma função é estritamente decrescente num intervalo quando f' é negativa.
  Se $f' < 0$, então f decresce.



- Se a derivada f' é nula em todos os pontos do intervalo, então f é constante nesse intervalo.



Exemplos

1. Dada a função $f(x) = 2x^2 - x - 1$:
   1.1 Vamos determinar f';
   1.2 Vamos estudar a monotonia da função.

1.1 $f'(x) = 4x - 1$

1.2 $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

	$x < \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$x > \frac{1}{4}$
f'	−	0	+
f	↘	$-\frac{9}{8}$	↗

Para encontrar $f\left(\frac{1}{4}\right)$ devemos substituir x por ¼ na função primitiva:

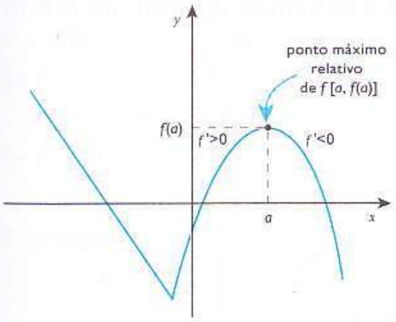
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1$$

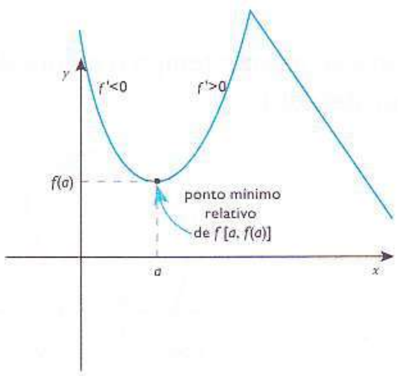
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1 - 2 - 8}{8} = -\frac{9}{8}$$

Extremos relativos da função

Observa os gráficos abaixo.





Sendo a um ponto de f, $f(a)$ diz-se que é um máximo relativo de f se e só se existe pelo menos, uma vizinhança de a tal que $f(x) \leq f(a)$, $\forall x$;

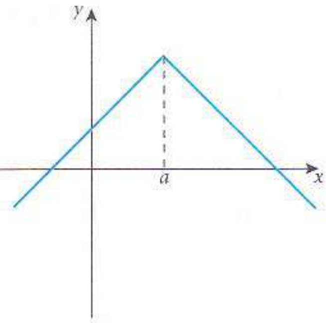
No ponto $x = a$, $f'(a) = 0$.

Sendo a ponto do domínio de f, $f(a)$ diz-se que é um mínimo relativo de f se e só se existe pelo menos uma vizinhança de a tal que $f(x) \geq f(a)$, $\forall x$;

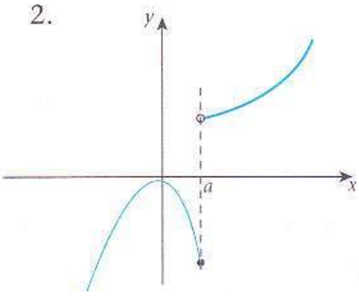
No ponto $x = a$, $f'(a) = 0$.

Exemplos

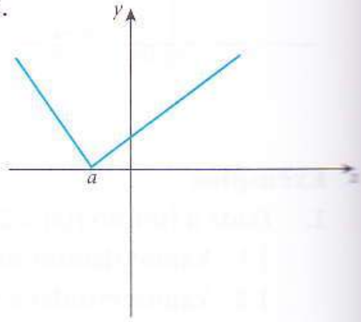
1.



2.

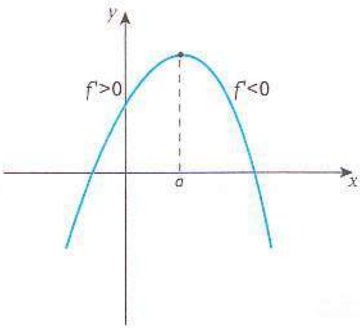


3.

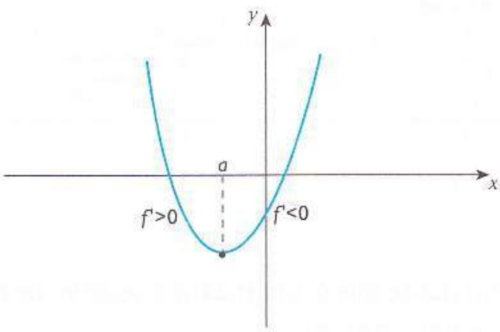


Analisando os gráficos 1., 2. e 3. podemos concluir que:

- Não basta que a derivada se anule num ponto a para que exista um extremo relativo. É necessário sim que ela mude de sinal;
- Pode existir um extremo num ponto a sem necessariamente haver derivada nesse ponto. Basta que as derivadas laterais sejam de sinais diferentes;



- Se um máximo relativo é ao mesmo tempo o maior valor do contradomínio da função, diz-se máximo absoluto;
- Se um mínimo relativo é ao mesmo tempo o menor de todos os valores do contradomínio da função, diz-se mínimo absoluto.



Exemplo

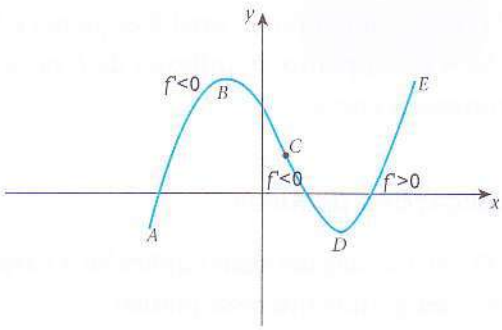
1. Considera a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.
   1.1 Vamos determinar $f'(x)$;
   1.2 Vamos indicar os intervalos de monotonia da função;
   1.3 Vamos indicar os extremos relativos da função.
   1.1 $f'(x) = x^2 - 2x$
   1.2 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$
   $x(x-2) = 0$
   $x = 0$ ou $x = 2$

	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	+	0	–	0	+
f	↗	1	↘	$\frac{-1}{3}$	↗

   Para $x \in]-\infty, 0[\cup]2; +\infty[$, a função cresce.
   Para $x \in]0; 2[$, a função decresce.
   1.3 O ponto (0, 1) é um máximo relativo.
   O ponto $\left(2, \frac{-1}{3}\right)$ é um mínimo relativo.

Sentido da concavidade e ponto de inflexão

Examinemos o gráfico de uma função $f(x)$.
Observa o seguinte :



- Entre os pontos A e B a derivada é positiva, mas vai diminuindo, até se anular no ponto B;
- Entre B e C a derivada é negativa mas cresce em valor absoluto;
- De C a E a derivada cresce continuamente mas é negativa entre C e D e positiva de D até E;
- O ponto C , em que a função muda o sentido de concavidade, chama-se ponto de inflexão.
- A derivada $f'(x)$ é crescente ou decrescente conforme a sua derivada $f''(x)$ é negativa ou negativa nesse intervalo.

Assim, em resumo, pode afirmar-se:
- o gráfico de uma função tem a concavidade virada para cima se a 2.ª derivada é positiva:
  Se $f'' > 0$ então f é côncavo para cima;
- o gráfico de uma função tem a concavidade virada para baixo se a 2.ª derivada é negativa:
  Se $f'' < 0$ então f é concavo para baixo.

Exemplo

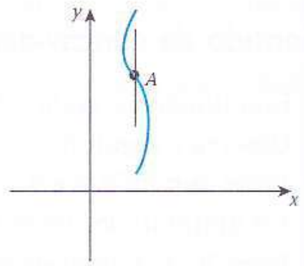
1. Seja $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$.
   A função derivada é $f'(x) = 4x - 5$.
   A 2ª derivada é $f''(x) = 4$.
   Visto que a 2ª derivada é sempre positiva, o gráfico da função é côncavo para cima.

Na 10ª classe aprendeste que o gráfico de uma função quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ é côncavo para cima ou para baixo, conforme se tem $a > 0$ ou $a < 0$.

Exemplo

1. Seja $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3$..
   A 1ª derivada é $f'(x) = 3x^2 + 12x$.
   A 2ª derivada é $f''(x) = 6x + 12$.
   O ponto de inflexão é dado por:
   $f''(x) = 0$; $6x + 12 = 0 \in x = -2$
   $f(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 3 = 19$.
   Logo: o ponto de inflexão é $(-2; 19)$.
   Para facilitar, vamos esquematizar o estudo num quadro em que os símbolos ∪ e ∩ indicam o sentido da concavidade:

x	$]-\infty; 2[$	-2	$]-2; \infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩	19	∪



É condição necessária e suficiente para que o ponto $(a; f(a))$ seja um ponto de inflexão que $f''(a) = 0$, mudando de sinal à esquerda e à direita de a.

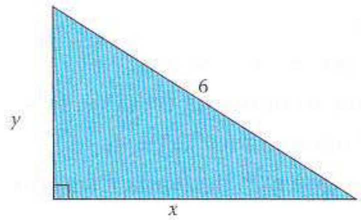
Se A é um ponto de inflexão de f, nesse ponto a recta tangente atravessa a curva.

Aplicações práticas

O cálculo das derivadas aplica-se a variadíssimas questões concretas de geometria, de física, etc. com grande interesse prático.

Exemplos

1. De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, vamos determinar os que tenham área máxima.
   Representando por x e y as medidas dos catetos do dito triângulo, a sua área será dada por:
   $A = \frac{xy}{2}$
   Mas, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:
   $x^2 + y^2 = 6^2$



   Vamos, pois, resolver o sistema:

$$\begin{cases} A = \frac{xy}{2} \\ x^2 + y^2 = 36 \end{cases}$$

   $x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$

   Logo: $A = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{36 - x^2}$

Calculando a 1.ª derivada em relação a x: $A' = \dfrac{18 - x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$

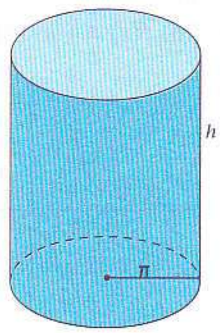
Anulando a 1.ª derivada: $18 - x^2 = 0 = x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Organizando a tabela para o estudo:

x	$0 < \sqrt{18}$	$\sqrt{18}$	$x > \sqrt{18}$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	$\sqrt{18}$	↘

$x_{máx} = \sqrt{18}$; $y_{max} = \sqrt{36 - x^2_{max}} = \sqrt{36 - (\sqrt{18})^2} = \sqrt{18}$. Os triângulos rectângulos de área máxima são os isósceles.

2. Pretende-se construir um reservatório cilíndrico, com um dado volume V, de modo que a sua área total seja máxima. Determina o raio da base, r, e a altura, h, do reservatório.
A área do cilindro é dada por: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.
O volume do cilindro é dado por: $V = \pi r^2 h$.
Pretendemos maximizar a área, por isso vamos isolar a altura na 2.ª equação: $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.



Vamos substituir h por $\dfrac{V}{\pi r^2}$ na 1ª equação:

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2}$

$A = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$

Calculando a 1.ª derivada em função de r, temos: $A' = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$.

Anulando a 1.ª derivada: $A' = 0$ se $4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0$

$2\pi r^3 - V = 0$

$2\pi r^3 = V \in r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

Organizando a tabela ($r > 0$):

	$0 < r < \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
A'	–	0	+
A	↘	2r	↗

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi 3\sqrt{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 \cdot r$$

Logo, $h = 2r$.

Isto é, para que o reservatório tenha a área máxima é necessário que a altura seja igual ao diâmetro do cilindro.

6.1.2 Determinação das assímptotas

Seja $f(x)$ uma função real de variável real e C uma curva representativa desta função no sistema coordenado de ordenadas.

Uma recta r diz-se assímptota da curva C representativa da função f se a distância de um ponto qualquer da curva C à recta tende para zero quando $x \to +\infty$ ou $x \to a$.

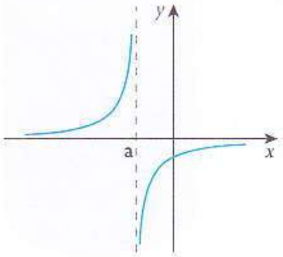
Assímptota vertical

A recta r de equação $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$, é uma assímptota vertical (AV) do gráfico da função $y = f(x)$ se e só se:

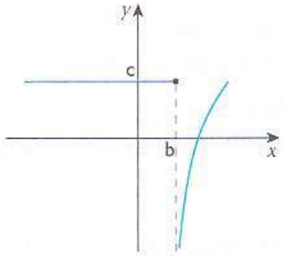
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

ou

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

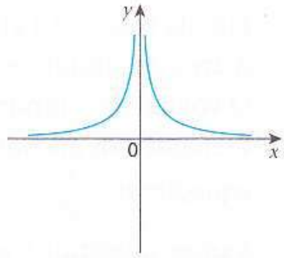


$x = a$ é uma AV



$\lim\limits_{x \to b^+} f = -\infty$

$x = b$ é uma AV



$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$x = 0$ é uma AV

Toda a função racional fraccionária, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, tem assímptota vertical $x = a$ se a for zero do denominador e não anular o numerador.

Exemplos

1. Vamos determinar as assímptotas verticais de cada uma das seguintes funções:

1.1 $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ é AV} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ é AV}$$

1.2 $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - x}$

Calculando os limites: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x-2)}{x\cancel{(x-1)}\,(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-2)}{x(x+1)} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-2)}{x(x+1)} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)}{x(x+1)} = +\infty$$

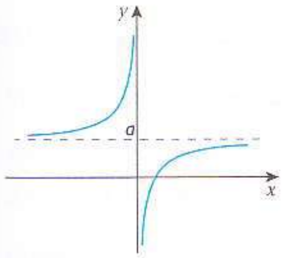
As assímptotas verticais são as rectas $x = 0$ e $x = 1$.

Assímptota horizontal

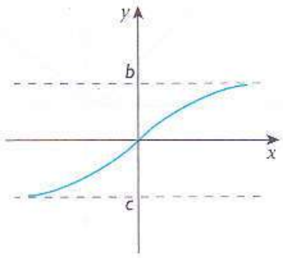
A recta de equação $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$, é uma assímpotota horizontal (AH) do gráfico da função $y = f(x)$ se:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

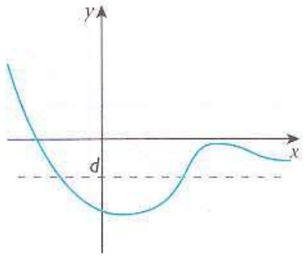
$y = a$ é uma AH



$y = b$ é uma AH
$y = c$ é uma AH



$y = d$ é uma AH



Exemplos

1. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 - x + 1}$

   $y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(2x^2 + 3x + 3)}{(x^2 - x + 1)} = 2$

   $y = 2$ é uma assímptota horizontal.

2. $y = \dfrac{x}{1 + |x|}$

   $$y = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - x} & \text{se } x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{1 + x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   $y = -1$ e $y = 1$ são assímptotas horizontais.

3. $y = \dfrac{-3x^2 + x + 1}{x^2 + 5}$

   $y = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3$

   $y = -3$ é uma assímptota horizontal.

Assímptotas oblíquas

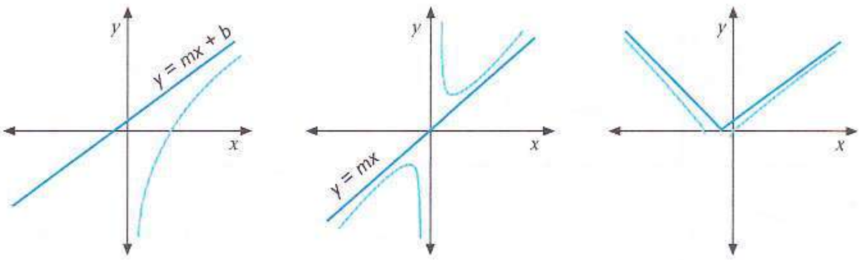
A recta r oblíqua, que tem por equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, é assímptota da curva C representativa da função f quando:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

Na recta $y = mx + b$, m é o coeficiente angular (ou declive) da recta e b é a ordenada na origem.

$$\underbrace{\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \end{cases}}_{} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \end{cases}}_{}$$

assímptota oblíqua à direita   assímptota oblíqua à esquerda



Nota: Só há assímptotas oblíquas nas funções cujo domínio é um conjunto ilimitado.

Exemplos

1. Vamos definir analiticamente as assímptotas oblíquas de cada uma das funções seguintes.

1.1 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + x}{x} = 2$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [x + \sqrt{x^2 + 4} - 2x]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - x)(\sqrt{x^2 + 4} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4} + x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 4 - \cancel{x^2}}{x + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{2x}$$

$$= 0$$

$y = 2x$ é assímptota oblíqua da função f.

1.2 $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 2x} = 0$$

O gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$ não tem assímptota oblíqua.

$y = 1$ é uma assímptota horizontal.

1.3 $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x + 1} - 1 - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x + 1} = -1$$

$y = x - 1$ é assímptota oblíqua da função f.

Estudo completo de uma função

Vamos fazer o estudo completo da função $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

- Domínio da função: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; D_f: $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- Zeros da função: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Ordenada na origem: $f(0) = \dfrac{0 - 2}{0 + 1} \Rightarrow f(0) = -2$
- Equações das assímptotas:

Assímptota vertical

$$x = \lim_{x \to -1^-} \frac{x - 2}{x + 1} = +\infty$$

$$x = \lim_{x \to -1^+} \frac{x - 2}{x + 1} = -\infty$$

Assímptota vertical: $x = -1$

Assímptota horizontal

$$y = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x + 1} = 1$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2}{x + 1} = 1$$

Assímptota horizontal: $y = 1$

- Paridade:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$f(-x) = \frac{-x - 2}{-x + 1} = \frac{x + 2}{x - 1}$$

Logo, a $f(x)$ não é par e nem ímpar.

- Intervalos de monotonia:

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}; \; f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$$

O numerador é positivo e também o é o denominador. Por esta, razão $f'(x) > 0$, qualquer que seja x. Logo, a função é sempre crescente no seu domínio.

- Sentido da concavidade:

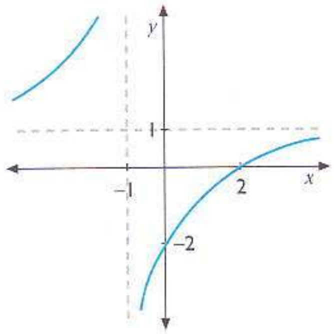
$$f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$x < -1$	-1	$x > -1$
$f''(x)$	+		–
$f(x)$	$\cup$	–3	$\cap$

Esboço gráfico:



- Contradomínio: $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
- não tem extremos relativos
- injectividade: a função é injectiva

Exemplos

1. Dada a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$:

   1.1 Vamos calcular os zeros da função.

   $f(x) = 0;\ x\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 0$

   $x = 0 \vee \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0$

   $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}.$

   1.2 Vamos determinar os intervalos de monotonia e os extremos relativos (se existirem).

   $f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	$-\frac{2}{3}$	↗

   Para $x < -1 \vee x > 1$ a função cresce;
   Para $-1 < x < 1$ a função decresce;

   O ponto $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ é um máximo relativo;

   O ponto $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ é um mínimo relativo.

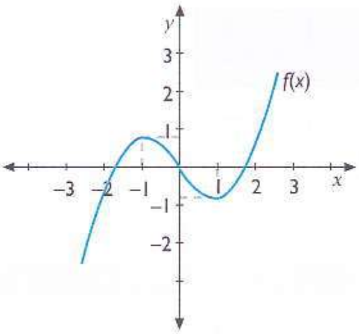
1.3 Vamos determinar o sentido da concavidade e os pontos de inflexão (caso existam).

$f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f''(x) = 2x;\ f'''(x) = 0$, se $x = 0$.

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	0	$\cup$

Ponto de inflexão (0,0);
Para $x < 0$ f é côncavo para baixo;
Para $x > 0$ f é côncavo para cima.

1.4 Vamos fazer o esboço gráfico.



2. Vamos fazer o estudo completo das seguintes funções.

2.1 $f(x) = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

Domínio: $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$

Assímptota vertical: $x = 3$ e $x = -3$

Assímptota horizontal: $y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{9 - x^2} = -1$

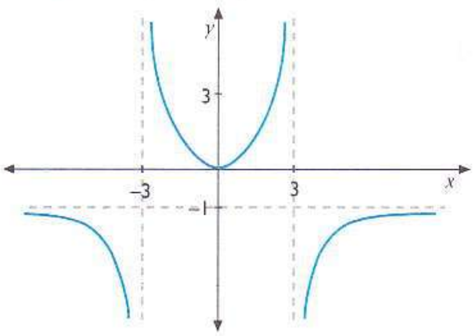
Derivada: $f'(x) = \dfrac{18x}{(9 - x^2)^2}$

$18x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$x < 0$	0	$x > 0$
$f'(x)$	–		+
$f(x)$	↘	0	↗

min(0;0)

Esboço gráfico:



Contradomínio: $y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Paridade: f é par

Injectividade: f é não injectiva e não sobrejectiva

2.2 $f(x) = x^3 - 4x^2$

Zeros: $x^2\,(x-4) = 0$

$x = 0 \vee x = 4$

Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 8x$

$x(3x - 8) = 0$

$x = 0\ ;\ 3x - 8 = 0$

$x = \frac{8}{3}$

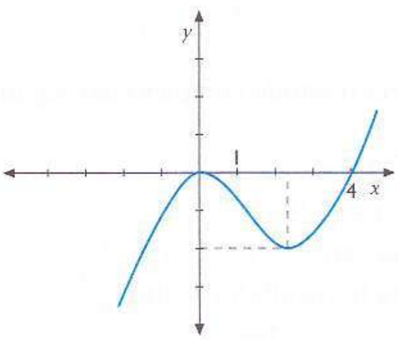
x	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$x > \frac{8}{3}$
$f'(x)$	+		–		+
$f(x)$	↗	0	↘	$\frac{-64}{9}$	↗

Concavidade:

$f''(x) = 6x - 8$

$f''(x) = 0;\ 6x - 8 = 0 \in x = \frac{4}{3}$

x	$x < \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$x > \frac{4}{3}$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	$-\frac{92}{27}$	$\cup$



Domínio: $x \in \mathbb{R}$

Contradomínio: $y \in \mathbb{R}$

3. Consideremos agora a função $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$. Vamos:
   3.1 Determinar os zeros da função;
   3.2 Determinar os extremos relativos de f;
   3.3 Determinar a concavidade e os pontos de inflexão;
   3.4 Esboçar o gráfico da função;
   3.5 Indicar o contradomínio da função.

3.1 $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x^4 + 6x^2 - 4 = 0$ (é uma equação biquadrática)

Seja $x^2 = y$. Então:

$-y^2 + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$y^2 - 6y + 4 = 0$

$y = \frac{6 - \sqrt{20}}{2} \vee y = \frac{6 + \sqrt{20}}{2}$

$y = 3 - \sqrt{5}$ ou $3 + \sqrt{5}$

$\Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{3 - \sqrt{5}} \vee x = \pm\sqrt{3 + \sqrt{5}}$

$x = \pm 0{,}5 \vee x = \pm 2{,}6$

Ordenada na origem:

$f(0) = -4$

3.2 $f'(x) = -4x^3 + 12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$

x	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f'(x)$	+		−		+		
$f(x)$	↗	5	↘	−4	↗	5	↘

3.3 Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x) = -12x^2 + 12$

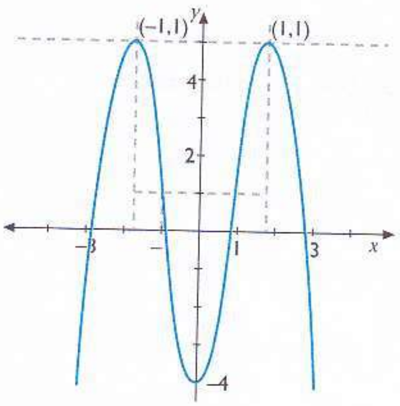
$f''(x) = 0$

$-12x^2 + 12 = 0$

$x = -1 \vee x = 1$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x)$	−		+		−
$f''(x)$	∩	I	∪	I	∩

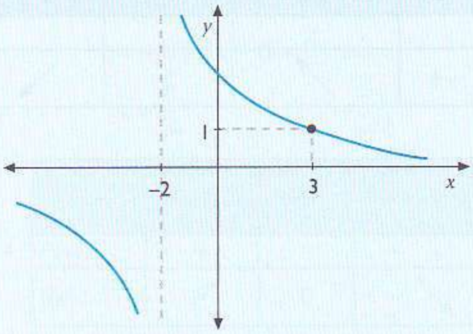
3.4 Esboço gráfico:



3.5 Contradomínio: $y \in]-\infty; 5]$

Exercícios resolvidos

1. Observa a figura.



Determina b, c e d de tal modo que $f(x) = \dfrac{5(x+b)}{(x-c)(x+d)}$ seja a função cujo gráfico é a figura dada.

Resolução:

-2 e 3 não pertencem ao domínio de f. Então, pode ser que $c = 3$ e $d = -2$.

Da análise da figura resulta que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$.

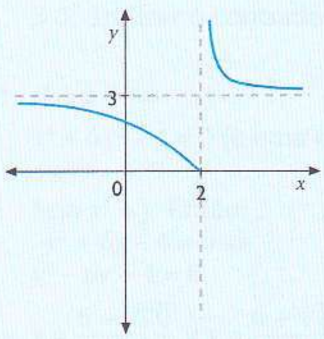
Ora, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5(x+b)}{(x-3)(x+2)}$ só pode ser finito se $b = -3$.

Pois neste caso, o limite leva-nos a uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Deste modo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{5(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{5}{x+2} = 1$$

Logo, $b = -3$, $c = 3$ e $d = -2$.

2. Observa a figura.



2.1 Completa o seguinte: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3]$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

2.2 Escreve as equações das assímptotas do gráfico de f.

2.3 Indica o domínio e o contradomínio de f.

Exercícios resolvidos

Resolução:

Observando o gráfico podemos notar que:

2.1 $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - 3] = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) - 3 = +\infty$;

2.2 AV: $x = 2$ AH: $y = 3$

2.3 Domínio: $x \in \mathbb{R}$, Contradomínio : $y \in [0\ ,\ +\infty]$

3. Define analiticamente as assímptotas oblíquas de cada uma das funções seguintes:

3.1 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{x^2}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

3.2 $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Resolução:

3.1 $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x - x^2} = -1$

$b = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2}{1-x} + x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$

$y = -x - 1$ é assímptota oblíqua à esquerda.

$m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$

$y = x + 1$ é assímptota oblíqua à direita.

3.2 $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} - \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + x - x^2}{x + x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \dfrac{1}{2}$

$y = x + \dfrac{1}{2}$ é assímptota oblíqua à direita.

Exercícios resolvidos

4. Define analiticamente as assímptotas verticais dos gráficos das seguintes funções:

4.1 $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$

4.2 $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}$

4.3 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 10x + 3}$

Resolução:

4.1 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ x = 1 \text{ é assímptota vertical de } f \end{cases}$

4.2 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ x = -2 \text{ é assímptota vertical de } f \end{cases}$

4.3 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}; \pm 3\}$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{2\cancel{(x-3)}\left(x + \frac{1}{2}\right)}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)\cancel{(x-3)}} = \frac{7}{8}$$

$x = 3$ não é assímptota vertical de f porque o limite não dá infinito quando x tende para 3.

5. Encontra y' no ponto (2, 1) se $(x + y)^3 = 27(x - y)$.

Resolução:

$3(x + y)^2(1 + y') = 27(1 - y')$ usando a propriedade distributiva da multiplicação

$3(x + y)^2 + 3y'(x + y)^2 + 27y' = 27$ usando a propriedade associativa e distributiva da multiplicação

$y'(3(x + y)^2 + 27) = 27 - 3(x + y)^2$

$y' = \dfrac{27 - 3(x+y)^2}{3(x+y)^2 + 27}$

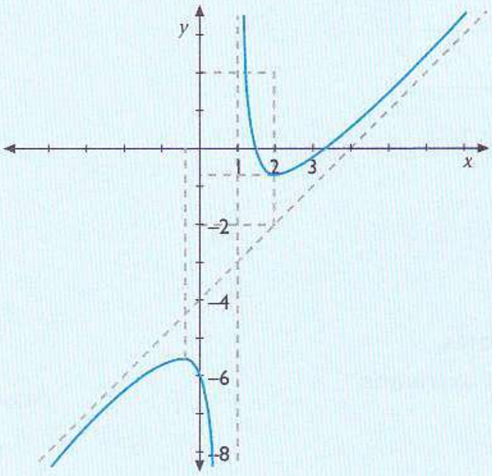
Substituindo na derivada x por 2 e y por 1: $\dfrac{27 - 27}{27 + 27} = 0$

$y' = 0$

Exercícios resolvidos

6. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$:

6.1 Calcula os zeros da função e a ordenada na origem.
6.2 Indica o domínio de f.
6.3 Determina as equações das assímptotas.
6.4 Estuda a variação da função.
6.5 Esboça o gráfico de f.



Resolução:

6.1 Zeros: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$
Ordenada na origem: $f(0) = -6$

6.2 D_f: $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

6.3 AH: $y = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ i.e. não há assímptotas horizontais.

AV: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} = +\infty$. Logo, $x = 1$ é AV.

AO: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x} = 1$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} - x\right)$

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6 - x^2 + x}{x - 1} = -4$

Logo, $y = x - 4$ é assímptota oblíqua.

Exercícios resolvidos

6.4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{(2x-5)(x-1) - x^2 + 5x + 6}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5 - x^2 + 5x - 6}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$f(x) = 0$ se e só se: $x_1 = 1 - \sqrt{2} \vee x_2 = 1 + \sqrt{2}$

x		x_1		x_2
f'	+		−	+
f	↗		↘	↗

máx $(1 - \sqrt{2}; -5{,}8)$; mín $(1 + \sqrt{2}; -0{,}2)$

7. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$:

7.1 Encontra o domínio da função.

7.2 A função dada é par ou ímpar?

7.3 Determina as equações das assímptotas.

7.4 Estuda a monotomia e determina os extremos.

Resolução:

7.1 D_f: $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

7.2 $f(x)$ é ímpar, porque $f(-x) = -f(x)$

7.3 AH: não tem.

AV: $x = 0$

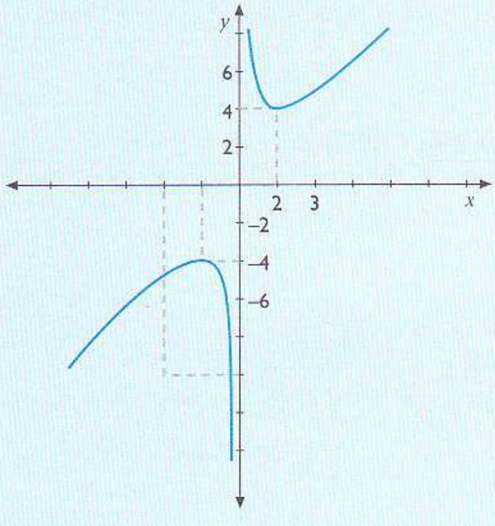
AO: $y = x$

7.4 Para $x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ f cresce

Para $x \in]-2; 2[$ f decresce

máx$(-2, -4)$; mín $(2, 4)$

7.5 Esboça o gráfico de f.



Exercícios resolvidos

8. Considera a função $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

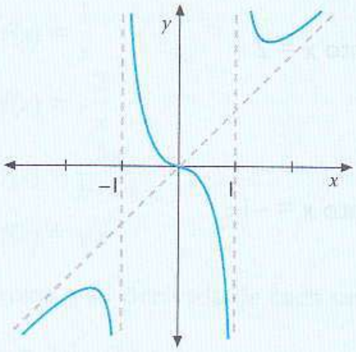
8.1 Encontra o domínio de f.

8.2 Estuda a paridade de f.

8.3 Escreve as equações das assímptotas.

8.4 Estuda a variação da função e encontra os extremos relativos.

8.5 Esboça o gráfico de f.



Resolução:

8.1 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$

8.2 $f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$.

Logo, $f(x)$ é ímpar, pelo que o gráfico é simétrico em relação à origem das coordenadas.

8.3 Assímptotas verticais: $x = 1$ e $x = -1$

Assímptota horizontal: não tem

Assímptota oblíqua: $y = x$

Para $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$ f cresce

Para $-\sqrt{3} < x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee 1 < x < \sqrt{3}$ f decresce

máx $\left(-\sqrt{3}, \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

mín $\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercícios propostos

1. Calcula, aplicando a definição de derivada de uma função num ponto:

1.1 $f(x) = \frac{2}{x}$, no ponto $x = 3$

1.2 $g(x) = 2x^2 - 4$, no ponto $x = -2$

1.3 $h(x) = \sqrt{x - 1}$, no ponto $x = 5$

1.4 $m(x) = \frac{x - 3}{x + 3}$, no ponto $x = 1$

2. Calcula, nos pontos indicados, os derivados laterais de cada função.

2.1 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 & \text{se } x > 2 \\ x^2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$

2.2 $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{se } x < -1 \\ -2x + 7 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$ no ponto $x = -1$

2.3 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

2.4 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 + 1} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 2x + 5 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

3. Representa graficamente a função derivada das funções:

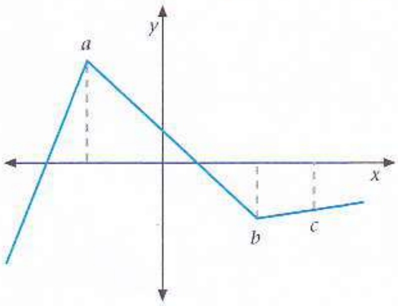
3.1 $f(x) = 4x^3 - 3x$

3.2 $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

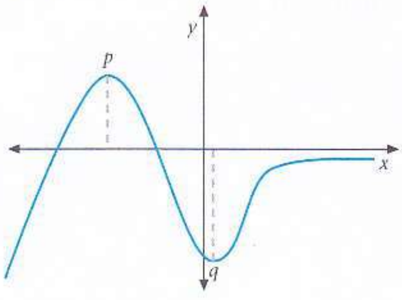
3.3 $f(x) = x^2 - x + 5$

4. Indica os pontos onde a função não é derivável ou que é nula.

4.1



4.2



Exercícios propostos

5. Usa a tabela de derivadas para determinar as expressões que definem as funções derivadas de:

5.1 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 4$

5.2 $f(x) = (2x + 1)^5$

5.3 $f(x) = x^4 - \frac{x^2}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{5}$

5.4 $f(x) = \frac{1}{x}$

5.5 $f(x) = -\frac{2}{x}$

5.6 $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$

5.7 $f(x) = \sqrt{x}$

5.8 $f(x) = \left(\frac{2x + 3}{x - 1}\right)^3$

5.9 $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 1}{3}$

5.10 $f(x) = (x - 1)^3$

5.11 $f(x) = (2x - 1)^3$

5.12 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2}$

5.13 $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 1)(x^2 - 1)$

6. Determina a 2.ª derivada de cada uma das seguintes funções:

6.1 $y = 3x^2 - 2x + 1$

6.2 $y = \frac{x}{x + 1}$

6.3 $y = x^3 - 2x^2 + 1$

6.4 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

6.5 $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2 - 7x + 1$

6.6 $y = (5x + 1)^6$

6.7 $y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

6.8 $y = x^4 - \frac{x^3}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{5}$

6.9 $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$

6.10 $y = (3x - 1)^5$

6.11 $y = \sqrt{x}$

7. Determina a expressão da 1.ª derivada de cada uma das seguintes funções:

7.1 $y = \text{sen}\,(3x)$

7.2 $y = \cos\,(2x)$

7.3 $y = \text{sen}^2\,(3x)$

7.4 $y = \text{tg}\,(-3x)$

7.5 $y = 4\,\text{sen}\,(2x - 5)$

7.6 $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

7.7 $y = \text{tg}\,\frac{1}{x}$

7.8 $y = \cos x^2$

7.9 $y = \frac{5\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

7.10 $y = \frac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$

7.11 $y = 2t\,\text{sen}\,t - (t^2 - 2)\cos t$

8. Calcula as derivadas das seguintes funções:

8.1 $y = 5^x$

8.2 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

8.3 $y = 2^{3x}$

8.4 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}$

8.5 $y = e^{x^2 + 8x + 7}$

8.6 $y = e^{\sqrt{x}}$

Exercícios propostos

8.7 $y = 2^{3x+1}$

8.8 $y = \ln(x - 1)$

8.9 $y = \ln\sqrt{x}$

8.10 $y = \log_3(x^3 - 1)$

8.11 $y = \log_2(3x + 5)$

8.12 $y = \log_3(x^3 + 1)$

9. Determina a equação da recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa x_0:

9.1 $y = -x^2 + 3x - 4, \quad x_0 = 0$

9.2 $y = \frac{1-x}{x}, \quad x_0 = 1$

9.3 $y = \text{sen}(2x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

9.4 $y = \frac{x-1}{x+2}, \quad x_0 = 0$

9.5 $y = x^2 - 4x, \quad x_0 = 0$

9.6 $y = \text{sen}\, x, \quad x_0 = 0$

9.7 $y = \text{tg}\, x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

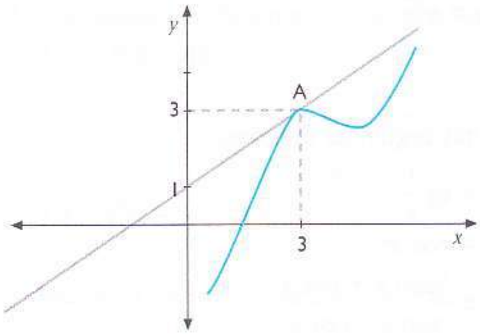
9.8 $y = \frac{8x}{x^2+1}, \quad x_0 = 0$

9.9 $y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad x_0 = 1$

10. Escreve a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x$, paralela à recta $y = 6 - 3x$.

11. Calcula o valor de $m \in \mathbb{R}$ de tal modo que a recta $y = 7x + m$ seja tangente à curva $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

12. A recta t é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abcissa 3. A derivada de f no ponto 2 é:



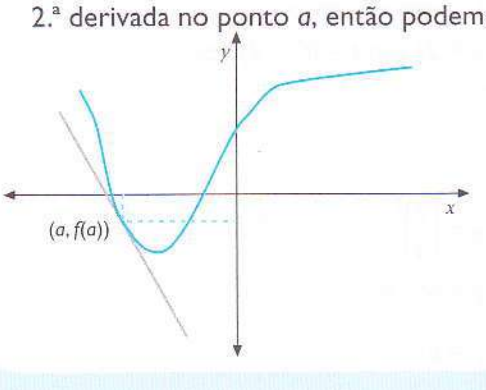
(A): $\frac{3}{2}$

(B): 1

(C): $\frac{2}{3}$

(D): $-\frac{2}{3}$

13. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Sabendo que f admite a 1.ª e a 2.ª derivada no ponto a, então podemos concluir que:



(A): $f'(a) \cdot f''(a) < 0$

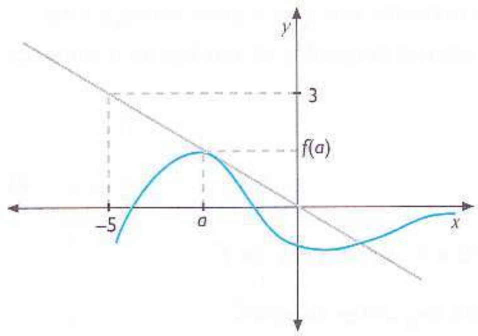
(B): $f(a) \cdot f'(a) < 0$

(C): $f'(a) \cdot f''(a) > 0$

(D): $f(a) \cdot f''(a) > 0$

Exercícios propostos

14. Considera o gráfico da função f e de uma recta t tangente ao gráfico no ponto de abcissa a. O valor de $f'(a)$ é:



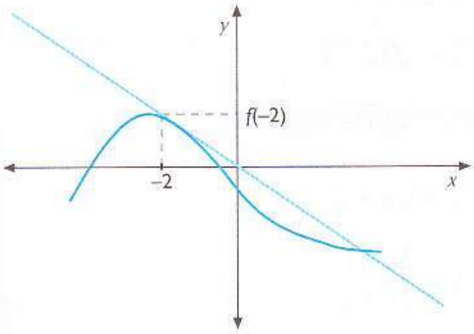
(A): $\frac{3}{5}$

(B): $-\frac{3}{5}$

(C): $\frac{3}{5}$

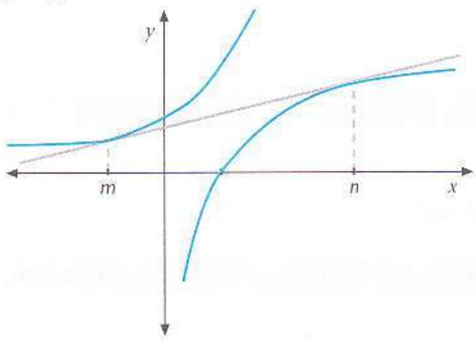
(D): $\frac{5}{3}$

15. Observa a recta t tangente ao gráfico de f no ponto $x = -2$. O valor de $f'(-2)$, derivada de f no ponto -2, pode ser:



(A): 2
(B): 1
(C): -2
(D): $\sqrt{2}$

16. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções f e h:
A função f, definida por $f(x) = e^x$.
A função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \log x$.
A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto $x = m$ e é tangente ao gráfico de h no ponto $x = n$.



Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A): $e^m = \frac{1}{n}$ (B): $e^m = \frac{1}{n \cdot ln10}$

(C): $e^{m+n} = ln\ 10$ (D): $ln\ (m \cdot n) = 1$

Exercícios propostos

17. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 h da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada por $C(t) = 2t\, e^{-0,3t}$. Determina o instante em que a concentração do medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresenta o resultado em horas e minutos.

18. Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$:

 18.1 Determina $f'(x)$;

 18.2 Resolve $f'(x) = 0$;

 18.3 Determina os intervalos de monotonia e os extremos relativos de f.

19. Determina, pelas regras de derivação, as derivadas das seguintes funções:

 19.1 $y = 1 + 3x - 2x^2$

 19.2 $y = x^2(x^2 - 1)$

 19.3 $y = x(x - 1)^2$

 19.4 $y = \dfrac{-2x + 3}{x^2}$

 19.5 $y = \dfrac{(x + 1)^2}{3x}$

 19.6 $y = \left(\dfrac{-5x^2 + 1}{\sqrt{2}}\right)^2$

 19.7 $y = \dfrac{3}{1 - x^2}$

 19.8 $y = \dfrac{5}{x^2}$

 19.9 $y = \dfrac{1}{(3x - 5)^2}$

 19.10 $y = \dfrac{1}{(ax + b)^n}$

 19.11 $y = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x}$

 19.12 $y = \sqrt{4x - 3}$

 19.13 $y = \sqrt[4]{6x^3 - 2x + 3}$

 19.14 $y = \sqrt[n]{a + x^n}$

 19.15 $y = \dfrac{3x - 1}{2x + 5}$

 19.16 $y = \dfrac{x}{\sqrt{x - 5}}$

 19.17 $y = \sqrt[3]{a + x^3}$

20. Determina y' sabendo que:

 20.1 $\ln \dfrac{y + x}{y} = c$

 20.2 $\sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot \operatorname{artg} \dfrac{y}{x}$

21. Encontra y' no ponto $A(1, 1)$ sabendo que $2y = 1 + xy^3$.

22. Calcula as derivadas de cada função nos pontos indicados (aplica as regras de derivação).

 22.1 $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 2}$; $x = 0$

 22.2 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 + 2}}$; $x = 1$

 22.3 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$; $x = \sqrt{2}$

Exercícios propostos

23. Estuda a variação de cada uma das seguintes funções e indica os extremos relativos (se existirem):

23.1 $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

23.2 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 10$

23.3 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1$

23.4 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 3$

23.5 $f(x) = e^{x^2+x}$

24. Determina as assímptotas verticais e horizontais dos gráficos das seguintes funções:

24.1 $f(x) = \dfrac{3-4x}{x}$

24.2 $f(x) = \dfrac{2x+15}{x-3}$

24.3 $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2-x+2}$

24.4 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

24.5 $f(x) = \log_3 (x^2 + 5)$

24.6 $f(x) = \ln \dfrac{x^2-2}{x}$

25. Observa o quadro abaixo e faz a representação gráfica da função correspondente: ($f(0) = 0$; $y = 0$ é AH)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
f'	−	0	+	0	−
f	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

26. Considera as tabelas abaixo e constrói, para cada caso, o gráfico correspondente.

26.1

x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	−		+		−
f	↘	−1	↗	2	↘

26.2

x	$x < 0$	0	$x < 0 < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	−		+		+		−
f	↘	−1	↗		↗	2	↘

26.3

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	−		+		−		+
f	↘	AV	↗	5	↘	AV	↗

26.4

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
f'	−		−	0	−		−
f	↘	AV	↘	0	↘	AV	↘

26.5

x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	
f'	+	−	−	−	−	+
f	↗	↘	↘	↘	↘	↗

Exercícios propostos

27. Faz o esboço do gráfico da função f, sabendo que:

$D_f = \mathbb{R}$

não tem AV e AH

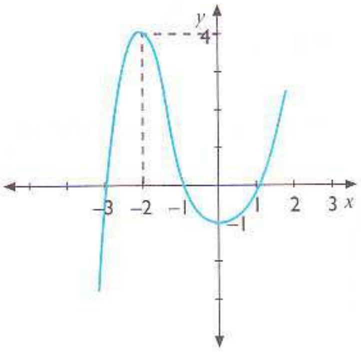
$f(0) = -1$ é mínimo

$f(2) = 2$ é máximo

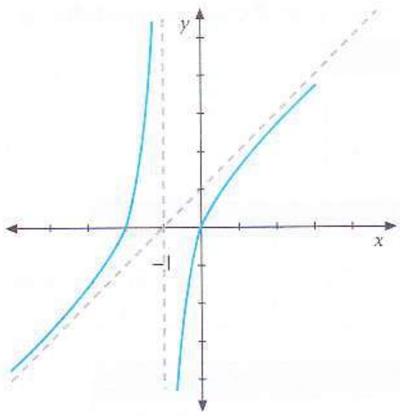
x	$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	–	0	+	0	–
f	↘	–1	↗	2	↘

28. Elabora uma tabela de variação da função $y = f(x)$ representada nos gráficos abaixo.

28.1



28.2



29. De uma função f de domínio $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, continua em D_f, sabe-se que:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$; $f(0) = -1$ é mín e $f(2) = 3$ é máx.

Observa o quadro de variação de f e propõe um gráfico para a função f.

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	–	0	+		+	0	–
f	↘	–1	↗		↗	3	↘

Exercícios propostos

30. Observa o quadro de variação de uma função real de variável real.

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
f'	$-$		$+$	0	$-$		$+$
f	↘		↗	5	↘		↗

Propõe um gráfico para a função sabendo que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

31. Dada a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$:
   - 31.1 Determina o zero da função.
   - 31.2 Calcula a ordenada na origem.
   - 31.3 Determina o domínio da função.
   - 31.4 Determina as equações das assímptotas horizontais e verticais.
   - 31.5 Estuda a variação da função e indica os extremos (se existem).
   - 31.6 Esboça o gráfico de f.

32. Considera a função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 6}$.
   - 32.1 Calcula os zeros de f e a ordenada na origem.
   - 32.2 Escreve as equações das assímptotas.
   - 32.3 Estuda a monotonia da função.
   - 32.4 Esboça o gráfico de f.

33. Dada a função $f(x) = x^4 - \dfrac{9}{4}x^2$:
   - 33.1 Encontra o domínio de f, os zeros e a ordenada na origem.
   - 33.2 Estuda a variação de f e os extremos relativos.
   - 33.3 Estuda o sentido da concavidade e determina os pontos de inflexão.
   - 33.4 Esboça o gráfico de f.
   - 33.5 Indica o contradomínio de f.

34. Considera a função $f(x) = \dfrac{-3x}{1 + x^2}$.
   - 34.1 Determina o zero e a ordenada na origem de f.
   - 34.2 Determina o domínio de f.
   - 34.3 Determina as equações das assímptotas.
   - 34.4 Estuda a variação da função e indica os extremos relativos.
   - 34.5 Esboça o gráfico da função.

35. Dada a função $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 4}$:
   - 35.1 Determina o domínio, os zeros e a ordenada na origem de f.
   - 35.2 Determina as equações das assímptotas.
   - 35.3 Indica os intervalos de monotonia e os extremos relativos de f.
   - 35.4 Estuda o sentido de concavidade e indica os pontos de inflexão, se existirem.

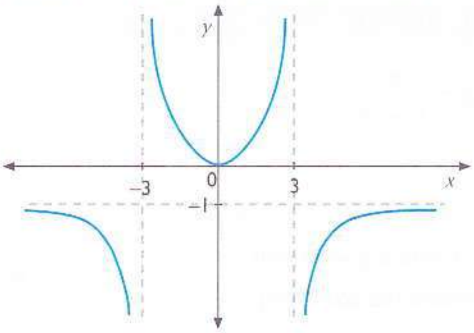
Exercícios propostos

35.5 Esboça o gráfico de f.

35.6 Classifica f quanto à paridade. Justifica a tua resposta.

35.7 Indica o contradomínio da função f.

36. Observa o gráfico. Qual das funções indicadas corresponde a este gráfico?



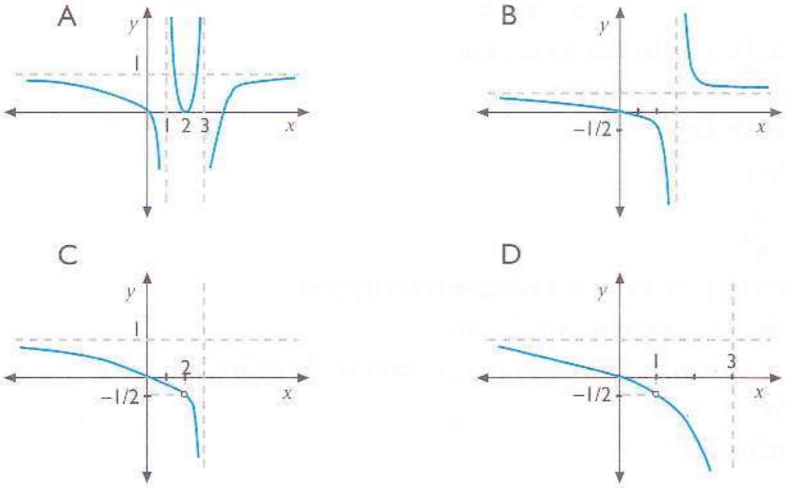
(A): $f(x) = \dfrac{x^2}{9 + x^2}$

(B): $f(x) = \dfrac{x}{9 - x^2}$

(C): $f(x) = \dfrac{x - 1}{9 - x^2}$

(D): $f(x) = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

37. Uma representação gráfica da função f definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$ pode ser:



38. Cada metro de rede necessária para construir uma capoeira rectangular custa 800 meticais. O proprietário pretende que a área cercada seja de 300 m^2. Calcula o resto mínimo da rede.

39. Determina dois números cuja soma é igual a 20, de modo que o seu produto seja máximo.

40. Calcula dois números de diferença igual a 10, de modo que o seu produto seja mínimo.

41. Qual é o número cuja diferença entre ele próprio e o seu quadrado é máximo?

42. Um projéctil é lançado verticalmente debaixo para cima. A altura h atingida ao fim de t segundos é dada pela expressão $h(t) = 10t - 5t^2$.

42.1 Qual é a altura máxima atingida?

42.2 Ao fim de quanto tempo o projectil atinge a altura máxima?

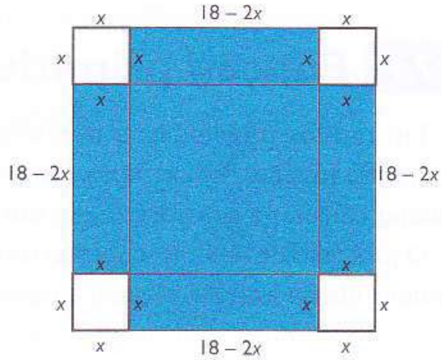
Exercícios propostos

43. O produto de dois números positivos é 16. Quais são esses números se a soma de um com o quadrado do outro for mínima?
44. Divide o número 12 em duas partes, de modo que o produto de uma pelo quadrado da outra seja máximo.

45. Determina, num segmento AD de comprimento fixo, um ponto P tal que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lado AP e PB.

46. Pretende-se fabricar uma lata cilíndrica aberta por cima. Dispõe-se de 300 cm^2 de material. Quais devem ser os valores de altura e do raio base para o volume seja máximo?

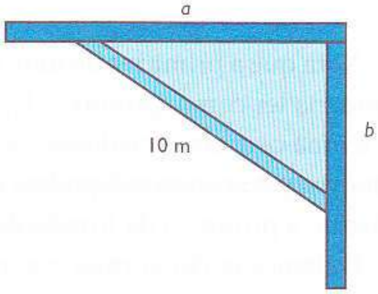
47. Numa folha quadrada de cartolina, cujo lado mede 18 dm, pretende-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadradinhos iguais para fabricar uma caixa. Calcula a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.



48. A machamba rectangular do sr. Mário, de certa área, está ao longo de um rio. Ele pretende vedá-la. Quais são as dimensões da machamba para que o perímetro da verdação seja mínimo?

49. Uma machamba de forma rectangular tem de área 216 dm^2. Pretende-se dividir em duas parcelas rectangulares iguais e proceder a vedação da machamba das parcelas obtidas. Quais serão as medidas dos lados da machamba, em metros, para que se gaste o mínimo de material para aquela vedação?

50. Num canto de um quintal com muro pretende-se isolar, com uma trave de madeira, a maior área de terreno possível. Sabendo que a trave mede 10 m, em que posição deverá ser colocada?



51. Para vedar um certo terreno rectangular destinado a um pomar, encostado a um muro ao longo do qual é dispensável a vedação, são necessários 160 m de rede. Calcula as dimensões do pomar de modo que a sua área seja máxima.

Unidade 7

Primitiva de uma função

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- definir primitiva de uma função;
- estabelecer as propriedades da primitiva da soma e do produto por constante;
- calcular e identificar primitivas imediatas;
- identificar casos adequados à utilização de primitivação por partes;
- calcular primitivas por partes.

7.1 Função primitiva e integral indefinido

Em muitos problemas, a derivada de uma função é conhecida e o objectivo é encontrar a própria função. Por exemplo, conhecendo a velocidade de um corpo em movimento, podemos querer calcular a sua posição em um momento qualquer.

O processo de obter (recuperar) uma função a partir de sua derivada é chamado de integração indefinida ou antiderivação e a função recuperada chama-se primitiva.

7.1.1 Definição

Definição 1: Diz-se que uma função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, para qualquer x do domínio de f, se a derivada de $F(x)$ for igual a $f(x)$. Isto é: $F'(x) = f(x)$.

Exemplos

1. $F(x) = \cos x$ é uma primitiva de $f(x) = -\operatorname{sen} x$, pois $F'(x) = -\operatorname{sen} x$.

2. $F(x) = x^3 + 2$ é uma primitiva de $f(x) = 3x^2$, pois $F'(x) = 3x^2$.

Nota que a primitiva de uma função não é única. Por exemplo, a função derivada $f(x) = 2x - 1$ poderia ter como primitvas $F_1(x) = x^2 - x + 2$, $F_2(x) = x^2 - x - 11$ ou ainda $F_3(x) = x^2 - x + c$, onde c é uma constante qualquer. Se derivarmos as funções primitivas, estas darão sempre a função derivada. As constantes podem tomar qualquer valor, pois derivando a constante dá sempre zero. Assim, a primitiva da função derivada $f(x) = 2x - 1$ é dada por $F(x) = x^2 - x + c$.

Podemos então afirmar que qaisquer duas primitivas diferem por uma constante, ou seja, se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ forem primitivas de $f(x)$, então $F_1(x) - F_2(x)$ é constante.

Definição 2: Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então a sua integral indefinida é dada por $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, c é uma constante, chamada constante de integração, o símbolo «$\int$» é chamado sinal de integração, $f(x)$ é o intergrado e dx é a diferencial de x. O diferencial de x significa que a função $f(x)$ foi derivada em relação a x.

Exemplos

1. $\int(x^2 + 3xy + 2y^2)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2y}{2} + 2xy^2 + c$

   dx significa que a função $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$ foi derivada em relação a x.

2. $\int(x^2 + 3xy + 2y^2)\,dy = x^2y + \dfrac{3}{2}xy^2 + \dfrac{2}{3}y^3 + c$

   dy significa que a função $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2y^2$ foi derivada em relação a y.

Nota: para verificar se uma primitiva foi calculada correctamente, basta determinar a derivada da função $F(x) + c$; se a derivada de $F(x)$ for igual a $f(x)$, então a primitiva está correcta.

A ligação existente entre derivadas e primitivas permite-nos usar as regras já conhecidas da derivação para obter regras correspondentes para a integração.

7.1.2 Primitivas imediatas

Exemplos

1. De acordo com a definição da função primitiva, vamos determinar a primitiva de:

   1.1 $f(x) = x$

   Nota-se facilmente que esta função é $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$

   1.2 $f(x) = 3x^2$

   A função cuja derivada é $3x^2$ é $F(x) = x^3 + c$.

   1.3 $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

   Veja que $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ é derivada da função tangente. Por isso a primitiva de $f(x) = \dfrac{3}{\cos^2 x}$

   é $F(x) = 3\,\mathrm{tg}\,x + c$.

   1.4 $F(x) = x(x - 1)(x - 2)$

   Para obter a primitiva desta função, primeiro vamos escrever o polinómio correspondente a este produto aplicando, para isso, a propriedade distributiva:

   $f(x) = (x^2 - x)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x$

   a primitiva é $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + c$.

7.1.3 Propriedades da integração

Estas são as propriedades da integração:

- Se $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, então $(F(x) + c)' = f(x)$, onde $c \in \mathbb{R}$.
- O integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo integral da função.
  $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\ k \in \mathbb{R}$
- O integral de uma soma ou diferença de funções é igual a soma ou diferença dos integrais.
  $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

7.1.4 Tabela de integrais

Se a função integral não é uma função elementar, em caso de necessidade usam-se tabelas de valores para estas funções. A tabela a seguir pode ser facilmente obtida a partir da segunda definição e das regras de derivação. Isto é, a ligação existente entre derivadas e primitivas permite-nos usar as regras já conhecidas da derivação para obter regras correspondentes para a integração.

I. Funções polinomiais	
1.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + c$, com $n \in \mathbb{R}/\{-1\}$ e $c \in \mathbb{R}$
2.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x \rvert + c$, com $c \in \mathbb{R}$
II. Funções trigonométricas	
3.	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$, com $c \in \mathbb{R}$
4.	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$, com $c \in \mathbb{R}$
5.	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$, com $c \in \mathbb{R}$
6.	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$, com $c \in \mathbb{R}$
7.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + c$, com $c \in \mathbb{R}$
8.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right\rvert + c$, com $c \in \mathbb{R}$
III. Funções que contêm soma ou diferença de quadrados	
9.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c,\ a \neq 0$, com $c \in \mathbb{R}$
10.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c,\ a \neq 0$, com $c \in \mathbb{R}$
11.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c,\ a \neq 0$, com $c \in \mathbb{R}$
12.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + c,\ a \neq 0$, com $c \in \mathbb{R}$
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + c,\ a > 0$, com $c \in \mathbb{R}$
IV. Funções exponenciais	
14	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a > 0$, com $c \in \mathbb{R}$
15.	$\int e^x\,dx = e^x + c$

Exemplos

1. Vamos encontrar os integrais, aplicando as principais regras de integração e a tabela de integração.

1.1 $\int 7x^2\,dx$

1.2 $\int (x^3 - 4x^2 + 2x - 9)\,dx$

1.3 $\int (x - a)(x + b)\,dx$

1.4 $\int \sqrt{5ax^3}\,dx$

1.5 $\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}\,dx$

1.6 $\int \frac{3}{x^2 + 11}\,dx$

1.7 $\int \frac{7}{10 - x^2}\,dx$

1.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{21 - 3x^2}}$

1.9 $\int (7e^x - \text{sen } x)\,dx$

1.10 $\int (4x + \cos x - 5)\,dx$

1.1 $\int 7x^2\,dx = 7\int x^2\,dx = 7 \cdot \frac{x^3}{3} + c$

1.2 $\int (x^3 - 4x^2 + 2x - 9)\,dx = \int x^3\,dx - 4\int x^2\,dx + 2\int x\,dx - 9\int dx$

$$= \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 9x + c$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - 9x + c$$

Nota: $\int dx = \int x^0\,dx = \frac{x^0 + 1}{0 + 1} + c = x + c$

1.3 $\int (x - a)(x + b)\,dx = \int (x^2 + bx - ax + ab)\,dx$

$$= \int x^2\,dx + b\int x\,dx - a\int x\,dx + ab\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + b\,\frac{x^2}{2} - a\,\frac{x^2}{2} + abx + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{b - a}{2}\,x^2 - abx + c$$

1.4 $\int \sqrt{5ax^3}\,dx = \int \sqrt{5a} \cdot x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$$= \sqrt{5a} \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \sqrt{5a} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2} + 1}}{\frac{3}{2} + 1} + c$$

$$= \frac{\sqrt{5a}}{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2x^2\sqrt{5ax}}{5} + c$$

1.5 $= \int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + 3\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 3 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 6\sqrt{x} + c$$

1.6 $\int \frac{3}{x^2 + 11}\, dx = 3\int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{11})^2}$

$$= \frac{3}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{11}} + c$$

1.7 $\int \frac{7}{10 - x^2}\, dx = 7 \int (\sqrt{10})^2 - x^2$

$$= \frac{7}{2\sqrt{10}} \ln \left|\frac{\sqrt{10} + x}{\sqrt{10} - x}\right|$$

1.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{21 - 3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(7 - x^2)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{(\sqrt{7})^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{\sqrt{7}} + c$$

1.9 $\int (7e^x - \operatorname{sen} x)\, dx = 7\int e^x\, dx - \int \operatorname{sen} x\, dx$

$$= 7e^x + \cos x + c$$

1.10 $\int (4x + \cos x - 5)\, dx\, dx = \int 4x + \int \cos x\, dx - 5\int dx$

$$= 2x^2 + \operatorname{sen} x - 5x + c$$

7.2 Técnicas de primitivação

7.2.1 Método de substituição

O método de substituição consiste em substituir uma expressão dentro do integral por uma outra variável. Para isso, é necessário que a expressão a substituir tenha a sua derivada ou função semelhante à sua derivada dentro do integral.

Exemplos

1. Vamos encontrar os seguintes integrais:

1.1 $\int \frac{x^2}{7 + x^3}\, dx$

Como a derivada do denominador é semelhante ao numerador, substitui-se o denominador por uma nova variável e ajustamos o numerador de acordo com a derivada do denominador.

Seja $7 + x^3 = t$, derivando os dois membros obtemos:

$$3x^2\,dx = dt$$

$$x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$$

$$\int \frac{x^2}{7 + x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + c$$

Retornando para a nossa variável, sabemos que $t = 7 + x^3$, então temos:

$$\frac{1}{3}\ln|t| + c = \frac{1}{3}\ln|7 + x^3| + c$$

1.2 $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

Observando com atenção a função integrando, vimos que a função $\ln x$ tem a sua derivada $\frac{1}{x}$, logo, fazemos a substituição.

Seja $\ln x = t$. Derivando ambos membros obtemos:

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

$$\int \overbrace{(\ln x)^3}^{t}\ \overbrace{\frac{dx}{x}}^{dt} = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + c$$

1.3 $\int \cos 5x\,dx$

Seja $5x = t$. Derivando ambos os membros, obtemos:

$$5\,dx = dt$$

$$dx = \frac{1}{5}\,dt$$

$$\int \cos 5x\,dx = \int \cos \frac{t \cdot dt}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\int \cos t\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\,t + c$$

$$= \frac{1}{5}\mathrm{sen}\,5x + c$$

1.4 $\displaystyle\int \frac{dx}{3x - 7}$

Como a derivada do denominador é semelhante ao numerador, podemos fazer a seguinte substituição.

Seja $3x - 7 = t$. Derivando ambos os membros, obtemos:

$$3\,dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int \frac{dx}{3x-7} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|3x-7| + c$$

1.5 $\int \text{sen}^3\, x \cos x\, dx$

Seja $\text{sen}\, x = t$. Derivando os dois membros, obtemos:

$\cos x\, dx = dt$

$$\int \underbrace{\text{sen}^3\, x}_{t}\ \underbrace{\cos x\, dx}_{dt} = \int t^3\, dt = \frac{1}{4}t^4 + c = \frac{1}{4}\text{sen}^4\, x + c$$

1.6 $\int \cos^3 x\, dx$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx$$

$$= \int (1 - \text{sen}^2\, x)\cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - \int \text{sen}^2\, x \cos x\, dx$$

Seja $\text{sen}\, x = t$. Derivando ambos os membros, obtemos:

$$\cos x\, dx = dt$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \text{sen}\, x - \int t^2 dt$$

$$= \text{sen}\, x + \frac{1}{3}t^3 + c$$

$$= \text{sen}\, x - \frac{1}{3}\text{sen}^3\, x + c$$

1.7 $\int x \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 8}}$

Seja $3x^2 - 8 = t$. Derivando os dois membros, obtemos:

$$6x\, dx = dt$$

$$x\, dx = \frac{1}{6}dt$$

$$\int x \frac{dx}{\sqrt{3x^2-8}} = \int \frac{1}{6}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{6} t^{-\left(\frac{1}{2}\right)} dt$$

$$= \frac{\frac{1}{6} t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3x^2 - 8} + c$$

1.8 $\int x^2(13 + \pi x^3)^5 \, dx$

Seja $13 + \pi x^3 = t$. Derivando ambos os membros, obtemos:

$$3\pi x^2 \, dx = dt$$

$$x^2 \, dx = \frac{1}{3}\pi \, dt$$

$$\int x^2(13 + \pi x^3)^5 \, dx = \int \underbrace{(13 + \pi x^3)^5}_{t} \underbrace{x^2 \, dx}_{\frac{1}{3}\pi \, dt}$$

$$= \int t^5 \cdot \frac{1}{3}\pi \, dx$$

$$= \frac{1}{3}\pi \int t^5 \, dt$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{t^6}{6} + c$$

$$= \frac{1}{18} \pi \, (13 + \pi x^3)^6 + c$$

1.9 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \sqrt{\operatorname{tg} x + 7}$

Seja $\operatorname{tg} x + 7 = t$, derivando ambos membros obtemos:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \, dx = dt$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \sqrt{\operatorname{tg} x + 7} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \int t^{-\left(\frac{1}{2}\right)} dt$$

$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 2\sqrt{t} + c$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x + 7} + c$$

1.10 $\int \operatorname{arcsen}^2 x \, \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Seja arcsen $x = t$. Derivando ambos os membros, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$$

$$\int \text{arcsen}^2 x \,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\,t^3 + c$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{arcsen}^3 x + c$$

7.2.2 Integrais que contêm um trinómio quadrático no denominador

Existem três casos a considerar.

1.º caso Se o numerador é de grau zero, simplesmente escreve-se ou transforma-se o trinómio quadrático na forma:

$$a(x+k_1)^2 + k_2;\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Isto é:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$\text{I} = \int \frac{\text{A}\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

Como $\frac{4ac-b^2}{4a}$ é uma constante, podemos igualar a k:

$\Rightarrow \text{I} = \frac{A}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2\text{a}}\right)^2 + (\sqrt{k})^2}$; que é integral da tabela 9

Seja $\frac{x+b}{2a} = z$. Derivando ambos os membros obtemos:

$$dx = dz$$

$$\text{I} = \frac{A}{a}\int \frac{dz}{(z^2 + (\sqrt{k})^2} = \frac{\text{A}\sqrt{k}}{\text{ak}}\,\text{arctg}\,\frac{z}{\sqrt{k}} + c$$

$$= \frac{\text{A}\sqrt{k}}{ak}\,\text{arctg}\,\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{k}} + c$$

Nota: para transformar um trinómio quadrático qualquer na forma (1), procede-se do seguinte modo:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \frac{ax^2+bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$$

Primeiro, factoriza-se o termo a. Depois soma e subtrai-se a metade do quadrado do coeficiente do segundo termo. Finalmente, agrupa-se os primeiros três termos que constitui um quadrado perfeito.

Exemplo

1. Vamos transformar os seguintes trinómios quadráticos na forma (1).

1.1 $5x^2 - 7x + 8$

$$
\begin{aligned}
5x^2 - 7x + 8 &= 5\left(x^2 - \frac{7x}{5} + \frac{8}{5}\right) \\
&= 5\left[x^2 - \frac{7x}{5} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + \frac{8}{5}\right] \\
&= 5\left[\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{156}{100}\right]
\end{aligned}
$$

1.2 $x^2 + 14x - 9$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 14x - 9 &= x^2 + 14x + 7^2 - 7^2 - 9 \\
&= (x + 7)^2
\end{aligned}
$$

2.º caso O numerador é do 1.º grau: como a derivada do trinómio quadrático é função do 1.º grau, que é semelhante ao numerador, então podemos ajustar o numerador com a derivada do denominador.

Exemplo

1. $$\int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 13} = \int \frac{\left[\frac{1}{2}(2x - 7) - \frac{7}{2}\right] dx}{x^2 - 7x + 13} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x - 7)\, dx}{x^2 - 7x + 13} - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 13}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - 7x + 13| - \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2 - 7x + 13| - \frac{7}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x - 7}{\sqrt{3}} + C$$

2. $$\int \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x - 4) - 2 - \frac{13}{2}}{x^2 - 4x + 22 - 22 + 5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x - 4}{(x - 2)^2 + 1}\,dx - 8\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2 - 4x + 5| - 4\,\mathrm{arctg}(x - 2) + c$$

3.º caso Se o grau de numerador for maior ou igual ao grau do denominador, primeiro divide-se os polinómios.

Exemplos

1. Vamos encontrar os seguintes integrais:

1.1 $\displaystyle\int \frac{(x^2+3x+1)\,dx}{x^2+4x+8}$

Divisão:

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x+1 & x^2+4x+8 \\ \cline{2-2} -(x^2+4x+8) & 1 \\ \cline{1-1} 0-x-7 & \end{array}$$

$$\int \frac{(x^2+3x+1)\,dx}{x^2+4x+8} = \int \left(1 - \frac{x+7}{x^2+4x+8}\right)\,dx$$

$$= \int dx - \int \frac{(x+7)\,dx}{x^2+4x+8}$$

$$= x - \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+5}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8} - 5\int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2}$$

$$= x - \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+8| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c$$

1.2 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^2+4x+8}$

Divisão:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x+0 & x^2+4x+8 \\ \cline{2-2} -(x^3+4x^2+8x) & x-4 \\ \cline{1-1} 0-4x^2-8x+0 & \\ -(-4x^2-16x-32) & \\ \cline{1-1} 0+8x+32 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^2+4x+8} = \int \left(x-4-\frac{8(x+4)}{x^2+4x+8}\right)\,dx$$

$$= \int (x-4)\,dx + 4\int \frac{(2x+8)\,dx}{x^2+4x+8}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 4\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+8} - 16\int \frac{dx}{(x+2)^2+2^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 4\ln|x^2+4x+8| - 8\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + c$$

7.2.3 Primitivação por partes

A partir da regra da derivada de um produto, podemos deduzir a fórmula de integração de um produto de funções.

$(uv)' = u'v + uv'$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$\int(uv)' = \int u'v + \int uv'$

$uv = \int v\,du + \int u\,dv \Leftrightarrow$

$$\int u dv = uv - \int v\,du$$

Esta última é a fórmula de integração de um produto de funções, conhecida por integração por partes.

Procede-se da seguinte forma. Escolhe-se a função em que é mais difícil encontrar a primitiva ou aquela em que derivando, deprecia-se a sua complexidade. Designa-se esta função por u e encontra-se a sua derivada para obter du. O resto da expressão designa-se por dv. Encontra-se a primitiva para obter v. Por fim, substitui-se as expressões obtidas em cima e coloca-se na fórmula da integração por partes.

Nota que o processo só termina quando se encontrar uma integral mais simples de determinar a primitiva.

Exemplos

1. Vamos encontrar os integrais seguintes:

   1.1 $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

   A fórmula ideal para encontrar a primitiva deste integral é por partes, pois é integral de um produto de funções que não tem nenhuma relação entre elas. Isto é, nenhuma das funções é derivada da outra.

   Faz-se $\quad u = x^2$

   Agora, integrando ambos os membros:

   $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

   $dv = \operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

   Aplicando a fórmula: $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

   $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $v = -\cos x$

   $$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = x^2(-\cos x) - \int(-\cos x) \cdot 2x\,dx$$
   $$= -x \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

Este integral também se pode fazer por partes, onde $u = x$ e $du = dx$
Logo, $dv = \cos x\, dx$
$\int dv = \operatorname{sen} x$

Aplicando pela segunda vez a regra, obtemos:
$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x + 2(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx)$
$= -x \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c$

1.2 $\int x \ln 2x\, dx$

Neste exercício, é difícil encontrar a primitiva de $\ln 2x$, então vamos designá-la por u.

$u = \ln 2x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx$

$dv = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Aplicando a fórmula:

$$\int x \ln 2x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln 2x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{x^2}{4} + c$$

1.3 $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

Como é difícil encontrar a primitiva de $\operatorname{arctg} x$, vamos designá-la por u.

$u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{x^2+1}\, dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

Aplicando a fórmula: $\int \operatorname{arctg} x\, dx = uv - \int v\, du$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c$$

Exercícios resolvidos

1. Encontra os seguintes integrais:

1.1 $\int \frac{7\,dx}{3x^2 + 4x + 5}$

1.2 $\int \frac{7\pi\,dx}{x^2 - 6x + 13}$

1.3 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7x - 5}}$

1.4 $\int \frac{19\,dx}{\sqrt{1 - 3x - x^2}}$

Resolução:

1.1 Vamos primeiro transformar o trinómio quadrático na forma (1).

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 5 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right) \\ &= 3\left[x^2 + \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\right] \\ &= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}\right] \end{aligned}$$

$$\int \frac{7dx}{3x^2 + 4x + 5} = \frac{7}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{11}{9}}$$

Fazendo $x + \frac{2}{3} = z$, $dx = dz$

$$I = \frac{7}{3} \int \frac{dz}{z + \left(\frac{\sqrt{11}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{7}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{\cancel{3}}} \, arctg \, \frac{z}{\frac{\sqrt{11}}{\cancel{3}}} + c$$

$$= 7 \frac{\sqrt{11}}{11} \, arctg \, \frac{3x + 2}{\sqrt{11}} + c$$

1.2 Vamos transformar o trinómio na forma (1).

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13 \\ &= (x - 3)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\int \pi \frac{7\,dx}{x^2 - 6x + 13} = 7\pi \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 4}$$

Fazendo $z = x - 3$, $dz = dx$

$$7\pi \int \frac{dz}{z^2 + 2^2}$$

$$= \frac{7\pi}{2} \, arctg \, \frac{z}{2} + c$$

$$= \frac{7\pi}{2} \, arctg \, \frac{x - 3}{2} + c$$

Exercícios resolvidos

1.3 Vamos transformar o trinómio na forma (I).

$$x^2 + 7x - 5 = x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 5$$

$$= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{69}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 7x - 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{69}}{2}\right)^2}}$$

Fazendo $x + \frac{7}{2} = z$, $dx = dz$

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \left(\frac{\sqrt{69}}{2}\right)^2}}$$

$$= \ln z + \sqrt{z^2 - \left(\frac{\sqrt{69}}{2}\right)^2} + c$$

$$= \ln \left| x + \frac{7}{2}\sqrt{x^2 + 7x - 5} \right| + c$$

1.4 Vamos transformar o trinómio na forma (I).

$$1 - 3x - x^2 = -(x^2 + 3x - 1)$$

$$= -\left[x^2 + 3x - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right]$$

$$= -\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right]$$

$$= \frac{13}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\int \frac{19\,dx}{\sqrt{1 - 3x - x^2}} = 19 \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2}}$$

Fazendo $x + \frac{3}{2} = t$, $dt = dx$

$$I = 19 \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - t^2}}$$

$$= 19 \operatorname{arcsen} \frac{t}{\sqrt{\frac{13}{2}}} + c$$

$$= 19 \operatorname{arcsen} \frac{2x + 3}{\sqrt{13}} + c$$

Exercícios propostos

1. Encontra os integrais:

1.1 $\int(x^2 + 2\sqrt{x})\,dx$

1.2 $\int \frac{2}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\,dx$

1.3 $\int(x^4 + 2x^3 - \sqrt{x})\,dx$

1.4 $\int(5xy^2 - 4x^2y - 3)\,dy$

1.5 $\int(x + 3)^2\,dx$

1.6 $\int x(x + a)(x - a)\,dx$

1.7 $\int\left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx$

1.8 $\int 5\frac{dx}{3x - 7}$

1.9 $\int 7\frac{dx}{13x^2 + 12}$

1.10 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 8}}$

2. De acordo com a definição da primitiva, calcula a primitiva de cada uma das seguintes funções:

2.1 $y = x^3$

2.2 $y = x$

2.3 $y = 2x$

2.4 $y = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2.5 $y = 1$

2.6 $y = \cos x$

3. Determina as primitivas das seguintes funções:

3.1 $y = 5x^2 + 4x + 3$

3.2 $y = x(x - 1)(x + 2)$

3.3 $y = e^x$

3.4 $y = -\text{sen}\,x$

3.5 $y = \frac{1}{x}$

3.6 $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

3.7 $y = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$

3.8 $y = 5^x$

3.9 $y = 10^{2x-3}$

Exercícios propostos

4. *Encontra os seguintes integrais:*

4.1 $\int \text{sen}\, 2x\, dx$

4.2 $\int (\ln x)\, \frac{2}{x}\, dx$

4.3 $\int \frac{1}{\text{sen}^2 5x}\, dx$

4.4 $\int \frac{dx}{3x + 1}$

4.5 $\int \text{tg}\, 4x\, dx$

4.6 $\int \cos\,(x + 9)\, dx$

4.7 $\int \cos^4 x\, \text{sen}\, x\, dx$

4.8 $\int x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$

4.9 $\int x^2 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 10}}$

4.10 $\int \text{sen}\, x \frac{dx}{\cos^3 x}$

4.11 $\int \arccos^2 x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

4.12 $\int x \frac{dx}{x^2 + 4}$

5. Encontra os seguintes integrais:

5.1 $\int 3 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

5.2 $\int \sqrt{17} \frac{dx}{2x + x^2}$

5.3 $\int \frac{dx}{1 - x + 3x^2}$

5.4 $\int 5x \frac{dx}{x^2 - 7x + 13}$

5.5 $\int \frac{-(2 - 3x)\, dx}{x^2 - 4x + 5}$

5.6 $\int (x^2 - 2x + 1) \frac{dx}{x^2 + 3x + 4}$

5.7 $\int x^2 \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$

5.8 $\int \pi \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$

5.9 $\int 3(x - 2) \frac{dx}{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}}$

Exercícios propostos

6. Encontra os integrais usando a técnica de integração por partes.

6.1 $\int x \text{ sen } 5x\, dx$

6.2 $\int \ln x\, dx$

6.3 $\int x\, e^x\, dx$

6.4 $\int (x + 1) \cos x\, dx$

6.5 $\int x \ln 3x\, dx$

6.6 $\int e^x \text{ sen } 2x\, dx$

6.7 $\int \sqrt{x} \ln x\, d$

6.8 $\int x^2 \cos 3x\, dx$

6.9 $\int \text{arcsen } x\, dx$

6.10 $\int \frac{x}{e^x}\, dx$

6.11 $\int x\, e^{-x}\, dx$

6.12 $\int x^2\, e^{3x}\, dx$

6.13 $\int (x^2 - 2x + 5)\, e^x\, dx$

6.14 $\int x^3\, e^{2x}\, dx$

6.15 $\int \frac{\ln x}{x^3}\, dx$

7. Encontra os integrais seguintes:

7.1 $\int \frac{x\, dx}{x^2 + 3x - 4}$

7.2 $\int \frac{(x + 2)\, dx}{x^2 + 4x - 11}$

7.3 $\int \frac{(5x + 8)\, dx}{7 - x - 3x^2}$

7.4 $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 1}}$

Unidade 8

Números complexos

No final desta unidade, deverás ser capaz de:

- identificar números complexos e a relação entre os diversos universos numéricos;
- operar com números complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica;
- interpretar geometricamente as operações com números complexos.

8.1 Contexto histórico

Os números complexos apareceram pela primeira vez no século XVI com matemáticos italianos como Cipião Del Ferro, Tataglia e Cadern. Foi Bombeli quem primeiro esboçou uma teoria dos números complexos. O estudo dos números complexos é hoje muito importante e de grande aplicação na Matemática, na Física e na Engenharia Electrotécnica.

8.2 O conjunto dos números complexos

Noção de número complexo (forma algébrica)

Em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 1 = 0$ é impossível porque não existe um número real x tal que $x^2 = -1$.

O problema ficou resolvido com a ampliação do campo real, introduzindo o símbolo i (número imaginário) para substituir $\sqrt{-1}$. Isto é:

$$\sqrt{-1} = i \Leftrightarrow i^2 = -1$$

Deste modo, a solução da equação $x^2 + 1 = 0$ é dada por:

$$x = -\sqrt{-1} = -i \vee x = \sqrt{-1} = i$$

Exemplo

1. Resolve a equação $x^2 - 2x + 3 = 0$.

$\Delta = 4 - 12 = -8$

$x = 2 - \sqrt{2}i \vee x = 2 + -\sqrt{2}i$

Um número complexo é todo o número que pode escrever-se na forma $a + bi$, com a e b elementos de $\mathbb{R}$ e onde $i = \sqrt{-1}$.

O conjunto de números complexos representa-se por $\mathbb{C}$.

No número complexo $z = a + bi$, diz-se que:

- a é a parte real; representa-se por Re(z);
- $-bi$ é a parte imaginária; b é o coeficiente da parte imaginária; representa-se por Im(z);
- se $a = 0$ e $b \neq 0$, então z é um número imaginario puro;
- $z = a - bi$ é o conjugado de $z = a + bi$.

Exemplo

1. No número $z = 2 - 3i$:
   2 é a parte real;
   $-3i$ é a parte imaginária;
   $2 + 3i$ é o conjugado de $2 - 3i$.

2. Vamos resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$.
   $\Delta = 4 - 20 = -16$
   $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{-16}}{2}$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$
   $x = 1 + 2i \vee x = 1 - 2i$.

8.3 Representação geométrica dos números complexos

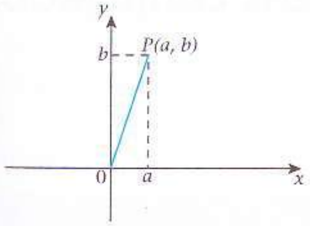
A cada número complexo $z = a + bi$ corresponde um e um só par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}$ e vice-versa:

$a + bi \Leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}$

Fica assim estabelecida uma correspondencia biunívoca entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos números reais.

Fixando no plano um referencial ortonormado, a cada par ordenado (a, b) corresponde um e um só ponto P.

A imagem de qualquer número real está sobre o eixo das abcissas (eixo real).



O ponto P chama-se afixo do complexo $a + bi$.

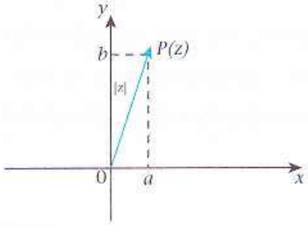
O esquema usado para a representação geométrica dos números complexos chama-se **diagrama de Argand**, em homenagem ao matemático francês Argand que estudou os números complexos.

8.4 Módulo de um número complexo

Dado o número complexo $z = a + bi$, o módulo ou valor absoluto de z é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Graficamente, esse módulo representa a distância do ponto P à origem do sistema de coordenadas:



8.5 Complexos conjugados

- $|z| = |z|$
- $\overline{z} + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $\overline{z} - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}\,(z)$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$

Exemplos

1. $\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$
2. $(3 - i) + (3 + i) = 6$
3. $(3 - i) - (3 + i) = -2i$
4. $\overline{(3 - i) + (4 + i)} = (3 + i) + (4 - i) = 7$
5. $\overline{(3 - i) \cdot (4 + i)} = (3 + i) \cdot (4 - i) = 13 + i$

8.6 Propriedades relativas a complexos conjugados

- $|z| = 0$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ com $z_2 \neq 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| = \overline{AB}$

O módulo da diferença de dois números complexos é igual à distância entre os pontos imagem desses números no plano de Argand.

Relação de ordem em $\mathbb{C}$

É impossível definir uma relação de ordem entre números complexos que possa conservar as propriedades formais de cáculo em $\mathbb{R}$. Isto é, não faz sentido dizer que um número complexo é maior que outro. Entre os números complexos, apenas podemos estabelecer uma relação de igualdade.

Relação de igualdade em $\mathbb{C}$

Dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se e só se $a = c$ e $b = d$.

$z_1 = z_2$ se e só se $a = c$ e $b = d$

Exemplo

1. Vamos determinar m e n de tal modo que $2m + 4 - 8i$ seja igual a $2 + (3n + 1)$i.
   $2m + 4 = 2 \Leftrightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$
   $3n + 1 = -8 \Leftrightarrow 3n = -9 \Rightarrow n = -3$

8.7 Operações com números complexos

Adição

Consideremos dois números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, sendo a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.
A soma de α e β é dada por:
$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (c + d)i$

Isto é:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplicação

Consideremos dois números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, sendo a, b, c e $d \in \mathbb{R}$.
O produto de α e β é dado por:
$\alpha \cdot \beta = (a + bi)\ (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$
$(a + bi)\ (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$
$= ac + adi + bc\ i - bd$, porque $i^2 = -1$

Isto é:

$(a + bi)\ (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

Exemplo

1. Dados os números $\alpha = 1 + 2i$ e $\beta = 3 + 5i$, vamos calcular:

   1.1 $\alpha + \beta$
   $\alpha + \beta = 1 + 2i + 3 + 5i$
   $\alpha + \alpha = (1 + 3) + (2 + 5)i$
   $\alpha + \beta = 4 + 7i$

   1.2 $\alpha \cdot \beta$
   $\alpha \cdot \beta = (1 + 2i)\ (3 + 5i)$
   $\alpha \cdot \beta = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (2 \cdot 3 + 1 \cdot 5)i$
   $\alpha \cdot \beta = -7 + 1i$

Divisão

Consideremos dois números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$, sendo a,b,c e $d \in \mathbb{R}$.

O quociente de α e β é dado por:

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+bi}{c+di}$; multiplicar os dois termos da fracção pelo conjugado do denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)\ (c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Isto é:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)\ i}{c^2+d^2}$$

Exemplo

1. Dados os números $\alpha = 1 + 2i$ e $\beta = 3 + 5i$, vamos efectuar a operação $\frac{\alpha}{\beta}$.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1+2i}{3+5i} = \frac{(1+2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$$

$$= \frac{3+10+6i-5i}{9+25} = \frac{13+i}{34} = \frac{13}{34} + \frac{1}{34}i$$

Potenciação

No conjunto dos números complexos, mantém-se a definição de potência de expoente natural, com as respectivas propriedades.

Em particular, tem-se:

- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

Seja n um número natural qualquer e designemos por q e r respectivamente, o quociente e o resto da divisão de n por 4. Teremos , então: $n = 4q + r$, com $0 < r < 4$, e $i^n = i^{4q+r} = i^{4n} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r$

Como $i^4 = 1$, conclui-se que $i^n = i^r$.

Em conclusão: a potência de i de expoente natural é sempre igual à potência de i que tem por expoente o resto da divisão de n por 4:

$i^n = i^r$ onde r é o resultado da divisão de n por 4

Exemplos

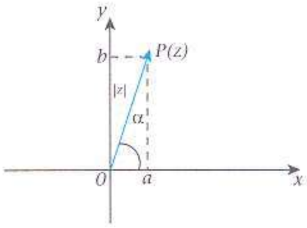
1.1 $i^{15} = i^{4 \cdot 3 + 3} = i^3 = -i$

1.2 $i^{29} = i^{28} \cdot i = i$

8.8 Forma trigonométrica dos números complexos

A medida, em radianos, da amplitude do ângulo positivo α formado por z chama-se **argumento** do complexo z.

Em particular, tem-se:



$z = a + bi \curvearrowright P$

$|z| = |\overrightarrow{OP}|$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{|z|} \Leftrightarrow b = |z|\ \text{sen}\ \alpha$

$\cos \alpha = \dfrac{a}{|z|} \Leftrightarrow a = |z| \cos \alpha$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$

Como $z = a + bi$, então

$z = |z| \cos \alpha + |z|\ i\ \text{sen}\ \alpha \Leftrightarrow$

$z = |z|\ (\cos \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$

Esta é a forma trigonométrica dos números complexos.

É frequente representar-se $|z|$ por ρ e z por $\rho\ (\cos \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$, $\rho e^{i\alpha}$ ou ainda ρ cis α. A forma trigonométrica dos números complexos escreve-se, então, assim:

$z = \rho\ \text{cis}\ \alpha$

Observações

- O complexo $0 + 0i$ tem módulo nulo e o argumento indeterminado;
- os números reais positivos têm por argumento 0 e os negativos π;
- os números imaginários puros têm por argumento $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$, se o coeficiente da parte imaginária for positivo ou negativo, respectivamente.

Exemplos

1. Vamos escrever na forma trigonométrica $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

   Vamos, primeiro, encontrar o módulo:

   $|z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$

   Em, seguida, calculamos o argumento:

   $\cos \alpha = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{|z|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = -\dfrac{1}{2}$

   Logo $\alpha = \dfrac{11\pi}{6}$, com $k \in Z$

   Então, $z = \sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{8}\ \text{cis}\ \dfrac{11\pi}{6}$

2. Escreve na forma algébrica $z = 2 \text{ cis} \left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

$$z = 2 \text{ cis } \frac{5\pi}{4} = 2 \cdot \cos \frac{5\pi}{4} + \text{sen } \frac{5\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

8.8.1 Forma trigonométrica do produto

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos não nulos, tais que:

- $z_1 = \rho_1 (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$
- $z_2 = \rho_2 (\cos \beta + i \text{ sen } \beta)$

Então:

$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1(\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)] \cdot [\rho_2(\cos \beta + i \text{ sen } \beta)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2[(\overbrace{\cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}^{\cos(\alpha + \beta)}) + i(\overbrace{\text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta}^{\text{sen}(\alpha + \beta)})]$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2[\cos (\alpha + \beta) + i \text{ sen } (\alpha + \beta)]$$

ou

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \text{cis } (\alpha + \beta)}$$

Exemplos

1. Sabendo que $z_1 = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = 3 \text{ cis } \frac{3\pi}{4}$, vamos calcular $z_1 \cdot z_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \text{ cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \text{ cis} \left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{4}\right)$$

E na forma algébrica:

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

2. Sendo $z_1 = 3 \cos \left(\frac{-\pi}{3}\right)$, $z_2 = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{6}$, vamos calcular:

2.1 $z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} \text{ cis} \left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} \text{ cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i \text{ sen } \frac{\pi}{6}\right] = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} i$$

2.2 $z_2 \cdot z_3 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \pi$

$z_2 \cdot z_3 = \sqrt{2}\ (\cos \pi + i \text{ sen } \pi) = -\sqrt{2}$

$z_2 \cdot z_3 = -\sqrt{2}$

2.3 $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3\sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = 3\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{2\pi}{3}$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3\sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2} i$$

8.8.2 Forma trigonométrica do quociente

Sejam $z_1 = \rho_1 \text{ cis } x$ e $z_2 = \rho_2 \text{ cis } \beta$ dois números complexos na forma trigonométrica. Então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \text{ cis } \alpha}{\rho_2 \text{ cis } \beta} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \text{ cis } (\alpha - \beta)$$

O quociente de números complexos é um número complexo tal que:

- o módulo é o quociente dos módulos;
- o argumento é a diferença dos argumentos.

8.9 O inverso de um número complexo

O inverso de um número complexo z, não nulo, é o complexo:

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \text{ cis } 0}{\rho \text{ cis } \alpha} = \frac{1}{\rho} \text{ cis } (0 - \alpha) = \frac{1}{\rho} \text{ cis } (-\alpha)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} \text{ cis } (-\alpha)$$

Potenciação

A potenciação de um número complexo z é o complexo:

$$z^n = \rho \text{ cis } (n\alpha)$$

A fórmula chama-se a fórmula de Moivre.

Radiciação

A radiciação de um número complexo z, com $z \geq 0$, é o complexo:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \text{cis } \alpha\ n \in \mathbb{N}$$

Exercícios resolvidos

1. Representa na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

1.1 $z = 2$

1.2 $z = -3i$

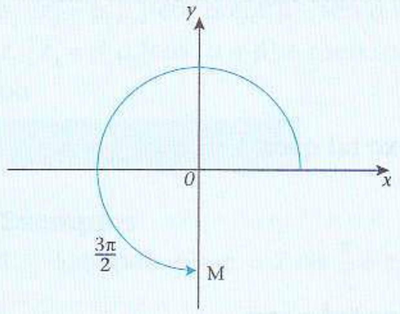
1.3 $z = -\sqrt{3} + i$

1.4 $z = 2 - \sqrt{12}i$

Resolução:

1.1 Neste caso $|z| = 2$, ou seja $\rho = 2$ e $\alpha = 0$ porque o afixo situa-se no eixo real positivo.
$z = 2(\cos 0 + i \text{ sen } 0)$ ou $z = 2 \text{ cis } 0$.

1.2 Neste caso, $|z| = 3$ e como o afixo se situa sobre o semi-eixo imaginário negativo, tem-se que $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, por exemplo.



A forma trigonométrica é

$$z = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \text{ sen } \frac{3\pi}{2}\right)$$

ou

$$z = 3 \text{ cis } \frac{3\pi}{2}.$$

1.3 Neste caso $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Como $\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}$, então $\text{tg } \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Isto leva a crer que a imagem geométrica de z pertence ao 2° quadrante.

$\text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, logo $\text{tg } \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Logo,

$z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{6}\right)$ ou $z = 2 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$.

Outro procedimento que se pode usar:

Como $|z| = 2$, podemos escrever $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

Já sabemos que:

$$\begin{cases} \cos \alpha = a \\ \text{sen } \alpha = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O único ângulo que verifica estas duas condições é $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, pelo que

$z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{6}\right)$.

Exercícios resolvidos

1.4 Neste caso $|z| = 4$. Como $tg\ \alpha x = -\frac{\sqrt{12}}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, $x \in$ IV quadrante.

No 1.° quadrante

$tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

No 4.° quadrante

$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

Logo, $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

ou $z = 4 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$.

Outro procedimento que se pode usar:

Como $|z| = 4$, podemos escrever

$z = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12}}{4}i\right) \Leftrightarrow z = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Isto é:

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{3}$$

$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$.

2. Representa na forma algébrica os complexos seguintes:

2.1 $z_1 = 3 \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ 2.2 $z_2 = 3 \operatorname{cis}\frac{9\pi}{4}$ 2.3 $z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$ 2.4 $z_4 = \sqrt{3} \operatorname{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

Resolução:

2.1 $z_1 = 3 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 3\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right]$

$z_1 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_1 = 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

2.2 $z_2 = 3\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

2.3 $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$z_3 = -1 - i$

2.4 $z_4 = \sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

Exercícios resolvidos

3. Representa na forma trigonométrica o complexo $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}$ e $z_2 = 5 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}}{5 \text{ cis } \frac{5\pi}{6}}$$

$$= \frac{2}{5} \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \text{ cis } \left(-\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

4. Calcula:

4.1 $\frac{2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}}{4 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}}$

4.2 $\frac{-2 \text{ cis } \pi}{\text{cis } \frac{\pi}{2}}$

4.3 $\frac{-\text{cis } \frac{\pi}{6}}{2 \text{ cis } (0)}$

Resolução:

4.1 $\frac{2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}}{4 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}}$

$$= \frac{1}{2} \text{ cis } \left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ cis } \left(\frac{-\pi}{3}\right)$$

4.2 $\frac{-2 \text{ cis } \pi}{\text{cis } \frac{\pi}{2}}$

$$= -2 \text{ cis } \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -2 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$$

Exercícios resolvidos

4.3 $\dfrac{-\text{cis}\,\dfrac{\pi}{6}}{2\,\text{cis}\,(0)}$

$= -\dfrac{1}{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6} - 0\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{6}$

5. Calcula x e y tais que $(2x - 3i)(1 + 2i) = \dfrac{1 - 2yi}{1 - i}$.

Resolução:

$2x + 6 + (4x - 3)i = \dfrac{(1 - 2yi)(1 + i)}{1 + 1}$

$2x + 6 + (4x - 3)i = \dfrac{1 + 2y + (1 - 2y)i}{2}$

$4x + 12 + (8x - 6)i = 1 + 2y + (1 - 2y)i$

$$\begin{cases} 4x + 12 = 1 - 2y \\ 8x - 6 = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -11 \\ 8x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{9}{2} \\ y = \dfrac{29}{2} \end{cases}$$

6. Escreve na forma $a + bi$ a expressão $z = \dfrac{1 + i}{i} + \dfrac{i}{1 + i}$.

Resolução:

$z = \dfrac{(1 + i)(-i)}{i\,(-i)} + \dfrac{(1 - i)i}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{i - i^2}{1} + \dfrac{1 + i}{2}$

$z = \dfrac{2(1 - i) + 1 + i}{2} = \dfrac{2 - 2i + 1 + i}{2} = \dfrac{3 - i}{2}$

$z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Exercícios propostos

1. Determina x real de tal modo que:
   1.1 $\left(\frac{1}{2} + 3x\right) + 2i$ seja um número imaginário puro;
   1.2 $-(5x - 3)i$ seja um número real;
   1.3 $(4x + 12) + (2x^2 - 18)i$ seja um número imaginário puro.

2. Efectua as operações indicadas:
   2.1 $(-3 + 2i) + (2 - 4i) + (1 + i)$
   2.2 $(2 - 3i) - (3 - i) + (1 + 2i)$
   2.3 $(1 + 2i)(2 + 3i)$
   2.4 $(-3 + 2i)(1 - 5i)$
   2.5 $(6 + 3i)(1 - 1/3i)$
   2.6 $(1 - 3i)(1 - 3i)$
   2.7 $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2$
   2.8 $(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$
   2.9 $(1 + i)(1 - i)$
   2.10 $\frac{3 + i}{1 - 2i} - \frac{i - 3}{1 + 2i}$

3. Calcula o módulo dos seguintes números:
   3.1 $3 - 4i$
   3.2 $-1 + i$
   3.3 $4i$
   3.4 5
   3.5 $5 + 2i$
   3.6 $\sqrt{6} - i\sqrt{3}$

4. Resolve as seguintes equações, em $\mathbb{C}$:
   4.1 $(x + 2i)(x - 2i) = 0$
   4.2 $x^2 + 4 = 0$
   4.3 $x^2 + 9 = 0$
   4.4 $x^2 + 2x + 4 = 0$
   4.5 $x^2 - 10x + 40 = 0$
   4.6 $4x^2 - 4x + 5 = 0$

5. Considera os números complexos $z_1 = -2 + 2i$ e $z_2 = 1 + i$.
   5.1 Representa z_1 e z_2 na forma geométrica.
   5.2 Escreve z_1 e z_2 na forma trigonométrica.

6. Divide o número 10 em duas partes, de modo que o seu produto seja 40.

Exercícios propostos

7. Sendo $z_1 = 5 - 4i$ e $z_2 = 2 + 7i$, calcula:
   7.1 $z_1 \cdot z_2$
   7.2 $\dfrac{z_1}{z_2}$
   7.3 $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

8. Dada $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \dfrac{z \cdot \overline{z}}{z - \overline{z}}$, calcula $f(2 + i)$.

9. Mostra que $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i$ é uma solução da equação $2 \cdot z^2 - 3z + 2 = 0$.

10. Dada em $\mathbb{C}$ a equação, $z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i = 0$:
    10.1 Mostra que $-i$ é raíz da equação.
    10.2 Determina na forma algébrica, as outras raízes.

11. Escreve na forma algébrica:
    11.1 $z = 2 \text{ cis} \left(\dfrac{4}{3}\pi\right)$
    11.2 $z = 2 \text{ cis} \left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
    11.3 $z = 2 \text{ cis} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
    11.4 $z = 3 \text{ cis} \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

12. Representa na forma trigonométrica:
    12.1 $z = 5i$
    12.2 $z = \sqrt{3} + 3i$
    12.3 $z = 8$
    12.4 $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

13. Dados os números complexos $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ e $z_2 = -2$:
    13.1 Escreve, na forma algébrica, $z_1 + z_2$;
    13.2 Escreve, na forma algébrica $\dfrac{z_1}{z_2}$.

14. Dado o número complexo $z = \text{cis} \left(\dfrac{\pi}{3}\right)$:
    14.1 Representa-o na forma algébrica;
    14.2 Calcula o módulo e o argumento de $(z + 1)$;
    14.3 Representa na forma trigonométrica $(z + 1)^5$.

Exercícios propostos

15. Representa no plano de Argand os números complexos:
    15.1 $z = 2 + 2i$
    15.2 $z = 3i$
    15.3 $z = 1 - 2i$
    15.4 $z = 5 - 4i$

16. Sendo $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = i$, efectua as operações indicadas e escreve o resultado na forma $a + bi$:
    16.1 $z_1 + z_2$
    16.2 $z_1 + z_2 - z_3$
    16.3 $\frac{1}{z_2}$
    16.4 $\frac{z_1}{z_2}$
    16.5 $\frac{z_2}{z_1} + z_2$

17. Seja $f(z) = \frac{z \cdot \bar{z}}{z - \bar{z}}$, determina $f(2 + i)$.

18. Reduz z para forma $a + bi$: $z = \frac{1 + i}{i + i} 1 + i$.

19. Mostra que $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i$ é solução da equação $2z^2 + -5z + 2 = 0$.

20. Calcula na forma algébrica:
    20.1 $(3 - 4i) + (-2 + 7i)$
    20.2 $(2 + 4i) + (-1) + 3i$
    20.3 $(2 - 3i) - (4 + i) + (-5 - i)$
    20.4 $(1 - i) - (2 + i)$
    20.5 $(1 + 2i) \cdot (2 - 3i)$

21. Calcula na forma algébrica:
    21.1 $(3i)^2$
    21.2 $(2i)^2 + (3i)^2 + 2i$
    21.3 $(3 + 4i)^2$
    21.4 $\frac{2 + 3i}{1 + i}$
    21.5 $\frac{2 - i}{i} + \frac{5}{1 - i}$
    21.6 $\frac{(1 - 3i)^2}{2 + i}$

Exercícios propostos

22. Resolve, em $\mathbb{C}$, as equações:
    - 22.1 $i(z - 1) - 1 = 0$
    - 22.2 $z^2 + 1 = 0$
    - 22.3 $3 + 4i = z \cdot \bar{z} + 2zi$
    - 22.4 $z^2 + 3zi - 2 = 0$
    - 22.5 $z^2 + 5zi - 4 = 0$
    - 22.6 $z^2 - z + 1 = 0$
    - 22.7 $2z^2 + 2z + 1 = 0$

23. Sabendo que se $n = 4p + r$, calcula:
    - 23.1 i^7
    - 23.2 i^9
    - 23.3 i^{17}
    - 23.4 i^{93}
    - 23.5 i^{175}
    - 23.6 i^{194}

24. Calcula:
    - 24.1 $\dfrac{i^{93}}{i + 1}$
    - 24.2 $\dfrac{i^{17}}{i - 1} + \dfrac{1}{i^7}$
    - 24.3 $\dfrac{1^{4n+1} + i}{3 - 1}$, onde $n \in \mathbb{N}$
    - 24.4 $\sum_{k=1}^{4} i^k = i + i^2 + i^3 + i^4 \ldots$
    - 24.5 $\sum_{k=0}^{7} i^k$
    - 24.6 $\sum_{k=3}^{17} i^k$

25. Calcula o módulo dos seguintes números complexos:
    - 25.1 $-4i$
    - 25.2 $6 + 8i$
    - 25.3 $-3 + 4i$
    - 25.4 $\sqrt{5} + 2i$
    - 25.5 $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

26. Resolve, em $\mathbb{C}$, as equações:
    - 26.1 $2 + i = (3 - 4i)\, z$
    - 26.2 $(1 - i)\, z + 3 + 4i = 5 - 2i$
    - 26.3 $(1 - i)2 \cdot \bar{z} = 3 - 2i$
    - 26.4 $z^2 = 10z - 74$

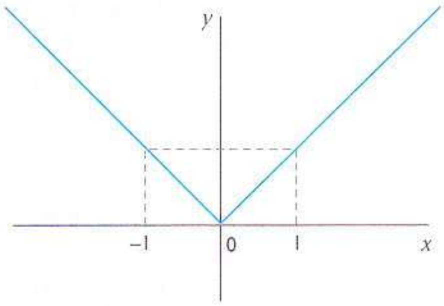
27. Considera o polinómio $P(z) = z^4 - 16$.
    - 27.1 Factoriza-o num produto de quatro factores.
    - 27.2 Resolve a equação $z^4 - 16 = 0$.

Soluções

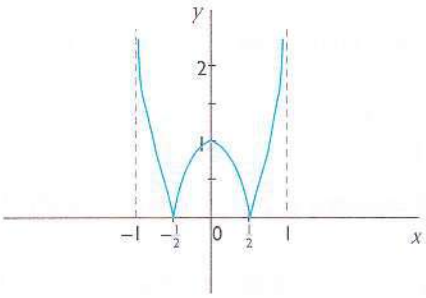
Unidade 1

1.1	V	1.2	V	1.3	V		
1.4	F	1.5	F				
2.1	−8	2.2	9 − 5	2.3	10 − 8	2.4	9 − 5
4.1	1	4.2	8	4.3	4	4.4	5
5.1	4	5.2	50	5.3	134	5.4	1,7875

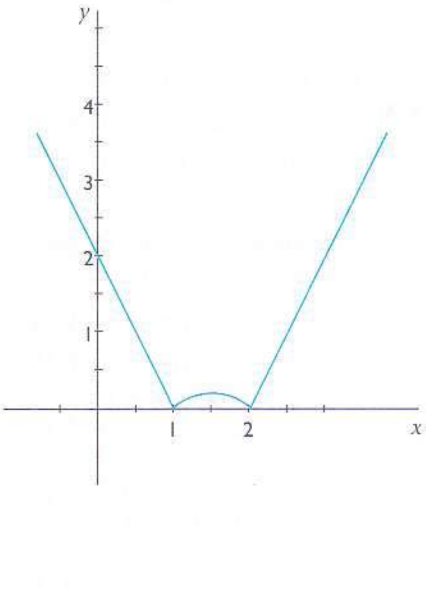
6.1



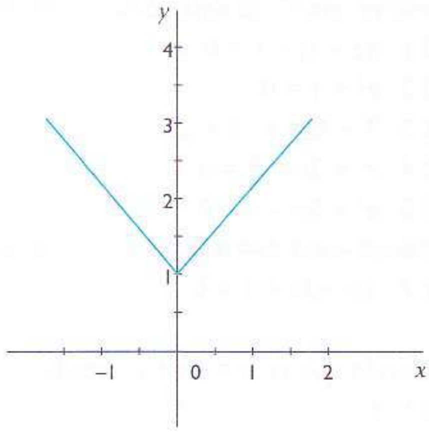
6.2



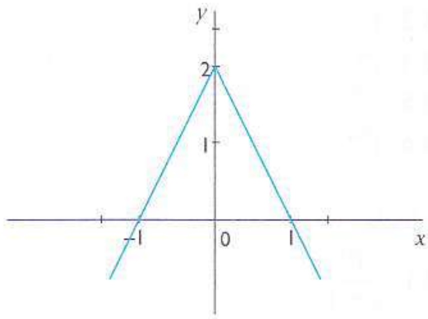
6.3



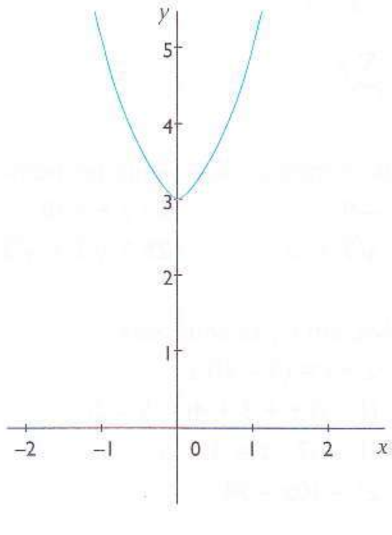
6.4



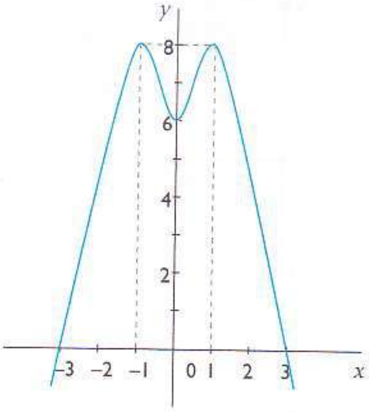
7.1



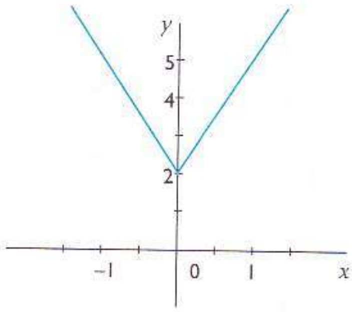
7.2



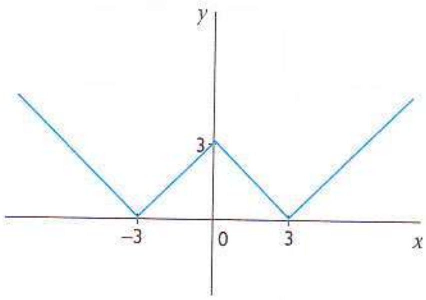
7.3



7.4



8. D: $x \in \mathbb{R}$, CD: $y \in]0, +\infty[$



9.1 $x \in \mathbb{R}$: $\{\pm 1, \varnothing, \pm 1\}$

9.2 $x < -1$ ou $0 < x < 1$

10. Para $-5 < x < -3 \vee -1 < x < 1$ f decresce
Para $-3 < x < -1 \vee 1 < x < 3$, f cresce
$f > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
$f = 0$ se $x = -3 \vee x = 1$

11.1 $\{-4, 14\}$ 11.2 $\{-6, 2\}$

11.3 $\{-4, 0\}$ 11.4 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right\}$

12.1 $\left\{\frac{-3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$ 12.2 $\left\{-\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}\right\}$

12.3 $\left\{-\frac{7}{9}, \frac{11}{3}\right\}$ 12.4 $\left\{0, \frac{5}{4}\right\}$

13.1 $\{2\}$ 13.2 $x \in \varnothing$ 13.3 $x \in \varnothing$

13.4 $\{-1, 1\}$ 13.5 $x \in \varnothing$ 13.6 $\{-4\}$

14.1 $-1 < x < 5$ 14.2 $-\frac{7}{4} \leq x \leq \frac{9}{4}$

14.3 $x < -\frac{2}{3} \vee x > 0$ 14.4 $x \in \mathbb{R}$

14.5 $x \leq -1 \vee 2 \leq x \leq 3 \vee x \leq 6$

14.6 $-1 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 3$

14.7 $x \in \varnothing$

15.1 $x \leq -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$

15.2 $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 1$

15.3 $-5 < x < -3 \vee 3 < x < 5$

15.4 $x \in \varnothing$

16.1 $x < -2 \vee x > 2$

16.2 $-2 \leq x \leq 2$

16.3 $0 \leq x < 1$

17.1 $x \leq -2 \vee x \geq 2$

17.2 $x \in \mathbb{R}$

18.1 ± 2 18.2 $\varnothing$

18.3 $-1, 3, \pm\sqrt{7}$ 18.4 $0, 100$

18.5 1 18.6 $-3, \frac{3}{2}$

Unidade 2

1.1 $\frac{1}{132}$ 1.2 28 1.3 10506 1.4 $\frac{1}{2002}$

1.5 $\frac{379}{19}$ 1.6 $\frac{419}{21}$

2.1 $\frac{1}{n+1}$ 2.2 $n-1$ 2.3 n

2.4 $\frac{n-1}{n+2}$ 2.5 $\frac{n}{n^2+n+1}$

3.1 $n = 9$ 3.2 $n = 11$ 3.3 $n = 4$ 3.4 $n = 6$

3.5 $n = 2$ 3.6 $\varnothing$

4.1 $n = 2$ 4.2 $n = 8$ 4.3 $n = 20$

5. $\{2, 3\}$

6. $n = 10$

7. $C^1_1 \cdot C^5_1 \cdot C^6_1 = 30$

8.1 $C^{10}_2 = 45$ 8.2 $C^{10}_3 = 120$

9.1 $C^{10}_5 = 120$ 9.2 $C^5_2 \cdot C^5_1 = 50$

10. 120

11. 45

12.1 $\dfrac{n+1}{n+4}$ 12.2 $\dfrac{n^2+5n+7}{n+2}$

12.3 $\dfrac{n^2+n+1}{n}$ 12.4 $\dfrac{n^2-n}{(n+1)!}$

13.1 $n = 9$ 13.2 $n = 11$ 13.3 $n = 6$ 13.4 $n = 8$
13.5 $n = 6$ 13.6 $n = 8$

14. 60

15. 13

16. 375 375

17. 1680

18.1 120 18.2 12

19.1 96 19.2 140

20.1 24 20.2 96

21.1 27 405 21.2 8550 21.3 11 160

22.1 300 22.2 156 22.3 126

23.1 11 760 23.2 20 616 23.3 29 016

24.1 210 24.2 140 24.3 70

25.1 $x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20x^{-2} + 6x^{-4} + x^{-6}$

25.2 $x^2\sqrt{x} - 5x^2\sqrt{xy^{-1}} + 10xy\sqrt{y} - 10xy\sqrt{y} + 5y^2\sqrt{x} - y^2\sqrt{y}$

26. $\dfrac{5}{27x^2}$

27.1 $\dfrac{8}{3}$ 27.2 $x = -1$

28.1 $T_3 = \dfrac{5}{9}x^{-2}$ 28.2 64

29. $P = \dfrac{C_2^{20} \cdot C_1^{35}}{C_3^{55}} = 0{,}45$

30. $P(A) = 0$

31. $\dfrac{5}{6}$

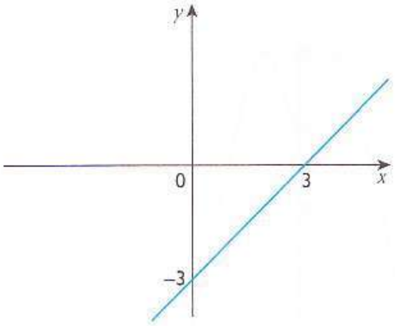
32. $N = C_1^3 \cdot P_4 = 72$

33.1 0,000004 33.2 0,3

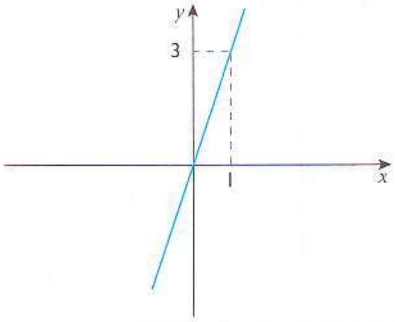
Unidade 3

1.1 f é injectiva.
1.2 f é sobrejectiva mas não injectiva.
1.3 f é injectiva.
1.4 f não é injectiva.

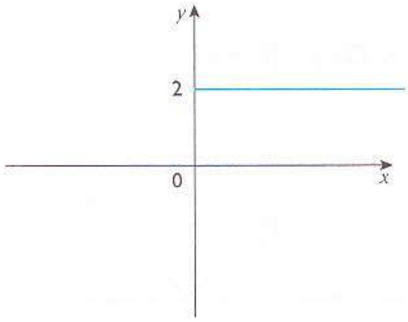
2.1



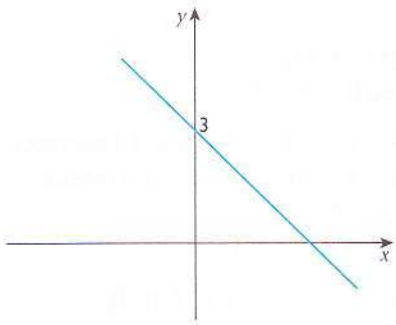
2.2



2.3



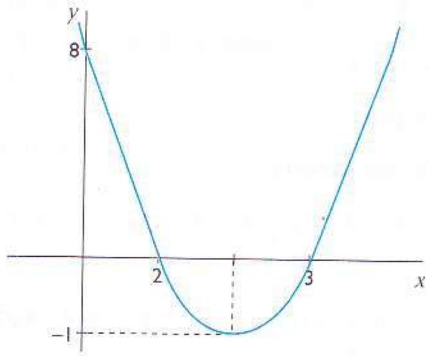
2.4



3.1 5 3.2 $\dfrac{3}{2}$ 3.3 0 3.4 $-\dfrac{3}{2}$

4. $V\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{25}{8}\right)$

5.



6.1 $y_v = 9$ 6.2 $y_v = -4$

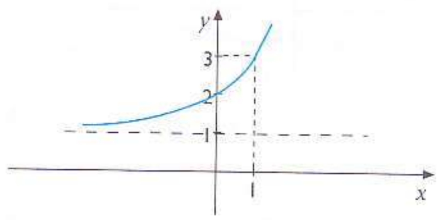
7. $m = 6$

8. $A = 81$ cm^2

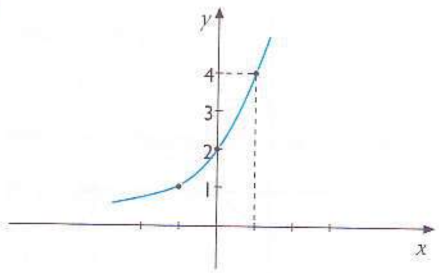
9.1 25 m 9.2 10 m

10.1 Crescente
10.2 Crescente
10.3 Crescente

11.1



11.2



12.1 T=70° 12.2 T≈22° 12.3 T≈20°

13. 50 000 mosquitos

14.1 3 14.2 -4 14.3 $-\frac{1}{2}$ 14.4 $\frac{4}{3}$
14.5 $\frac{4}{3}$ 14.6 4 14.7 -4 14.8 3
14.9 $\{-1, 2\}$ 14.10 $\{1, -5\}$ 14.11 $\{-2, 3\}$ 14.12 3
14.13 3 14.14 1 14.15 1

15.1 $\frac{8}{7}$ 15.2 3 15.3 $\sqrt{0{,}6}$ 15.4 4

15.5 3 15.6 $\frac{1}{2}$ 15.7 $\left\{\frac{3}{2}; 3\right\}$ 15.8 13

15.9 6 15.10 $\{0{,}01; 0{,}001\}$

15.11 $\left\{\frac{1}{4}; 4\right\}$ 15.12 $\left\{\frac{1}{3}; 27\right\}$

16.1 $\frac{\pi}{18}$ rad 16.2 $\frac{5\pi}{9}$ rad 16.3 $\frac{\pi}{3}$ rad 16.4 π rad

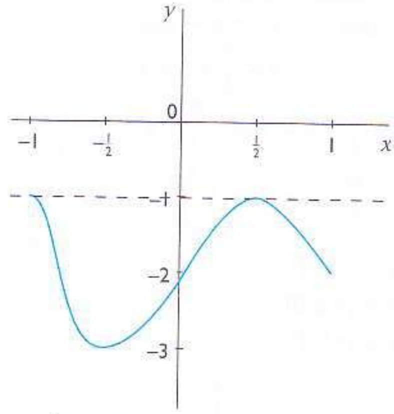
17.1 90° 17.2 120° 17.3 67° 30' 17.4 150°

18. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou
$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

19.1 3 e $\frac{5}{2}$ 19.2 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 19.3 $3 + \cos x$

20.1 $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$ 20.2 $y = 4$
20.3 f não tem zeros 20.4 $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 - \text{sen}\,(2x)$

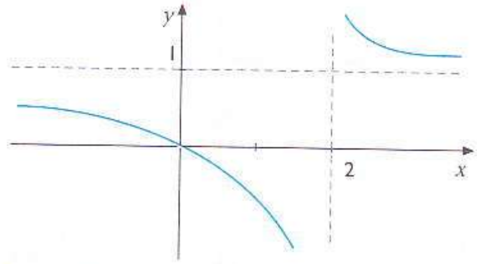
21.1 $y \in [-3; -1]$
21.2



22. $x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$

23.1 $D_f: x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ 23.2 $f(0) = -\frac{1}{2}$
23.3 $x = 2$ e $y = 0$ 23.4 c(2,5)

24.1 $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ 24.2 $x = 0$
24.3 $y = 0$ 24.4 $x = 2$ e $y = 1$
24.5



24.6 f é injectiva

25.1 $D_f: x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $x = -1$; $y = 2$;
C(–1, 2); $x = 0$; $f(0) = 0$

25.2 $D_f: x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}\right\}$; $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$;
$C\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $x = -4$; $f(0) = -\frac{4}{3}$

25.3 $D_f: x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$; $x = 3$; $y = 4$;
C(3, 4); $x = -\frac{1}{4}$; $f(0) = -\frac{1}{3}$

26.1 $f \circ g = \text{sen}^2 x$ 26.2 $\frac{3}{4}$

27.1 $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 27.2 $\frac{1}{5}$

28.1 $-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$ 28.2 $-\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

29.1 $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z}$

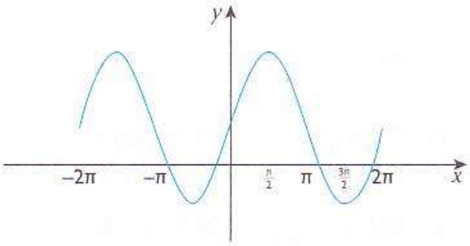
29.2 $\text{sen } x - \cos x = 1$
$(\text{sen } x - \cos x)^2 = 1^2$
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x = 1$
$1 - \text{sen } (2x) = 1$
$\text{sen } (2x) = 0$
$\text{sen } (2x) = \text{sen } 0 \vee \text{sen } (2x) = \text{sen } \pi$
$2x = 0 + 2k\pi \quad \vee 2x = \pi + 2k\pi$
$x = k\pi \quad \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

29.3 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \vee x = 2k\pi - \frac{5}{6}\pi; k \in \mathbb{Z}$

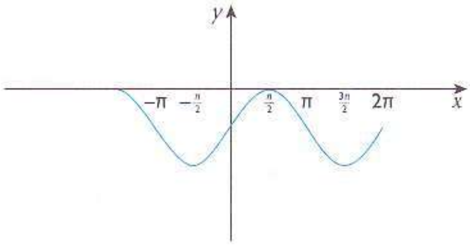
29.4 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$

30.1 a) CD: $y \in [-1; 3]$
b) CD: $y \in [-2; 0]$
c) CD: $y \in [-1; 1]$

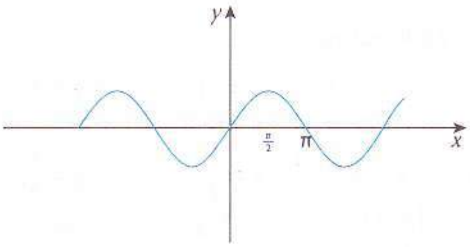
30.2 a)



b)



c)



31.1 0 31.2 −1 31.3 −1 31.4 −4

32.1 $20x - 1$ 32.2 $20x - 5$ 32.3 $25x$

33. $g(x) = 2$

34. $f(x) = 3x - 1$

35. $f \circ g$ é par

36. $g \circ f$ é decrescente

37. $D_{(g \circ f)}: x \geq 3$; $D_{(f \circ g)}: x \geq 4$

38. $a = 0$

39.1 −2 39.2 −11 39.3 −23 39.4 $4\sqrt{2} - 5$

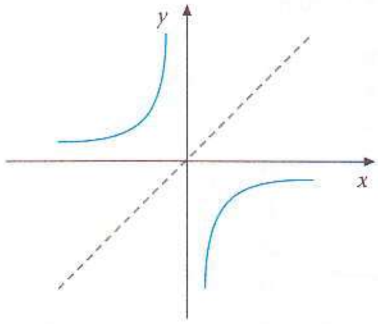
40.1 $y^{-1} = -x + \frac{3}{4}$

40.2 $y^{-1} = a^x$

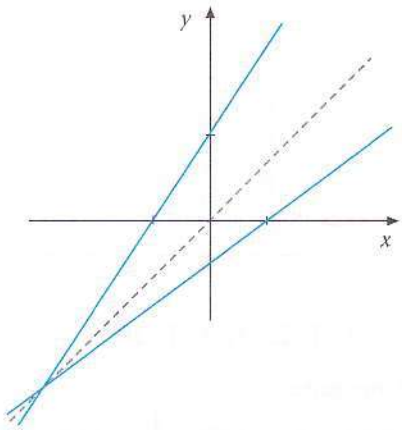
40.3 $y^{-1} = = \log_2 (x - 3)$

40.4 $y^{-1} = = \frac{x-2}{x-4}$

41.1

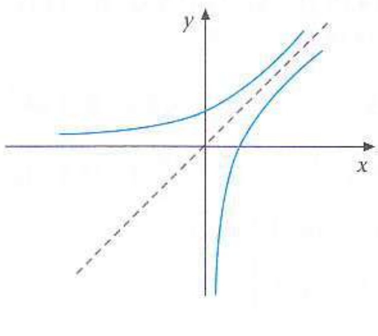


41.2



41.3 f não é injectiva, por isso não admite função inversa.

41.4



42.1 Ímpar
42.2 Par
42.3 Não é par e não é ímpar
42.4 Par

Unidade 4

1.1 1, 3, 9, ..., $2p - 1$

1.2 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \dots \frac{p+2}{p+3}$

1.3 2, 3, 17, ..., $1 + 2^{(p-1)}$

2. 0,9 é termo da sucessão: $n = 7 \in \mathbb{N}$.
1,25 não é termo da sucessão: $n = -7 \notin \mathbb{N}$.

3.1 $U_n = \frac{n}{n+1}$ é monótona crescente

3.2 $C_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ é monótona decrescente

3.3 $U_n = 6 + (-1)^n$ não é monótona

3.4 $A_n = \frac{n+3}{n+1}$ é monótona decrescente

3.5 $A_n = 6 - \frac{1}{n}$ é monótona crescente

3.6 $U_n = \frac{2n+3}{4n-1}$ é monótona decrescente

4.1 $A_n = 1 + \frac{1}{n}$ converge para 1

4.2 $B_n = 5 \cdot n$ não converge

4.3 $A_n = \frac{(-1)^n \cdot 1}{n}$ não converge

4.4 Não converge

5.1 $U_1 = -1$; $U_2 = \frac{5}{3}$; $U_3 = 1$

5.2 Não é monótona porque $U_1 < U_2$ e $U_2 > U_3$

6.1 8, 16, 24, 32, ..., $8n$, ...
6.2 2, −2, 2, −2, ..., $2 \cdot (-1)^{n+1}$, ...
6.3 −2, 2, −2, 2, ..., $2 \cdot (-1)^n$, ...
6.4 4, 6, 8, 10, 12, ..., $2n + 2$, ...

7.1 V
7.2 F
7.3 F
7.4 V
7.5 V
7.6 F

8.1. 1, 2, 8, ...
8.2 30; 30; 30; ...
8.3 1, −1, −3, ...
8.4 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$
8.5 $-\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$

9.1. $-2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$
9.2 $\frac{n}{n-1}$
9.3 1,02 não é termo da sucessão dada.
1,01 é termo da sucessão dada.

10.1. $0, \frac{8}{3}, \frac{24}{5}, \frac{(n-1)^3 - 1}{n-1}$
10.2. 9,9 é o décimo termo da sucessão ($n = 10$).
10.3 6 não é termo da sucessão.

11.1 $A_n = -n^2$
11.2 $A_n = (-1)^n - n$
11.3 $A_n = 3^{n-1}$
11.4 $A_n = 5n - 5$
11.5 $A_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$
11.6 $A_n = \frac{1}{2n}$

12.1 $A_n = 2n + 2$ ou $A_n = 2n$
12.2 $A_n = 2n + 1$
12.3 $A_n = 3n$
12.4 $A_n = 5^n$
12.5 $A_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

13. $\frac{n+1}{3}$ é uma PA de razão $d = \frac{1}{3}$ $A_{n-1} = A_n = \frac{1}{3}$

14. $B_{n+1} - B_n = 2n$, logo, B_n não é.

15.1 −2; 0; 2; 4; 6
15.2 −2; −5; −8; −11; −14
15.3 $-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0$
15.4 −2; −2; −2; −2; −2

16. É uma progressão aritmética.

17. $d = 3$

18. $U_n = -3 - 2n$
$500 \in U_n$

19.1 $U_n = 10n - 7$
19.2 $U_n = 5n - 25$
19.3 $U_n = 10 - \frac{n}{2}$
19.4 $U_n = 3n - 7$

20.1 $S_{20} = 2\,400$
20.2 $S_{10} = 120$
20.3 $S_{18} = 70{,}2$
20.4 $S_{100} = 42{,}7$

21. A sucessão tem 86 termos ($n = 86$)

22. $S_6 = 87$

23. Existem 3300 números.

24. $S_{10} = 12$

25. $S_{10} = 45$

26.1 $x = 80$
26.2 $x = 25$

27.1 −3; −6; −12; −24; −24; −48
27.2 −5; 10; −20; 40; −80
27.3 1; −1; 1; −1; 1
27.4 $\frac{3}{\sqrt{2}}; 3; 3\sqrt{2}; 6; 6\sqrt{2}$

28.1 $A_n = 5^{1-n}$ é progressão de razão $r = 9$.

28.2 $A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$ é progressão de razão $r = \frac{1}{2}$.

28.3 $A_n = (-1)^{2n+3}$ é progressão de razão $r = 1$.

29.1 $A_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
29.2 $A_n = 64 \cdot 2^{1-n}$
29.3 $A_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
29.4 $A_n = 2 \cdot 4^{n-1}$ ou $A_n = -2 \cdot (-4)^{n-1}$

30.1 $U_{10} = -2 \cdot 3^9$
30.2 $U_{10} = 5 \cdot (-2)^9$

31.1 64 colegas
31.2 $t \approx 7$ minutos

Unidade 5

1.1 $+\infty$ 1.2 0 1.3 72
1.4 2 1.5 2 1.6 1

2.1 $+\infty$ 2.2 0 2.3 $\frac{1}{4}$
2.4 $\frac{a-1}{3a^2}$ 2.5 $3x^2$

3.1 4 3.2 $\frac{1}{6}$ 3.3 -4 3.4 $-\frac{1}{2}$
3.5 $-\frac{1}{56}$ 3.6 12 3.7 $\frac{3}{2}$ 3.8 $\frac{1}{2}$
3.9 $\frac{3}{2}$ 3.10 $-\frac{5}{2}$

4.1 $\frac{5}{2}$ 4.2 $\frac{1}{2}$ 4.3 $-\text{sen } a$ 4.4 $\cos h$
4.5 $\frac{1}{3}$ 4.6 π 4.7 $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ 4.8 1
4.9 $-\frac{1}{4}$ 4.10 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4.11 $\frac{n^2-m^2}{2}$
4.12 $\frac{1}{2}$ 4.13 $\frac{2}{\pi}$

5.1 $x > 3$
5.2 $0 < x < 3 \vee x > 4$ e $x \neq 1$
5.3 $x \leq -3 \vee x \geq 3$
5.4 $x > -\frac{\pi}{3}$
5.5 $x \neq 2\pi + 4n\pi$

6.1 1 6.2 e 6.3 $\frac{3}{2}$
6.4 $-\frac{1}{2}$ 6.5 0

7.1 2 7.2 0 7.3 0 7.4 $-\infty$
7.5 $-\infty$ 7.6 $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

8.1 $\frac{2}{3}$ 8.2 $\frac{1}{2}$ 8.3 0 8.4 $+\infty$
8.5 $+\infty$ 8.6 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 8.7 0

9.1 $-\frac{1}{2}$ 9.2 $k = \frac{41}{7}$

10. $k = -6$ ou $k = 1$

11. f não é contínua no ponto $x = 1$

12.1 $\pm\sqrt{2}$ 12.2 $\frac{1}{2}$

13. $k = -3$ ou $k = 2$

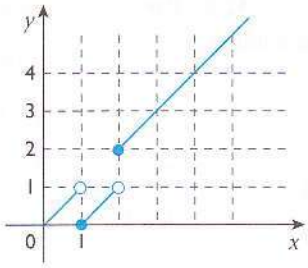
14.1 $x \in \mathbb{R}/\{6\}$

14.2 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

14.3 $\lim_{x\to 5^-} f(x) \neq \lim_{x\to 5^+} f(x)$ e $f(5) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$

14.4 $x = 6$, $x = 5$

15.1



15.2 $x \in \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ 15.3 $x = 1 \vee x = 2$

16.1 0 16.2 0 16.3 1 16.4 3
16.5 $\frac{1}{8}$ 16.6 -6 16.7 $3a^2$ 16.8 $+\infty$
16.9 -10 16.10 0

17.1 3 17.2 1 17.3 $\sqrt{2}$ 17.4 $\frac{1}{\cos^2 a}$
17.5 $2\cos a$ 17.6 $\frac{1}{2}$ 17.7 2 17.8 $\text{tg } a$

18.1 $\frac{1}{4}$ 18.2 0 18.3 3 18.4 $\frac{1}{3}$
18.5 $\frac{1}{3a}$ 18.6 $\frac{8}{9}$ 18.7 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

19.1 $+\infty$ 19.2 0 19.3 18 19.4 2
19.5 2 19.6 1

20.1 é contínua
20.2 não é contínua em $x = \sqrt[3]{7}$
20.3 é contínua
20.4 é contínua
20.5 não é contínua em $x = 1$
20.6 não é contínua em $x = 2$

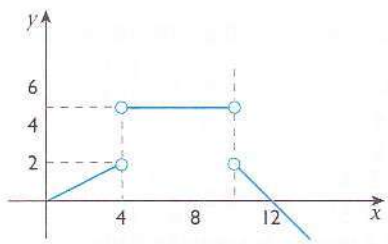
21.1 $k = -1$ 21.2 $k = 5$ 21.3 $k_1 = -1 \vee k_2 = 3$

22. Como f é uma função racional, f é contínua em todo o domínio, ou seja em $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$.

23. f é contínua para $x \in \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$; 2 e 3 são pontos de descontinuidade.

24. A função é contínua em todos os pontos: $x \in \mathbb{R}$.

25.1



25.2 f é contínua em todos os pontos do intervalo $0 < x < 12$ excepto no ponto 4 e 10, onde apresenta saltos.

26.1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$, f é descontínua em $x = 1$.
$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$, g é descontínua em $x = 1$.

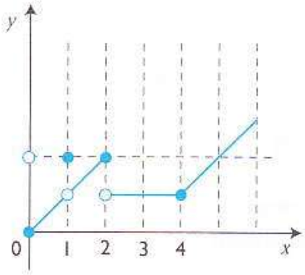
26.2 $f + g = \begin{cases} 2 \text{ se } x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} (f+g) = (f+g)(1) \\ 1 + x \text{ se } x \neq 1 \end{cases}$

27. $a = 0$; $b = 2$

28. $k = 5$

29. $m = \dfrac{7}{4}$

30.



Para $x = 0$, f é contínua à direita de $x = 0$.
Para $x = 1$, f não é contínua.
Para $x = 2$, f é contínua à esquerda de 2.
Para $x = 4$, f é contínua.

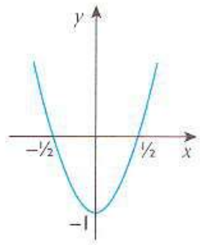
31. $k = \dfrac{13}{8}$

Unidade 6

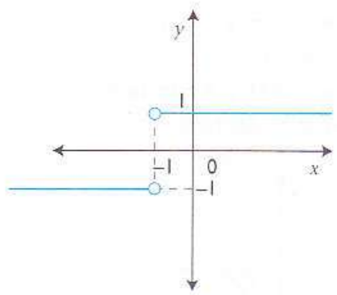
1.1 $-\dfrac{2}{9}$ 1.2 -8 1.3 $\dfrac{1}{4}$ 1.4 $\dfrac{3}{16}$

2.1 -4 e 4 2.2 -2 e 2 2.3 -2 e 2 2.4 -1 e 0

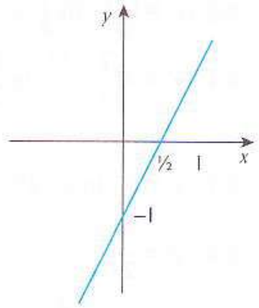
3.1



3.2



3.3



4.1 Não existe derivada em $x = a$ e $x = b$ por serem pontos angulosos. $f'(c) = 0$ porque aí função é constante.

4.2 Nos pontos p e q a derivada é nula por serem de sinais contrários às derivadas laterais (p e q são extremos).

5.1 $f'(x) = 12x^3 - 10x$ 5.2 $f'(x) = 10(2x+1)^4$

5.3 $f'(x) = 4x^3 - \dfrac{2x}{3} + \sqrt{2}$ 5.4 $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

5.5 $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$ 5.6 $f'(x) = \dfrac{-5x^2 - 5}{(x^2-1)^2}$

5.7 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 5.8 $f'(x) = \dfrac{-15(2x+3)^2}{(x-1)^4}$

5.9 $f'(x) = \dfrac{2x+6}{3}$ 5.10 $f'(x) = 3(x-1)^2$

5.11 $f'(x) = 6(2x-1)^2$ 5.12 $f'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$

5.13 $f'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2$

6.1 $y'' = 6$ 6.2 $y'' = \dfrac{-2}{(x+1)^3}$

6.3 $y'' = 6x - 4$ 6.4 $y'' = 2x + 5$

6.5 $y'' = 3x^2 - \dfrac{1}{3}$ 6.6 $y'' = 150$

6.7 $y'' = \dfrac{20}{(x-3)^3}$ 6.8 $y'' = 12x^2 - 2x$

6.9 $y'' = \dfrac{10x}{(x^2-1)^2}$ 6.10 $y'' = 180(3x+1)^3$

6.11 $y'' = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

7.1 $y' = 3\cos(3x)$ 7.2 $y' = -2\,\text{sen}\,(2x)$

7.3 $y' = 6\,\text{sen}\,(3x) \cdot \cos(3x)$

7.4 $y' = \dfrac{-3}{\cos^2(3x)}$ 7.5 $y' = 8\cos(2x-5)$

7.6 $y' = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right)$ 7.7 $y' = \dfrac{-1}{x^2 \cdot \cos^2 \frac{1}{x}}$

7.8 $y' = -2x\,\text{sen}\,x^2$ 7.9 $y' = 5\cos x - 3\,\text{sen}\,x$

7.10 $y' = \dfrac{-2}{\text{sen}\,x - \cos x}$ 7.11 $y' = t^2 \cdot \text{sen}\,t$

8.1 $y' = 5^x \cdot \ln 5$

8.2 $y' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{3}$

8.3 $y' = 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{3x}$

8.4 $y' = -\left(\frac{2}{3}\right)^{-x+7} \cdot \ln \frac{2}{3}$

8.5 $y' = (2x + 8) \cdot e^{x^2 + 8x + 7}$

8.6 $y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

8.7 $y' = 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{3x+1}$

8.8 $y' = \frac{1}{x - 1}$

8.9 $y' = \frac{1}{2x}$

8.10 $y' = \frac{3x^2}{(x^3 - 1) \cdot \ln 3}$

8.11 $y' = \frac{3}{(3x + 5) \cdot \ln 3}$

8.12 $y' = \frac{3x^2}{(x^3 + 1) \cdot \ln 3}$

9.1 $y' = 3x - 4$

9.2 $y' = -x + 1$

9.3 $y' = 1$

9.4 $y' = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

9.5 $y' = -4x$

9.6 $y' = x$

9.7 $y' = 2x + 1 - \pi$

9.8 $y' = 8x$

9.9 $y' = x - 1$

10. $y = -3x - 1$

11. $m = -\frac{43}{3}$

12. (C) $\frac{2}{3}$

13. (A) $f'(a) \cdot f''(a) < 0$ porque $f'(a) < 0$ e $f''(a) > 0$

14. (B) $-\frac{3}{5}$

15. (C) -2 porque a recta é decrescente.

16. (B)

17. $t = \frac{10}{3}$ h $= 3$ h $+ \frac{1}{3}$ h $= 3$ h 20 m.

18.1 $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

18.2 $x = \pm 1$

18.3 $x < -1 \vee x > 1$ f decresce; $-1 < x < 1$ f cresce;
mín $(-1; -\frac{1}{2})$; máx $(1; \frac{1}{2})$

19.1 $y' = 3 - 4x$

19.2 $y' = 4x^3 - 2x$

19.3 $y' = 3x^2 - 4x + 1$

19.4 $y' = \frac{2x - 6}{x^3}$

19.5 $y' = \frac{x^2 - 1}{3x^3}$

19.6 $y' = \pm 25x^2 - 5x$

19.7 $y' = \frac{6x}{(1 - x^2)^2}$

19.8 $y' = \frac{-10}{x^3}$

19.9 $y' = \frac{-6}{(3x - 5)^2}$

19.10 $y' = \frac{an}{(ax + b)^{n+1}}$

19.11 $y' = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x^2}$

19.12 $y' = \frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$

19.13 $y' = \frac{9x^2 - 1}{2\sqrt[4]{(6x^3 - 3x + 3)^3}}$

19.14 $y' = \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(a + x^n)^{n-1}}}$

19.15 $y' = \frac{17}{(2x + 5)^2}$

19.16 $y' = \frac{x - 10}{2\sqrt{(x - 5)^2}}$

19.17 $y' = \frac{x^2}{\sqrt{(a + x^3)^2}}$

20.1 $y' = \frac{y}{x - y}$

20.2 $y' = \frac{cy + x\sqrt{x^2 + y^2}}{cx - y\sqrt{x^2 + y^2}}$

21. $f'(1, 1) = -1$

22.1 $f'(0) = -\frac{1}{2}$

22.2 $f'(1) = -3$

22.3 $f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

23.1 para $x < 2$ f cresce
para $x > 2$ f decresce
máx (2,2)

23.2 para $x < -1 \vee x > 3$ f cresce
para $-1 < x < 3$ f decresce
mín $(3, -17)$
máx $(-1, 15)$

23.3 para $x < -2$ f cresce
para $x > -2$ f decresce
Não tem máx nem mín.

23.4 para $x < -3$ v $\vee$ $x > 3$ f cresce
para $-3 < x < 3$ f decresce
mín (3, 147/5); máx (−3; 177/5)

23.5 para $x < -\frac{1}{2}$ f decresce

para $x > -\frac{1}{2}$ f cresce

mín $\left(-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{4}}\right)$

24.1 AV: $x = 0$; AH: $y = -4$

24.2 AV: $x = 3$; AH: $y = 2$

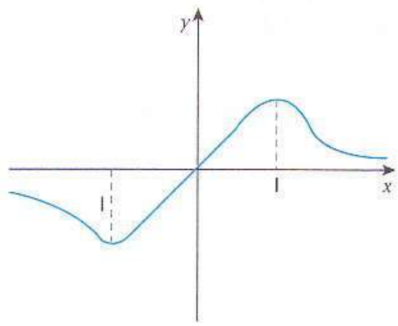
24.3 AV: $x =$ não tem; AH: $y = 0$

24.4 AV: $x = 3$; AH: $y = 1$

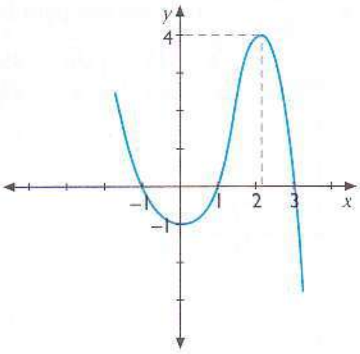
24.5 AV: $x =$ não tem; AH: $y =$ não tem

24.6 AV: $x = 0$; AH: $y =$ não tem

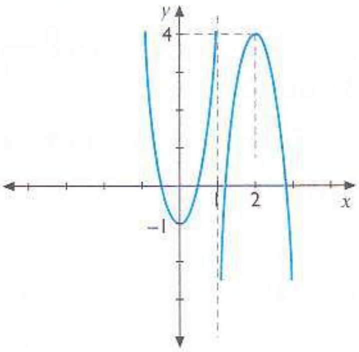
25.



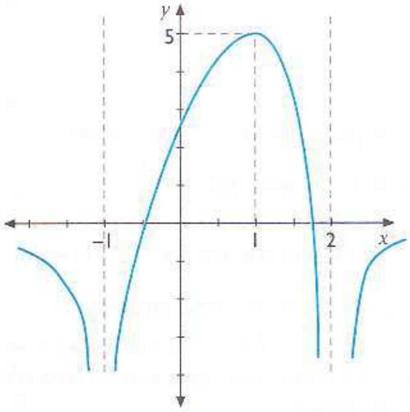
26.1 zeros: $x = \pm 1$; $x = 3$
mín $(0, -1)$; máx $(2, 4)$



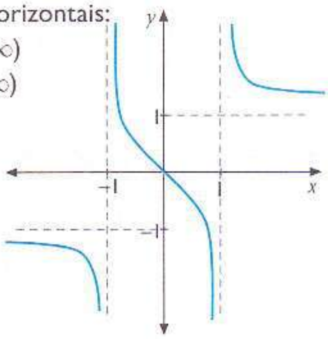
26.2 zeros: $x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{3}{2}$; $x = 3$
mín $(0, -1)$; máx $(2, 4)$



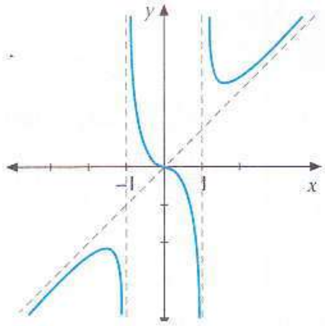
26.3 zeros: $x = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{4}{3}$
máx $(1, 5)$; $f(0) = \frac{3}{2}$



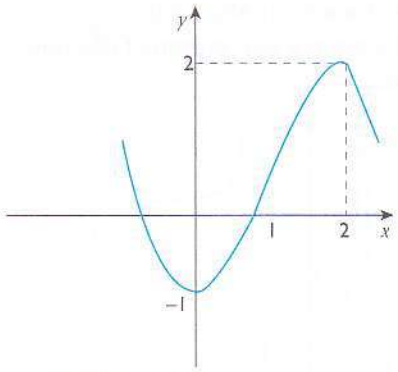
26.4 assímptotas horizontais:
$y = -1 (x \to -\infty)$
$y = 1 \ (x \to +\infty)$



26.5 mín $\left(\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; máx $\left(-\sqrt{3}; \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$



27.



28.1

x	x < –2	–2	–2 < x < 0	0	x > 0
f'	+		–		+
f	↗	4	↘	–1	↗

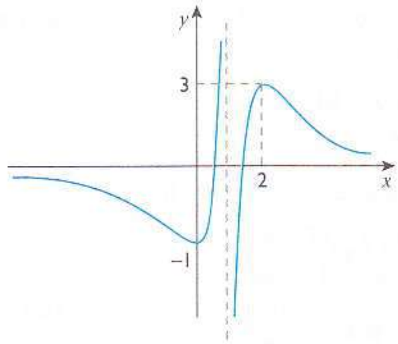
zeros: $x–3$; $x = -1$; $x = 1$
máx $(-2, 4)$; mín $(0, -1)$

28.2

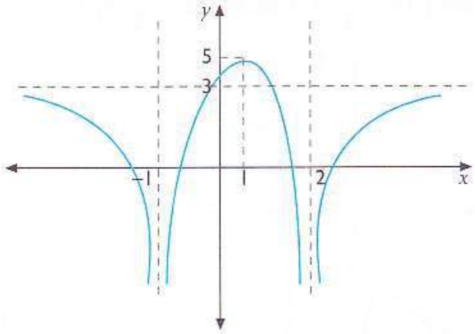
x	x < –1	–1	x > –1
f'	+		+
f	↗	AV	↗

zeros: $x = -2$; $x = 0$
assímptota oblíqua: $y = x + 1$
assímptota vertical: $x = -1$

29.



30.

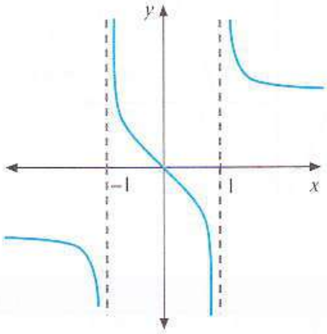


31.1 $x = 0$ 31.2 $y = 0$ 31.3 $x \neq \pm 1$

31.4 AV: $x = -1$ e $x = -1$; AH: $y = 0$

31.5 $f' < 0$, f é sempre decrescente; f não tem extremo.

31.6



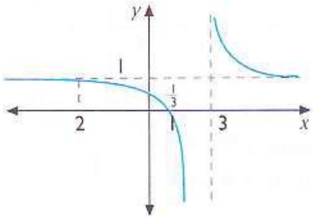
32.1 Zeros: $y = 0$ se $x = -2 \vee x = 1$;

ordenada na origem: $f(0) = \frac{1}{3}$

32.2 AV: $x = 3$; AH: $y = 1$

32.3 $f'(x) < 0$. Logo, f decresce.

32.4



33.1 D_f: $x \in \mathbb{R}$; zeros: $-\frac{3}{2}$, 0 e $\frac{3}{2}$; ordenada na origem: $f(0) = 0$

33.2 mín $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{81}{64}\right)$;

f decresce se $x > -\frac{3\sqrt{2}}{4} \vee 0 > x > \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

mín $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4} 3 \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{81}{64}\right)$;

f cresce se $x > -\frac{3\sqrt{2}}{4} > x > 0 \vee x > \frac{3\sqrt{2}}{4}$;

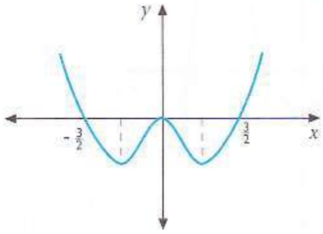
máx (0,0)

33.3 Se $x < -\frac{\sqrt{6}}{4} \vee x > \frac{\sqrt{6}}{4}$ f é côncavo para cima.

Se $-\frac{\sqrt{6}}{4} < x < \frac{\sqrt{6}}{4}$ f é côncavo para baixo.

Pontos de inflexão: $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{45}{64}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{45}{64}\right)$

33.4



33.5 $y \in [-\frac{81}{64}, +\infty[$

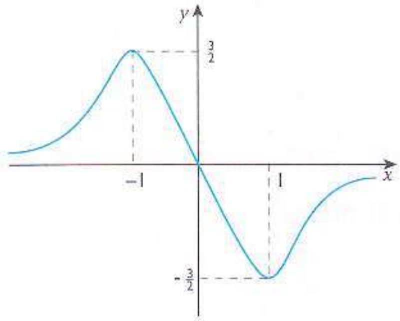
34.1 Zero: $x = 0$. Ordenada na origem: $f(0) = 0$

34.2 D_f: $x \in \mathbb{R}$

34.3 f não tem assímptotas verticais. $y = 0$ é uma assímptota horizontal.

34.4 $x < -1 \vee x > 1$ f cresce. $-1 < x < 1$ f decresce. mín $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. máx $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

34.5



35.1 D_f: $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$. Zeros: $y = 0$ se $x = \pm 1$.

Ordenada na origem: $f(0) = -\frac{1}{4}$

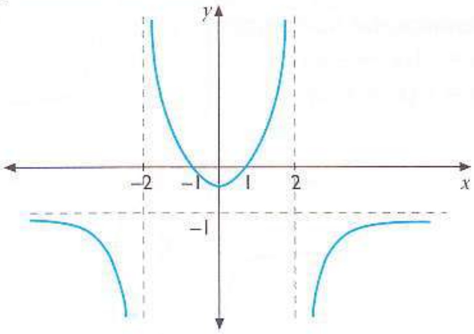
35.2 AH: $y = -1$. AV: $x = -2$ e $x = 2$.

35.3 Para $x < 0$ f decresce. Para $x > 0$ f cresce.

O ponto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ é mínimo relativo.

35.4 Para $x < -2 \vee x > 2$ f é côncavo para baixo. Para $-2 < x < 2$ f é côncavo para cima. f não tem pontos de inflexão.

35.5



35.6 f é par porque o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

35.7 $y \in]-\infty, -1[\cup [-\frac{1}{4}, +\infty[$

36. (D)

37. D

38. 55 360 Mt

39. 10 e 10

40. 5 e 5

41. $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$

42.1 $h = 5$ m 42.2 $t = 1$ s

43. 2 e 8

44. 4 e 8

45. $\frac{A}{2}$

46. $r = h = 10\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$

47. $x = 3$

48. $c = l = \sqrt{2c}$

49. l = 12 dm = 120 m; c = 18 dm = 180 m

50. $a = 5\sqrt{2}$; $b = 5\sqrt{2}$

51. $c = l = 40$ m

Unidade 7

1.1 $\frac{x^3}{3} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$

1.2 $4\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

1.3 $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

1.4 $\frac{5}{3}xy^3 - 2x^2y^2 - 3y + c$

1.5 $\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + c$

1.6 $\frac{x^4}{4} + \frac{a^2}{2x^2} + c$

1.7 $\frac{x^3}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$

1.8 $\frac{5}{3}\ln|3x - 7| + c$

1.9 $\frac{7}{13}\frac{\sqrt{13}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{\sqrt{12}}{13}} + c$

1.10 $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + c$

2.1 $f(x) = \frac{x^4}{4} + c$ 2.2 $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$

2.3 $f(x) = x^2 + c$ 2.4 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + c$

2.5 $f(x) = x$ 2.6 $f(x) = \operatorname{sen} x$

3.1 $f(x) = \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + c$

3.2 $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + c$

3.3 $f(x) = e^x + c$

3.4 $f(x) = \cos x + c$

3.5 $f(x) = \ln(x) + c$

3.6 $f(x) = \operatorname{tg} x + c$

3.7 $f(x) = \operatorname{cotg} x + c$

3.8 $f(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$

3.9 $f(x) = \frac{10^{2x-3}}{2}\ln 10$

4.1 $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$

4.2 $\frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$

4.3 $-\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x + c$

4.4 $\frac{1}{3}\ln|3x + 1| + c$

4.5 $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4x| + c$

4.6 $\operatorname{sen}(x + 9) + c$

4.7 $-\frac{1}{5}\cos^5 x + c$

4.8 $\sqrt{x^2 - 5} + c$

4.9 $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 10} + c$

4.10 $\frac{1}{2\cos^2 x} + c$

4.11 $\frac{\arccos^3 x}{3} + c$

4.12 $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 4| + c$

5.1 $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x + 1}{2} + c$

5.2 $\frac{\sqrt{17}}{2}\ln\left|\frac{x}{x + 2}\right| + c$

5.3 $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x - 1}{\sqrt{11}} + c$

5.4 $\frac{5}{2}\ln|x^2 - 7x + 1| + \frac{35}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 7}{\sqrt{3}} + c$

5.5 $\frac{3}{2}\ln|x^2 - 4x + 5| + 4\operatorname{arctg} x - 2 + c$

5.6 $\frac{x-5}{2}\ln|x^2+3x+4|+c$

5.7 $x+3\ln|x^2-6x+10|+c$

5.8 $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{arcsen}\,\frac{4x-3}{5}+c$

5.9 $3\sqrt{x^2-4x+5}+c$

6.1 $\frac{-x}{5}\cos 5x+\frac{1}{25}\,\text{sen}\,5x+c$

6.2 $x\ln x-x+c$

6.3 $x\,e^x-e^x+c$

6.4 $(x+1)\,\text{sen}\,x+\cos x+c$

6.5 $\frac{x^2}{2}\ln 3x-\frac{1}{4}x^2+c$

6.6 $\frac{e^x}{5}(\text{sen}\,2x+4\cos 2x)+c$

6.7 $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+c$

6.8 $\frac{1}{3}x^2\,\text{sen}\,3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\,\text{sen}\,3x+c$

6.9 $x\,\text{arcsen}\,x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

6.10 $(-x-1)\,e^x+c$

6.11 $(-x+1)\,e^{-x}+c$

6.12 $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{81}e^{3x}+c$

6.13 $(x^2-2x+5)\,e^x-2(x-1)\,e^x+2\,e^x+c$

6.14 $\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{3}{4}x^2e^{2x}+\frac{3}{4}xe^{2x}-\frac{3}{8}e^{2x}+c$

6.15 $\frac{1}{2\cdot x^2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)+c$

7.1 $I=\frac{1}{2}\left[\ln|x^2+3x-4|+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|\right]+c$

7.2 $\frac{1}{2}\ln|x^2+4x-11|+c$

7.3 $-\frac{5}{6}\ln|7-x-3x^2|-\frac{7}{2\sqrt{85}}\ln\left|\frac{6x+1-\sqrt{85}}{6x+1+\sqrt{85}}\right|+c$

7.4 $I=\sqrt{x^2+8x-1}-4\ln\left|\frac{x+4-\sqrt{17}}{x+4+\sqrt{17}}\right|+c$

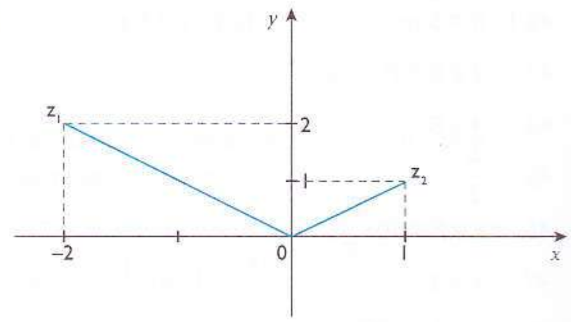
Unidade 8

1.1 $x=-\frac{1}{6}$ 1.2 $x=\frac{3}{5}$ 1.3 $x=-3$

2.1 $-3i$
2.2 0
2.3 $-4+7i$
2.4 $7+17i$
2.5 $7+i$
2.6 $-8-6i$
2.7 $-4i$
2.8 4
2.9 2
2.10 $\frac{2}{5}$

3.1 5
3.2 $\sqrt{2}$
3.3 4
3.4 5
3.5 $\sqrt{29}$
3.6 3
4.1 $-2i;\ 2i$
4.2 $-2i;\ 2i$
4.3 $-3i;\ 3i$
4.4 $-1-i\sqrt{3}\ ;\ -1+i\sqrt{3}$
4.5 $5+i\sqrt{15};\ 5-i\sqrt{15}$
4.6 $\frac{1}{2}-i;\ \frac{1}{2}+i$

5.1



5.2 $z_1=2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right),\ z_2=\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{1}{4}\pi\right)$

6. $x=5+i\sqrt{15}$ ou $x=5-i\sqrt{15}$.

7.1 $=38+27i$

7.2 $=\frac{-18-43}{53}i$

7.3 $=7-3i$

8. $-\frac{5}{2}i$

9. $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$

10.2 Raízes $S=\{-i,\ i,\ 1-i\}$

11.1 $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

11.2 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

11.3 $2i$

11.4 $\frac{3}{2}+3\frac{\sqrt{3}}{2}i$

12.1 $5\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

12.2 $3\sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

12.3 $8\,\text{cis}\,0°$

12.4 $2\,\text{cis}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

13.1 $-3 + i\sqrt{3}$

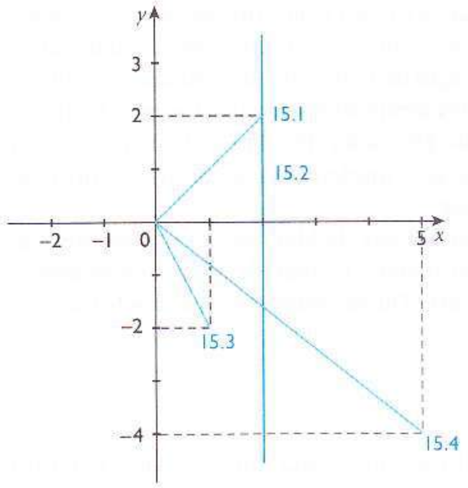
13.2 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

14.1 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

14.2 $\sqrt{3}$ e $\frac{\pi}{6}$

14.3 $9\sqrt{3}\ \text{cis}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

15.



16.1 $4 - 3i$ 16.2 $4 - 4i$ 16.3 $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

16.4 $-\frac{7}{5} - \frac{11}{5}i$ 16.5 $40 + 3i$

17 $-\frac{5}{2}i$

18. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

19. Substitui z pela expressão dada e terás a identidade 0 = 0.

20.1 $1 + 3i$

20.2 $1 + i$

20.3 $3 - 3i$

20.4 $-1 - 2i$

20.5 $8 + i$

21.1 -9

21.2 $-13 + 2i$

21.3 $-117 + 44i$

21.4 $\frac{5 + i}{2}$

21.5 $\frac{5 - i}{2}$

21.6 $-\frac{22 + 4i}{5}$

22.1 $1 - i$

22.2 $z = -i \vee z = i$

22.3 $z = 2 + i$

22.4 $z = -i \vee z = -2i$

22.5 $z = -4i \vee z = -i$

22.6 $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \vee z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

22.7 $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \vee -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

23.1 $-i$

23.2 i

23.3 i

23.4 i

23.5 $-i$

23.6 $-i$

24.1 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

24.2 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

24.3 $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

24.4 0

24.5 -1

24.6 1

25.1 4

25.2 10

25.3 5

25.4 3

25.5 2

26.1 $-4 + i$

26.2 $\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$

26.3 $\frac{1 - 3i}{2}$

26.4 $5 \pm 7i$

27.1 $(z - 2i)(z + 2i)(z - 2)(z + 2)$

27.2 $\{-2, 2, -2i, 2i\}$

Ficha técnica
Título: *Pré-Universitário – Matemática 12*
Editor: Longman Moçambique
Impressão e acabamentos: Creda Communications
N8794

Autor:

José Pedro Vuma
Licenciado em ensino de Matemática e Física pela Universidade Pedagógica de Maputo em 1996. Fez o Curso de Formação de Professores de Matemática e de Física na Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane em 1983. Participou em diferentes seminários organizados pelo Instituto Nacional de Desenvolvimento da Educação (INDE) e pelo Ministério da Educação, no âmbito da preparação e implementação do novo currículo para o ensino primário e secundário.
Actualmente, é professor de Metodologia de Matemática no Instituto de Formação de Professores da Munhuana – Cidade de Maputo e professor de Matemática na Escola Secundária Quisse Mavota (curso nocturno).

Com a especial colaboração de:

Ângelo Dias Watchave
Licenciado em Matemática e Informática pela Universidade Eduardo Mondlane em 2005. Fez o Curso Médio Pedagógico na Faculdade de Educação da Universidade Eduardo Mondlane em 1988. Entre 1999 e 2006, foi Assistente na Universidade Eduardo Mondlane nas disciplinas de: Matemática Básica; Análise Matemática I; Álgebra Linear e Geometria Analítica; Geometria Plana Espacial. Actualmente, é Professor de Matemática na Escola Técnica da U.G.C. e na Escola de Sargentos das Forças Armadas, ao nível do ensino técnico médio profissional, em Boane.

Avenida 24 de Julho, n.º 776
Maputo, Moçambique

Maputo – 2010 Longman Moçambique, Lda., 1.ª Edição

ISBN 9780636097063

Registado no INLD sob o número: 6890/RLINLD/2010

SÍMBOLOS DA REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

Bandeira

Emblema

Hino Nacional

Pátria Amada

Na memória de África e do mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique o teu nome é liberdade
O sol de Junho para sempre brilhará.

Coro
Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo o novo dia
Milhões de braços, uma só força
Ó pátria amada vamos vencer.

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela paz
Cresce o sonho ondulado na Bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

Flores brotando no chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios pelo mar
Nós juramos por ti, ó Moçambique.
Nenhum tirano nos irá escravizar.

ISBN 978-06360-970-6-3
9 780636 097063

Longman
Moçambique